E.W. SCHPOLSKI

ATOMPHYSIK

I



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

SCHPOLSKI

ATOM PHYSIK



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

E. W. SCHPOLSKI · ATOMPHYSIK I

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND VIII

ATOMPHYSIK

VON

E. W. SCHPOLSKI

TEIL I

3., unveränderte Auflage



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1960

Э. В. ШПОЛЬСКИЙ · АТОМНАЯ ФИЗИКА
МОСКВА–ЛЕНИНГРАД 1951

Dieser Ausgabe liegt eine Übersetzung von Herrn Dr. Baier zugrunde.
Verantwortlicher Verlagsredakteur Ch. Kühn

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/42/60
Satz: Leipziger Volkszeitung III/18/138
Druck: VEB Fortschritt Erfurt

INHALTSVERZEICHNIS

Abschnitt IV. Die Röntgenstrahlen und ihre Anwendung zur Bestimmung der Atomkonstanten

Abschnitt V. Der Bau des Atoms und die klassische Physik

A. Die klassische Mechanik und der Bau des Atoms

B. Die klassische Theorie der elektromagnetischen Strahlung

VORWORT ZUR VIERTEN SOWJETISCHEN AUFLAGE

Da das Buch im Unterricht verwendet werden soll, ist unter Berücksichtigung von Bemerkungen, die mir in Briefen der Leser zugegangen sind, und auf Grund von Hinweisen der Fachpresse der Inhalt des ersten Bandes bei der vierten Auflage von neuem durchgesehen worden. Obgleich hierbei viele Änderungen und Verbesserungen eingeführt wurden, blieb der allgemeine Charakter des Buches erhalten.

Moskau, im April 1951 E. SCHPOLSKI

VORWORT ZUR ZWEITEN SOWJETISCHEN AUFLAGE

Vier Jahre sind seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches vergangen. Im Verlaufe dieser Zeit konnte ich die Verständlichkeit der Darlegung und die Zweckmäßigkeit des Aufbaues des Buches im Unterricht an zwei Hochschulen prüfen. Einen wertvollen Hinweis bedeuteten für mich auch die Briefe der Leser, von denen ein Teil die Atomphysik nach diesem Buch selbständig studiert oder früher erworbenes Wissen systematisch vertieft hatte. Alle diese Beobachtungen wirkten sich zugunsten des gewählten Charakters der Darlegung und des Planes des Buches aus. Insbesondere fand die parallele Betrachtung der experimentellen und theoretischen Seite der Probleme eine allgemeine Billigung, wie auch die Einführung von Hilfsabschnitten oder Paragraphen, die notwendige Kenntnisse aus anderen Gebieten der theoretischen Physik vermitteln. Alles dies veranlaßte mich, den Charakter des Buches auch in der zweiten Auflage vollständig beizubehalten.

Trotzdem wurde das Buch einer wesentlichen Überarbeitung unterzogen. Es kann ohne Übertreibung gesagt werden, daß es in hohem Maße neu geschrieben wurde. Ich erstrebte vor allem, die bemerkten Ungenauigkeiten und Unklarheiten zu beseitigen und die Darlegung nach Möglichkeit ohne Vergrößerung des Buchumfanges klarer zu gestalten. Die in der ersten Hälfte des Buches gegebenen Ergänzungen beziehen sich fast ausschließlich auf die experimentellen Grundlagen der Atomphysik, da mir die Darlegung einiger Experimente in der ersten Auflage jetzt allzu elementar erscheint. Außerdem war es notwendig, jene Fragen ausführlicher zu beleuchten, die in der verflossenen Periode an der Entwicklung

der Wissenschaft beteiligt waren. Dies bezieht sich beispielsweise auf die Frage der Isotopentrennung, die in der ersten Auflage in einem einzigen Satz erwähnt war, jetzt aber in einigen Paragraphen behandelt wird. Besonders wesentlich wurde der zweite Teil des Buches geändert, und hier besonders sein letzter, den Atomkern betreffender Abschnitt, der wegen der großen Bedeutung der Kernphysik und der Entdeckung einer Anzahl neuer Tatsachen bedeutend erweitert werden mußte. Aus Gründen der Bequemlichkeit bei der Benutzung des Buches erschien mir bei seinem großen Umfang eine Aufteilung in zwei Bände zweckmäßig.

Der erste Band enthält die experimentellen Grundlagen der Haupttheorie des Atoms und der Quantenphysik. Er endet mit der Betrachtung der Welleneigenschaften der Materie. Wie in der ersten Auflage wird im letzten Abschnitt die SCHRÖDINGER-Gleichung aufgestellt und ihre einfachste Anwendung in fast ausschließlich eindimensionalen Aufgaben betrachtet. Auf diese Weise stellt dieser Band ein ziemlich abgeschlossenes Ganzes dar und hat für gewisse Kategorien von Lesern ein selbständiges Interesse. Im zweiten Band wird eine systematischere Darlegung der Grundlagen der Quantenmechanik und ihrer Anwendung bei dem Aufbau der Elektronenhülle des Atoms gegeben; ungefähr die Hälfte des Bandes ist dem Atomkern und den kosmischen Strahlen gewidmet.

Wie bei der Herausgabe der ersten Auflage bin ich mir voll und ganz der Schwierigkeit der Aufgabe bewußt, über die Atomphysik als dem jüngsten, wichtigsten und schwierigsten Teil der modernen Physik ein Lehrbuch zu schreiben. Die erste Auflage der „Atomphysik" hat sich schnell einen weiten Kreis von Freunden erworben. Es wäre wünschenswert, wenn nach dem Erscheinen der zweiten Auflage dieser Kreis sich noch vergrößerte. Dies wäre dem Autor der schönste Lohn für seine nicht geringe Mühe, die auf die Abfassung des Buches verwandt wurde.

Moskau, im September 1948 E. SCHPOLSKI

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN SOWJETISCHEN AUFLAGE

Die moderne Atomphysik ruht auf dem einfachen Fundament der sogenannten „klassischen Physik". Es wäre ein hoffnungsloser Versuch, in der Quantenmechanik irgend etwas ohne genügende Kenntnisse in der Mechanik NEWTONS und LAGRANGES verstehen zu wollen oder sich in den Fragen der Quantentheorie der Strahlung auszukennen, ohne mit der MAXWELL-LORENTZschen elektromagnetischen Theorie bekannt zu sein. Auf der anderen Seite benutzen die mathematischen Methoden der Quantenmechanik weitgehend Annahmen, die in der Theorie der Schwingungen und anderen Problemen der mathematischen Physik ausgearbeitet wurden. Obgleich hierdurch sehr bestimmt der Charakter der Ausbildung gekennzeichnet wird, die für ein ernsthaftes Studium der Atomphysik erforderlich ist, muß doch stets damit gerechnet werden, daß der Unterricht in der theoretischen Physik und besonders in der theoretischen Mechanik diese Forderungen der Atomphysik bei weitem nicht genügend berücksichtigt. Um

den Leser vor der Notwendigkeit zu bewahren, erst Auskünfte in verschiedenen anderen Büchern einholen zu müssen, die das Erforderliche aber selten in der für den gegebenen Fall notwendigen Form enthalten, ist im Buch ein ziemlich breiter vorbereitender Abschnitt „Der Bau des Atoms und die klassische Physik“ vorgesehen. Für die Mehrzahl der Leser wird dieser Abschnitt sehr nützlich sein, andere mögen ihn zum Nachschlagen benutzen. Außerdem sind in den Fußnoten Hinweise auf solche Handbücher gegeben, in denen ausführlichere Auskünfte in dieser oder jener Frage erhalten werden können und deren Kenntnis für das Verständnis des Textes nötig ist.

Eine Besonderheit des Buches besteht in dem großen Gewicht, das auf das Experiment gelegt wird. Ich beschränke mich nirgends auf eine zusammengedrängte Formulierung experimenteller Daten, wie dies in den Büchern der theoretischen Physik meist gemacht wird, sondern beschreibe, auf welche Weise diese Daten erhalten werden, und bin stets bestrebt, das Verständnis für die Größenordnungen, mit denen man es zu tun hat, zu wecken.

Eine große Schwierigkeit gilt es bei der Auswahl und Verteilung des Stoffes zu überwinden. Bekanntlich besteht bei den Spezialisten keine einheitliche Meinung darüber, ob die Darstellung der Atomphysik mit der historischen Folge ihrer Entwicklung verbunden sein muß. Bei den Theoretikern ist der Standpunkt ziemlich verbreitet, daß bei der Darstellung der Quantenmechanik von einer historischen Folgerichtigkeit abzusehen und die Darstellung rein logisch, mehr oder weniger dogmatisch aufzubauen ist. Obwohl ich auch nicht dem zustimme, daß in einem Lehrbuch alle Einzelheiten der Entwicklung der Theorie, insbesondere solche, die bereits jedes aktuelle Interesse verloren haben, darzustellen sind, halte ich doch in jedem Falle vom pädagogischen Standpunkt aus einen vollständigen Bruch mit der Geschichte für unrichtig. Deshalb werden auch in dem Abschnitt VI, der sich mit der Strahlung des schwarzen Körpers befaßt, die Gründe für das Versagen der klassischen Physik an der Wende des 19. zum 20. Jahrhundert erklärt; desgleichen gibt der Abschnitt VIII eine kurze Darstellung der Bohrschen Theorie, die immer noch (zusammen mit dem Vektormodell des Atoms) dem Experimentator eine wichtige Stütze bildet, und es wird gezeigt, weshalb sich diese Theorie als unzulänglich erwies. Ich denke, daß nur auf diesem Wege der Leser von der *Unvermeidbarkeit* jenes Bruches mit den üblichen Vorstellungen, zu dem die Quantenmechanik führt, überzeugt werden kann.

Die Darstellung vieler Fragen der Atomphysik erfordert unvermeidlich die Anwendung eines umfangreichen mathematischen Apparates. Dem üblichen Brauch entgegen, die Ausrechnungen wegzulassen, habe ich die mathematischen Ableitungen ziemlich ausführlich gebracht. Dies bedeutet die Notwendigkeit einer oftmaligen Wiederholung ein und derselben Phrase wie beispielsweise „setzen wir ein“ oder „differenzieren wir“ und gibt der Darstellung einen unbeholfenen Charakter. Aber ich denke vor allem an das Interesse des Lesers und sehe deshalb ruhig von einem eleganten Stil ab.

Ich weiß selbst, daß es keine Möglichkeit gibt, alle Ausrechnungen vollständig durchzuführen, was auch vom pädagogischen Standpunkt falsch wäre. Eine genügende Menge Arbeit bleibt noch dem Leser überlassen, aber der Student in höheren Semestern hat schon genügend Erfahrung mit dem Studium ähnlicher Bücher und weiß, daß mit dem Bleistift in der Hand gelesen werden muß. Es ist übrigens

gut bekannt, daß für den Anfänger die Hauptschwierigkeit beim Studium der Quantenphysik nicht in der Mathematik, sondern im Wesen des Gegenstandes selbst liegt: in der Eigentümlichkeit der Gesetze der Erscheinungen, die in den atomaren Bereichen herrschen, in ihrer Ungewöhnlichkeit und in dem Mangel an Anschaulichkeit. Ich bin bestrebt, dem Leser durch die Betrachtung konkreter Beispiele, Illustrationen und Zahlenangaben zu helfen, und scheue keine Mühe, der Darstellung eine größtmögliche Klarheit zu geben, wenn dies durch das Wesen der Dinge und meine eigene Fähigkeit gestattet wird.

Ich bin weit von dem Gedanken entfernt, daß es mir gelungen wäre, alle didaktischen, logischen und mathematischen Schwierigkeiten zu überwinden, Schwierigkeiten, die noch bedeutend durch die Neuheit des Gegenstandes und durch das Fehlen schon bewährter, gesunder pädagogischer Traditionen vertieft werden. Für alle Hinweise bezüglich gewünschter Verbesserungen werde ich deshalb sehr dankbar sein.

Moskau, 1944 E. SCHPOLSKI

I. DAS ELEKTRON, SEINE LADUNG UND MASSE

§ 1. Die Entdeckung des Elektrons

Die Entdeckung der diskreten Struktur der elektrischen Ladungen war eine Folgerung aus den FARADAYschen Gesetzen der Elektrolyse. Betrachten wir die zu dieser Entdeckung führenden Überlegungen.

Bei dem Durchgang derselben Elektrizitätsmenge durch verschiedene Elektrolyte folgt aus den FARADAYschen Gesetzen, daß die aus einwertigen Ionenlösungen ausgeschiedenen Gewichtsmengen den Atomgewichten der Ionen proportional sind. Ist die Elektrizitätsmenge gerade so groß, daß sie ein Grammatom der bestimmten Ionen ausscheidet (d. h. die Anzahl von Grammen, die gleich seinem Atomgewicht ist, beispielsweise 107,88 g Silber, 35,45 g Chlor usw.), so wird sie aus einem beliebigen anderen, einwertige Ionen enthaltenden Elektrolyten ebenfalls ein Grammatom der Ionen ausscheiden. Da in einem Elektrolyten der elektrische Strom durch die Ionenbewegung bedingt wird, so können wir die festgestellte Tatsache in der Form formulieren, daß ein Grammatom beliebiger einwertiger Ionen stets ein und dieselbe Elektrizitätsmenge mit sich führt, und zwar unabhängig von der Natur dieser Ionen. Diese durch die FARADAYsche Zahl F gekennzeichnete Elektrizitätsmenge beträgt 96491 Coulomb pro Grammäquivalent oder $2{,}892 \cdot 10^{14}$ absolute elektrostatische Einheiten pro Grammäquivalent. Beim Durchgang des Stromes durch Lösungen zweiwertiger Ionen zeigt sich, daß eine FARADAYsche Ladung ein halbes Grammatom der zweiwertigen Ionen befördert und in dreiwertigen Elektrolyten nur ein drittel Grammatom. Ein Grammatom zweiwertiger Ionen führt also die doppelte FARADAYsche Ladung mit sich, und ein Grammatom dreiwertiger Ionen befördert die dreifache FARADAYsche Ladung. Da andererseits nach dem AVOGADROschen Gesetz ein Grammatom eines beliebigen Materials immer ein und dieselbe Teilchenzahl N enthält und sich die gesamte von einem Grammatom transportierte Ladung gleichmäßig auf jedes dieser N-Teilchen verteilt, wird die von jedem einwertigen Ion übertragbare Ladung eine wohldefinierte Größe e haben, nämlich

$$e = \frac{F}{N}; \tag{1,1}$$

die Ladung, die von jedem zweiwertigen Ion mitführbar ist, wird dann

$$2e = \frac{2F}{N},$$

allgemein bei z-wertigen Ionen

$$ze = \frac{zF}{N}.$$

Wir sehen, daß Ionen die Ladungen e, $2e$, $3e$, ... mit sich führen können, daß sich aber keine Ionen mit den Ladungen $1{,}5e$ oder $2{,}5e$ finden lassen. Hieraus folgt der Schluß, den HELMHOLTZ in einer zu Ehren FARADAYS gehaltenen Rede mit besonderer Klarheit formulierte: „Wenn wir Atome der chemischen Elemente annehmen, so können wir nicht umhin, weiter zu schließen, daß auch die Elektrizität positiv sowohl wie negativ in bestimmte elementare Quanta geteilt ist, die sich wie Atome der Elektrizität verhalten."[1])

Eine wesentliche Rolle bei der Erkenntnis der atomistischen Natur der Elektrizität spielte der Elektrizitätsdurchgang durch Gase. Im besonderen zeigten die Erforschung der Entladung in verdünnten Gasen und die hierbei entstehenden Kathodenstrahlen, daß die Atome der negativen Elektrizität oft in einem freien, nicht an die üblichen Atome der Stoffe gebundenen Zustand auftreten können. Von diesen Atomen negativer Elektrizität leitet sich die Bezeichnung Elektronen historisch ab.

§ 2. Bestimmung der Elektronenladung

Die Bestimmung der mittleren Ladung eines Gasions wurde zuerst von J. J. THOMSON durchgeführt. Den direkten Beweis für die Existenz von elektrischen Elementarquanten und die ersten genauen Bestimmungen der Ladungsgröße des Elektrons erbrachte MILLIKAN im Jahre 1911 durch die Auffindung der Ladungen einzelner Teilchen. Die Ladungsbestimmung der durch Lichtwirkung ausgelösten Elektronen (Photoeffekt) wurde im Jahre 1912 von A. F. JOFFE auf eine der Methode MILLIKANS analoge Art durchgeführt.

Die experimentelle Methode nach MILLIKAN beruht auf der unmittelbaren Messung der Ladung sehr kleiner Öltröpfchen. Stellen wir uns ein solches Tröpfchen zwischen den Platten eines horizontal angeordneten Kondensators vor. Existiert zwischen den Platten des Kondensators kein Feld, so wird das Tröpfchen frei fallen. Infolge der kleinen Abmessungen des Tröpfchens wird es gleichmäßig fallen, denn sein Gewicht mg hält der Widerstandskraft der Luft die Waage. Sie ist nach dem STOKESschen Gesetz gleich

$$F = 6\pi\eta a v_g , \tag{2,1}$$

worin v_g die Fallgeschwindigkeit, η der Koeffizient der inneren Luftreibung und a der Radius des Tröpfchens sind. Die Bedingung

$$mg = 6\pi\eta a v_g \tag{2,2}$$

gibt die Möglichkeit, den Tröpfchenradius auszurechnen. Bezeichnen wir die Dichte des Tröpfchenmaterials mit σ und die Dichte der Luft mit ϱ, beachten wir ferner, daß nach dem Gesetz von ARCHIMEDES auf die mit dem Gewicht $mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma g$ in Luft frei fallende Kugel noch eine nach oben gerichtete Kraft $\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho g$ wirkt, dann können wir die Gleichung (2,2) umschreiben in die Form

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (\sigma - \varrho)\, g = 6\pi\eta a v_g ,$$

[1]) Vortrag „Die neue Entwicklung von Forschungsideen über Elektrizität". HELMHOLTZ zu FARADAYS Gedächtnis, Chem. Gesellschaft, London 1881.

woraus

$$a = 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta \cdot v_g}{2(\sigma - \varrho) \cdot g}} \tag{2,3}$$

folgt.

Wir stellen uns nun vor, daß an die Kondensatorplatten eine Potentialdifferenz von solcher Größe und Richtung gelegt ist, daß das Tröpfchen unter der Wirkung des elektrischen Feldes nach oben gehoben wird. Bezeichnen wir mit v_E die Steiggeschwindigkeit, die wie im Erdfeld gleichförmig ist, so können wir schreiben

$$|\mathfrak{E}|e - mg = 6\pi\eta a v_E, \tag{2,4}$$

worin $\mathfrak{E}$ die Feldstärke im Innern des Kondensators darstellt. Aus (2,2) und (2,4) erhalten wir

$$e = \frac{6\pi\eta a}{|\mathfrak{E}|}(v_g + v_E)$$

oder, wenn wir den der unmittelbaren Messung unzugänglichen Tröpfchenradius a durch den Ausdruck (2,3) ersetzen,

$$e = \frac{18\pi}{|\mathfrak{E}|} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3}{2g(\sigma - \varrho)}}\,(v_g + v_E) \cdot \sqrt{v_g}\,. \tag{2,5}$$

Durch Ionisierung der Luft zwischen den Kondensatorplatten (beispielsweise mit Hilfe von Röntgenstrahlen) ist eine Änderung der Tröpfchenladung möglich. Bleibt hierbei die Größe der Feldstärke konstant, so ändert sich die Geschwindigkeit des Tröpfchens und wird gleich v_E', und es gilt

$$e_1 = \frac{18\pi}{|\mathfrak{E}|} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3}{2g(\sigma - \varrho)}}\,(v_g + v_E') \cdot \sqrt{v_g}\,.$$

Kombinieren wir diesen Ausdruck mit (2,5), so finden wir

$$\Delta e = e - e_1 = \frac{18\pi}{|\mathfrak{E}|} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3}{2g(\sigma - \varrho)}}\,(v_E - v_E') \cdot \sqrt{v_g}\,. \tag{2,6}$$

Bei wiederholter Änderung der Ladung ist es möglich, mit demselben Tröpfchen eine große Anzahl von Messungen auszuführen.

§ 3. Der Versuch von MILLIKAN

Die sorgfältig geschliffenen Kondensatorplatten P_1 und P_2 werden mit Hilfe der isolierenden Zwischenstücke I (Abb. 1) genau parallel zueinander auf bestimmten Abstand gehalten. Die obere Platte P_1 hat in der Mitte die Öffnung O, durch welche die im Zylinder C mit Hilfe eines Zerstäubers erhaltenen Öltröpfchen in das Innere des Kondensators fallen. Da die sich bei der Zerstäubung von Flüssigkeiten bildenden Tröpfchen eine elektrische Ladung erhalten, fallen bereits geladene Tröpfchen in das Innere des Kondensators. Die Tröpfchen werden durch das Fenster F_1 mit einem gewöhnlichen Lichtbogen beleuchtet

und durch das Fenster F_3 mit Hilfe eines Mikroskops beobachtet. Da dies senkrecht zum beleuchtenden Lichtbündel geschieht, erscheint das ausgewählte Tröpfchen im Gesichtsfeld des Mikroskops als heller Punkt auf dunklem Grund (wie beim Ultramikroskop). Das Fenster F_2 dient zum Austritt des Lichtbündels, da sonst das von den Kammerwänden absorbierte Licht im Innern der Kammer eine ungleichmäßige Erwärmung und einen Luftstrom hervorrufen würde, welche die Beobachtungen stören würden. Durch dasselbe Fenster F_2 können auch die zur Ionisierung der Luft benutzten Röntgenstrahlen, mit deren Hilfe die Tröpfchenladung geändert werden soll, in das Innere der Kammer eintreten. Das genaue Schema der Versuchsanordnung MILLIKANS wird in der Abb. 2 dargestellt.

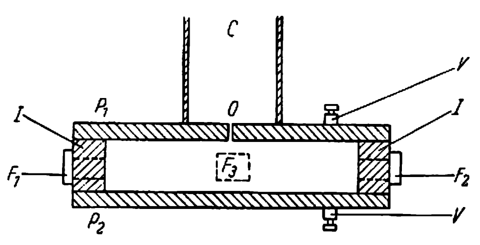


Abb. 1. MILLIKANscher Kondensator

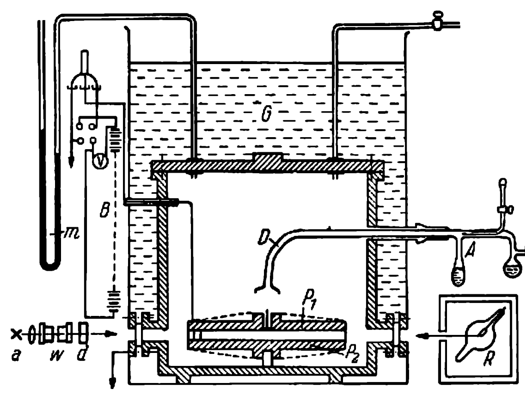


Abb. 2. Die MILLIKANsche Versuchsanordnung: a = Lichtquelle; w, d = Filter zur Absorption der Wärmestrahlung; P_1, P_2 = Kondensator; AD = Zerstäuber für die Bildung der Öltröpfchen; G = Ölbehälter (Thermostat); B = Batterie; m = Manometer; R = Röntgenrohr

Die Fall- und die Steiggeschwindigkeit des Tröpfchens werden durch die Bestimmung der Zeit gemessen, die das Tröpfchen für den Durchgang zwischen zwei in der Brennebene des Mikroskops angeordneten Fäden benötigt. Als Maß für diese Geschwindigkeit gilt der reziproke Wert dieser Zeit. In der Tabelle I sind einige solcher Messungen angegeben. Nach der Gleichung (2,6) muß bei einer Umladung die Änderung der Ladung proportional der Geschwindigkeitsdifferenz $v_E - v'_E$ sein. Erweist sich diese Differenz als ein ganzes Vielfaches ein und derselben Größe, so kann behauptet werden, daß die Änderung der Ladung nicht kontinuierlich, sondern in endlichen gleichen Sprüngen stattfindet. Die vierte und fünfte Spalte der Tabelle zeigen, daß dies in der Tat so ist, denn mit einer Genauigkeit von einigen Einheiten in der fünften Stelle ändert sich die Ladung um 6, 7, 1, . . . Einheiten, wobei die Einheit der Umladung selbst (fünfte Spalte der Tabelle) einen genügend konstanten Wert besitzt.

Die Formel (2,5) zeigt, daß die absolute Größe der Tröpfchenladung proportional der Summe $v_g + v_E$ sein muß (sechste Spalte der Tabelle).

Erweisen sich diese Summen als Vielfache ein und derselben Größe, so bedeutet dies, daß sich die Ladung aus diskreten Einheiten zusammensetzt. Wie die siebente und achte Spalte zeigen, trifft dies tatsächlich zu. Aus dem Vergleich der fünften und achten Spalte ist ersichtlich, daß die Einheit der Umladung und die Ladungseinheit wiederum mit einer Genauigkeit von 10^{-5} übereinstimmen. Die Analyse der Tabelle gibt also einen vollständigen und unmittelbaren Beweis für

die quantenhafte Natur der elektrischen Ladung, einen Beweis für die Atomistik der elektrischen Erscheinungen.

Zur genauen Bestimmung der absoluten Ladungsgröße eines Elektrons ist es notwendig, die mit Hilfe der Formel (2,5) erhaltenen Zahlen einer wesentlichen

Tabelle I

Steigzeit im elektrischen Feld	Reziproke Steigzeit im elektrischen Feld	Differenz der rezipr. Steigzeiten nach der Umladung	Zahl der Umladungen	Relative Größe der Umladungseinheit	Summe der reziproken Fall- und Steigzeiten	Zahl der Ladungseinheiten	Relative Größe der Ladungseinheit
t_E in s	$\frac{1}{t_E}$	$\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E}$	n'	$\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{t_E} - \frac{1}{t'_E}\right)$	$\frac{1}{t_g{}^{*})} + \frac{1}{t_E}$	n $\pm n'$	$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_E}\right)$
1	2	3	4	5	6	7	8
80,708	0,01236				0,09655	18	0,005366
		0,03234	6	0,005390		+ 6	
22,375	0,04470				0,12887	24	0,005371
		0,03751	7	0,005358		— 7	
140,565	0,00719				0,09138	17	0,005375
		0,005348	1	0,005348		+ 1	
79,600	0,01254				0,09673	18	0,005374
		0,01616	3	0,005387		+ 3	
34,785	0,02870				0,11289	21	0,005376

Korrektur zu unterziehen. Es zeigte sich bei der Ladungsbestimmung von Tröpfchen verschiedenen Durchmessers, daß bei kleinerem Durchmesser anfangs konstante Werte e erhalten werden, daß diese aber bei sehr kleinen Tröpfchen schnell anwachsen. Es ergab sich also, daß die Ladung des Elektrons nicht einen konstanten Wert hat, sondern von den Abmessungen des Tröpfchens abhängen kann.

MILLIKAN erklärte dieses offensichtlich widersinnige Resultat dadurch, daß das Gesetz von STOKES nicht auf die Bewegung sehr kleiner Tröpfchen angewandt werden kann. Tatsächlich drückt sich in diesem Gesetz die Vorstellung aus, daß der sich bewegende Körper die Gestalt einer Kugel hat und daß das Medium, in dem sich die Bewegung vollzieht, kontinuierlich ist. Die letztere Forderung ist nicht erfüllt, wenn bei der Bewegung im Gas die Abmessungen des Tröpfchens mit der mittleren freien Weglänge der Gasmoleküle vergleichbar werden. Auf diese Weise kann das Verhältnis der mittleren freien Weglänge zum Radius des Tröpfchens $\frac{\lambda}{a}$ als Kriterium für die Anwendbarkeit des STOKESschen Gesetzes dienen: ist dieses Verhältnis klein $\left(\frac{\lambda}{a} < 1\right)$, so ist das Gesetz gültig, im entgegengesetzten Falle kann es nicht angewandt werden.

Um die Abweichung vom STOKESschen Gesetz für sehr kleine Tröpfchen zu berechnen, wurde vorgeschlagen, an Stelle der Formel (2,1) den folgenden korrigierten Ausdruck für die STOKESsche Kraft anzuwenden:

$$F = \frac{6\pi\eta a v_g}{1 + A\frac{\lambda}{a}}, \qquad (3,1)$$

worin A irgendeine Konstante bedeutet. Dieser Ausdruck geht für $A\frac{\lambda}{a} \to 0$

*) Mittlere Fallzeit im Gravitationsfeld: $t_g = 11,880$ s.

in die STOKESsche Formel (2,1) über. Mit Hilfe dieser korrigierten Formel erhalten wir für die absolute Größe der Ladung an Stelle von Gl. (2,5) den folgenden Ausdruck:

$$e_0 = \frac{18\pi}{|\mathfrak{E}|} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3}{2g(\sigma-\varrho)}}\,(v_E + v_g) \cdot \sqrt{v_g} \cdot \left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right)^{-3/2}. \tag{3,2}$$

Um den absoluten Wert der Ladung nach dieser Formel zu finden, muß die Konstante A bekannt sein. MILLIKAN zeigte jedoch, auf welche Weise die wahre Größe der Ladung ohne Bestimmung dieser Konstanten A gefunden werden kann.

Aus der Gegenüberstellung der Formeln (2,5) und (3,2) ist leicht die Beziehung der Größe e_0 zu der ohne Korrektur ausgerechneten Ladung zu finden:

$$\frac{e_0}{e} = \frac{1}{\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right)^{3/2}}$$

oder

$$e_0^{2/3}\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right) = e^{2/3}.$$

Da die freie Weglänge λ dem Gasdruck p umgekehrt proportional ist, folgt

$$e_0^{2/3}\left(1 + \frac{B}{pa}\right) = e^{2/3}, \tag{3,3}$$

worin B eine neue Konstante bedeutet.

Wird der Druck p verändert und für jeden Wert des Druckes die auftretende Größe der Ladung (ohne Korrektur) ausgerechnet, so besteht nach Formel (3,3) zwischen $e^{2/3}$ und $1/pa$ ein linearer Zusammenhang.

Da das Glied B/pa in der Formel (3,3) nur die Rolle einer kleinen Korrektur spielt, so ist es möglich, als Tröpfchenradius a eine nach der nichtkorrigierten STOKESschen Formel (siehe Formel (2,3)) ausgerechnete Größe zu nehmen. Nach den Messungen MILLIKANS ist die Konstante B gleich

$$B = 6{,}17 \cdot 10^{-3}\ \text{Torr} \cdot \text{cm}.$$

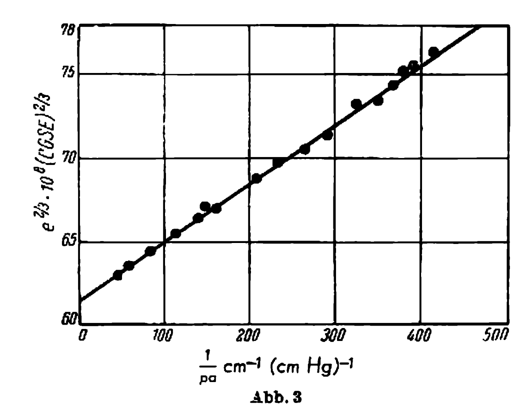


Abb. 3

Die Abb. 3, in welcher auf der Abszisse die Werte $1/pa$ und auf der Ordinate $e^{2/3} \cdot 10^8$ aufgetragen sind, zeigt, daß die von der Formel (3,3) geforderte lineare Abhängigkeit tatsächlich besteht. Geht in der Formel (3,3) $1/p \to 0$ oder $a \to \infty$, d. h. wird zum Grenzfall übergegangen, in dem das STOKESsche Gesetz nicht korrigiert werden muß (der Teilchenradius ist unendlich groß im Vergleich zu der mittleren freien Weglänge), dann finden wir $e^{2/3} = e_0^{2/3}$ oder $e = e_0$. Auf diese Weise genügt es zur Auffindung des wahren Ladungswertes e_0 eines Elektrons, die Gerade bis zu ihrem Schnittpunkt mit der Ordinatenachse zu extrapolieren.

In der Abb. 4 sind vier auf die gleiche Art für verschiedene Teilchen erhaltene Geraden angegeben: I ist die Gerade für ein Öltröpfchen in Luft, II die für ein Öltröpfchen in Wasserstoff, III die für ein Quecksilbertröpfchen in Luft, IV die für ein Schellacktröpfchen in Luft. Alle vier Geraden schneiden die Ordinatenachse in einem Punkt: die Ladung hängt also weder von der Natur des Teilchens selbst noch von der Natur des Gases, d. h. der umgebenden Teilchen, ab.

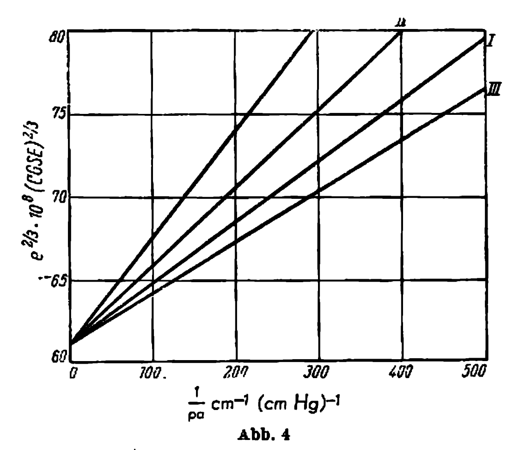


Abb. 4

Die Versuche MILLIKANS haben großen prinzipiellen Wert, da sie die atomistische Natur der elektrischen Ladung beweisen. Vor kurzem wurde auch der aus diesen Versuchen erhaltene absolute Wert der Elektronenladung $e = 4{,}770 \cdot 10^{-10}$ CGSE genauer bestimmt. Vollkommen unerwartet zeigte sich ein systematischer Fehler. Die zwar indirekte, aber überaus genaue Bestimmung von e durch die absolute Messung der Wellenlängen von Röntgenstrahlen (§§ 38–39) ergab eine Größe für die elektrische Elementarladung, die sich merklich von der von MILLIKAN aufgefundenen unterscheidet. Nach einigem Suchen wurde festgestellt, daß die von ihm benutzte Größe für den inneren Reibungskoeffizienten für Luft $\eta = 1822{,}6 \cdot 10^{-7}$ Poise zu klein war. Eine Reihe sehr genauer Bestimmungen dieser Größe, die in den letzten Jahren (1936–1940) ausgeführt wurden, ergab für sie in allen Fällen eine Zahl, die die von MILLIKAN angenommene übersteigt. Für den Mittelwert dieser neuen Bestimmungen wird $\eta = 1832 \cdot 10^{-7}$ Poise und ergibt eingesetzt die Größe $e = 4{,}805 \cdot 10^{-10}$ CGSE. In bezug auf den genaueren Wert e siehe weiter § 39.

Übungen: 1. Welche Potentialdifferenz muß an die im Abstand von 5 mm liegenden Kondensatorplatten gelegt werden, um ein 5 Elektronenladungen tragendes Öltröpfchen im Gleichgewicht zu halten? Die Masse des Tröpfchens ist gleich $3{,}119 \cdot 10^{-13}$ g. (Antwort: 19,2 V.)

2. Es ist die Fallgeschwindigkeit eines Öltröpfchens der Dichte 0,98 g cm^{-3} mit dem Radius 10^{-4} cm in Luft bei dem Druck von 760 mm Hg-Säule auszurechnen. Die Viskosität der Luft beträgt bei 25° C 0,0001832 Poise. (Antwort: 0,0117 cm/s.)

3. Die Potentialdifferenz von 31,5 V, die an die im Abstand von 1 cm befindlichen Kondensatorplatten gelegt ist, zwingt ein geladenes Öltröpfchen, sich mit einer Geschwindigkeit von 10 Teilstrichen in 10 s (50 Teilstriche = 1 mm) aufwärts zu bewegen. Die Fallgeschwindigkeit unter Wirkung der Schwerkraft beträgt 10 Teilstriche in 100 s. Die Viskosität der Luft ist 0,00018 Poise. Die Dichte des Tröpfchens ist 0,9 g cm^{-3}. Der Luftdruck beträgt 760 mm Hg-Säule. Wieviel Elektronen trägt das Tröpfchen? (Antwort: 1 Elektron.)

§ 4. Die Bewegung des Elektrons in elektrischen und magnetischen Feldern

Neben der Ladung erscheint die Masse des Elektrons als eine grundlegende, charakteristische Konstante. Daß die Masse sehr klein ist, folgt schon aus den Beobachtungen im Kondensator MILLIKANS, bei welchen der Verlust oder die Hinzufügung einiger Elektronen bei der Umladung keinen merklichen Einfluß auf die Fallgeschwindigkeit des Teilchens zeigt, obgleich nach der Formel (2,2) die Geschwindigkeit des gleichförmigen Falls der Masse proportional ist. Das Vorhandensein einer trägen Elektronenmasse zeigt sich aber in allen Fällen, in denen dem Elektron unter Wirkung eines elektrischen oder magnetischen Feldes eine Beschleunigung erteilt wird. Daher sind alle Methoden der Massenbestimmung eines Elektrons auf das Studium seiner Bewegung in elektrischen und magnetischen Feldern begründet, und unsere nächste Aufgabe wird die Betrachtung des Einflusses magnetischer oder elektrischer Felder auf die Bewegung des Elektrons sein.

Bekanntlich wird die von einem elektromagnetischen Feld auf ein Teilchen mit der Ladung e wirkende Kraft (die sogenannte LORENTZ-Kraft) durch die Formel

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{4,1}$$

ausgedrückt. Hier stellt das erste Glied die von dem elektrischen Feld und das zweite Glied die von dem magnetischen Feld wirkende Kraft dar.[1]) Wir nehmen an, daß die Ladung e in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt wird. Die weiteren Betrachtungen führen wir für das positiv geladene Teilchen durch; sie sind analog auf die Bewegung des negativ geladenen Teilchens anwendbar. Wir müssen uns bei der Betrachtung eines Elektrons nur stets daran erinnern, daß es eine negative Ladung trägt und die Richtung seiner Ablenkung stets der Ablenkungsrichtung des positiv geladenen Teilchens entgegengesetzt sein wird.

Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist die Kraft $\mathfrak{F}$ gleich dem Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$:

$$\mathfrak{F} = m\dot{\mathfrak{v}}. \tag{4,1'}$$

Setzen wir die rechten Seiten von (4,1) und (4,1') gleich, so erhalten wir:

$$m\dot{\mathfrak{v}} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{4,2}$$

Betrachten wir jetzt im einzelnen die Wirkung des elektrischen und des magnetischen Feldes. Wird in (4,2) $\mathfrak{E} = 0$ angenommen, so erhalten wir:

$$m\dot{\mathfrak{v}} = \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{4,3}$$

Sehr oft wird bei der Betrachtung der Bewegung einer Ladung im magnetischen Feld das elektromagnetische Maßsystem benutzt. (4,3) nimmt dann die Form

$$m\dot{\mathfrak{v}} = e[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

---

[1]) Im weiteren werden wir das zweite, auf das magnetische Feld sich beziehende Glied der Formel (4,1) als LORENTZ-Kraft bezeichnen.

an, und weiter

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{e}{m}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{4,4}$$

Da die von seiten des magnetischen Feldes wirkende Kraft durch ein Vektorprodukt ausgedrückt wird, bilden die drei Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{F}$ ein Rechtssystem (Abb. 5).

Die Vektorgleichung (4,4) ist den folgenden drei skalaren Gleichungen äquivalent:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m}(v_y|\mathfrak{H}_z| - v_z|\mathfrak{H}_y|), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m}(v_z|\mathfrak{H}_x| - v_x|\mathfrak{H}_z|), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m}(v_x|\mathfrak{H}_y| - v_y|\mathfrak{H}_x|). \end{aligned}\right\} \tag{4,4'}$$

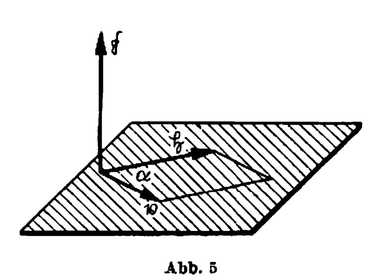


Abb. 5

Die Integration dieses Systems von Gleichungen stellt in fast allen Fällen eine schwierige mathematische Aufgabe dar. Für einige Spezialfälle ist ihre Lösung von S. A. Boguslawski gegeben worden. Wir betrachten den einfachsten Fall, dessen Bedingungen den üblichen Laboratoriumsexperimenten entsprechen, und werden uns nicht mit der Ausrechnung der Flugbahnen, sondern nur mit der Größe der Ablenkung eines parallelen Bündels geladener Teilchen im magnetischen Feld beschäftigen. Nehmen wir an, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit des Teilchens die Richtung der x-Achse hat, d. h., bei $t = 0$ ist $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Für das magnetische Feld nehmen wir an, daß es zeitlich konstant ist und die Richtung der y-Achse hat, sonst aber heterogen ist, d. h. als Funktion $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(x)$ geschrieben werden kann. Damit ist $|\mathfrak{H}_x| = |\mathfrak{H}_z| = 0$ und $|\mathfrak{H}_y| = |\mathfrak{H}|(x) = |\mathfrak{H}|$. Nehmen wir an, daß das Feld in dem Abschnitt $OA = x$ wirkt (Abb. 6) und daß in der Entfernung $l = OB + OA$ ein fluoreszierender Schirm angeordnet ist, auf welchem die Ablenkung dargestellt wird. Da das Feld überall parallel zur y-Achse verläuft, so ist die Kraftkomponente $F_y = e(v_z|\mathfrak{H}_x| - v_x|\mathfrak{H}_z|)$ gleich null, und die Bewegung findet in der xz-Ebene statt. Da nur die Ablenkung des Teilchens und nicht seine Flugbahn interessiert, benutzen wir nur die dritte der Gleichungen (4,4'). Ist die Ablenkung nur klein, so ist für den Weg mit einer Genauigkeit bis zu Größen zweiter Ordnung $v = v_x = \frac{dx}{dt}$ anzunehmen; denn tatsächlich ist

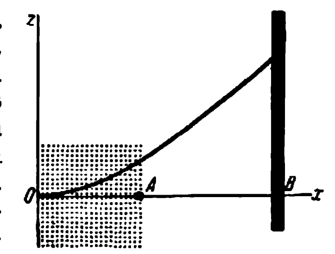


Abb. 6. Positiv geladenes Teilchen im Magnetfeld

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = v_x\left[1 + \left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2\right]^{1/2} = v_x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2 + \cdots\right] \approx v_x.$$

Die uns interessierende dritte Gleichung (4,4') ergibt offensichtlich

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}\frac{dx}{dt}|\mathfrak{H}|, \tag{4,5}$$

da das zweite Glied rechts gleich null ist. Beachten wir weiter, daß $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$,

so können wir (4,5) umschreiben in

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{e}{m}\frac{dx}{dt}|\mathfrak{H}|.$$

Kürzen wir und ersetzen wieder $\frac{dx}{dt}$ durch v, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{e}{mv}|\mathfrak{H}|.$$

Hieraus finden wir die uns interessierende Ablenkung z durch zweifache Integration. Die erste Integration über die Grenzen von 0 bis x ergibt

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e}{mv}\int\limits_0^x|\mathfrak{H}|\,dx.$$

Die zweite Integration von 0 bis l (Entfernung vom Anfang des Feldes bis zum Schirm) gibt

$$z=\frac{e}{mv}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^x|\mathfrak{H}|\,dx.$$

Wird $u=\int\limits_0^x|\mathfrak{H}|\,dx$ und $dv=dx$ gesetzt, dann erhalten wir durch partielle Integration

$$z=\frac{e}{mv}\left\{l\int\limits_0^l|\mathfrak{H}|\,dx-\int\limits_0^x x\,l\,dx\right\}=\frac{e}{mv}\int\limits_0^l|\mathfrak{H}|\,(l-x)\,dx. \tag{4,6}$$

In dieser Formel stellt das Integral

$$A=\int\limits_0^l|\mathfrak{H}|\,(l-x)\,dx \tag{4,7}$$

offensichtlich eine Konstante des Gerätes dar, da sein Wert allein von der Feldstärke $\mathfrak{H}(x)$, seiner Ausdehnung x und der Entfernung l vom Ort des Elektroneneintritts bis zum Schirm abhängt. Benutzen wir die Bezeichnung (4,7), so finden wir

$$z=A\frac{e}{mv}. \tag{4,8}$$

Ist das Feld homogen ($\mathfrak{H}=\text{const}$) in dem Intervall von $x=0$ bis $x=a$, aber in dem Intervall von $x=a$ bis $x=l$ null, dann ergibt sich insbesondere

$$A=a\left(l-\frac{a}{2}\right)|\mathfrak{H}|.$$

Wird der Schirm dicht an den Enden der Magnetpole angeordnet, dann wird $l=a$ und

$$A=\frac{a^2}{2}|\mathfrak{H}|.$$

In einem homogenen, senkrecht zur Geschwindigkeit gerichteten Felde wird die Flugbahn des Teilchens leicht gefunden. Da die LORENTZ-Kraft stets senkrecht

zu $\mathfrak{v}$ steht, ändert sie nur die Richtung der Geschwindigkeit, aber nicht ihre Größe; deshalb wird sich das Elektron auf einer Kreisbahn bewegen, deren Radius ϱ durch Gleichsetzen der LORENTZ-Kraft mit der Zentrifugalkraft gefunden wird:

$$e v |\mathfrak{H}| = \frac{m v^2}{\varrho};$$

daraus folgt

$$\varrho = \frac{m v}{e} \cdot \frac{1}{|\mathfrak{H}|}. \tag{4,9}$$

Wir berechnen jetzt die Ablenkung eines geladenen Teilchens in einem senkrechten, elektrostatischen Felde. Wie früher möge die Geschwindigkeit des Teilchens im Augenblick seines Eintrittes in den Raum zwischen den Kondensatorplatten in der x-Achse liegen, während das Feld des Kondensators in der z-Achse verläuft. Alle übrigen Bedingungen sind unverändert beibehalten (Abb. 7). Da $\mathfrak{H} = 0$, so ergibt (4,2) die Formel

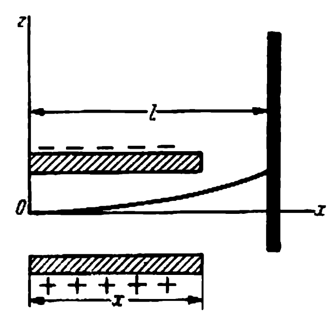


Abb. 7. Positiv geladenes Teilchen im elektrostatischen Feld

$$m \dot{\mathfrak{v}} = e \mathfrak{E}.$$

Beachten wir, daß $|\mathfrak{E}_x| = |\mathfrak{E}_y| = 0$, $|\mathfrak{E}_z| = |\mathfrak{E}|$, dann erhalten wir die folgenden drei skalaren Gleichungen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \qquad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \qquad m \frac{d^2 z}{dt^2} = e |\mathfrak{E}|.$$

Bei kleinen Ablenkungen kann wieder angenähert angenommen werden, daß während der ganzen Zeit $v = \frac{dx}{dt}$ und für die Ausrechnung der Ablenkung allein die dritte Gleichung

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = e |\mathfrak{E}| \tag{4,10}$$

benutzt werden kann. Bedenken wir, daß

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} = v^2 \frac{d^2 z}{dx^2},$$

so können wir Gleichung (4,10) umschreiben in:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{e}{m v^2} |\mathfrak{E}|.$$

Eine zweimalige Integration ergibt

$$z = \frac{e}{m v^2} \int_0^l dx \int_0^x |\mathfrak{E}| dx = \frac{e}{m v^2} \int_0^l (l - x) |\mathfrak{E}| dx.$$

Bezeichnen wir $\int_0^l (l - x) |\mathfrak{E}| dx$ mit B (wobei B wie schon die früher eingeführte Konstante A eine Apparatekonstante darstellt), dann ergibt sich:

$$z = \frac{e}{m v^2} B. \tag{4,11}$$

Ist insbesondere die Plattenlänge des Kondensators gleich b und das Feld homogen ($|\mathfrak{E}| = \text{const}$), so ergibt die unmittelbare Integration

$$B = b\left(l - \frac{b}{2}\right)|\mathfrak{E}|$$

oder bei $l = b$

$$B = \frac{b^2}{2}|\mathfrak{E}|. \tag{4,12}$$

§ 5. Das Elektron in einem elektrostatischen Längsfeld

Betrachten wir nun die Bewegung eines Elektrons in einem mit der Bewegungsrichtung übereinstimmenden elektrostatischen Feld. Fällt diese Richtung mit der x-Achse zusammen, dann ist $|\mathfrak{E}_x| = |\mathfrak{E}|$, $|\mathfrak{E}_y| = |\mathfrak{E}_z| = 0$. Setzen wir für $\frac{dx}{dt} = v$ und schreiben die skalare Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = e|\mathfrak{E}| \tag{5,1}$$

um in

$$m\frac{dv}{dt} = e|\mathfrak{E}|. \tag{5,1'}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (5,1') mit v und bedenken, daß $v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$, dann ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = e|\mathfrak{E}|v. \tag{5,2}$$

Bezeichnen wir das Potential des elektrischen Feldes mit φ, so wird

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}_x| = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Dann ist

$$|\mathfrak{E}|v = -\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt},$$

und (5,2) nimmt die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -e\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + e\varphi\right) = 0$$

an, woraus

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = \text{const} \tag{5,3}$$

folgt.

Die Gleichung (5,3) drückt das Gesetz der Energieerhaltung aus, da $e\varphi$ die potentielle Energie der Ladung e in einem Punkt des Feldes mit dem Potential φ darstellt. Wird die Ladung von einem Punkt mit dem Potential φ_1 in einen Punkt mit dem Potential φ_2 überführt und ist $\varphi_1 - \varphi_2 = V$, dann ist

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2) = eV.$$

Bei $v_1 = 0$ und $v_2 = v$ haben wir

$$\frac{mv^2}{2} = eV. \tag{5,4}$$

Da gewöhnlich die Potentialdifferenz in Volt gemessen wird, so ist in diesem Falle

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}. \tag{5,4'}$$

In der Atomphysik wird die Energie meist in Elektronenvolt ausgedrückt. 1 eV ist diejenige Energie, die ein Elektron erhält, wenn es die beschleunigende Potentialdifferenz von 1 V durchläuft. Aus (5,4′) erhalten wir

$$1 \text{ Elektronenvolt} = \frac{4{,}80 \cdot 10^{-10} \cdot 1}{300} = 1{,}60 \cdot 10^{-12} \text{ erg}.$$

Die Energie von 1 eV für $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ Elektronen (1 Mol) ist gleich

$$\begin{aligned} 1 \text{ Elektronenvolt} \cdot \text{Mol}^{-1} &= 9{,}64 \cdot 10^{11} \text{ erg} \cdot \text{Mol}^{-1} \\ &= 2{,}304 \cdot 10^{4} \text{ cal} \cdot \text{Mol}^{-1} \\ &= 23{,}04 \text{ kcal} \cdot \text{Mol}^{-1}. \end{aligned}$$

Ist die in Elektronenvolt ausgedrückte Energie der Elektronen bekannt, so kann aus (5,4′) unmittelbar die Geschwindigkeit v in cm/s ausgerechnet werden:

$$v = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{V}{150}} = 5{,}93 \cdot 10^{7} \sqrt{V} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}. \tag{5,5}$$

§ 6. Die experimentellen Methoden zur Bestimmung der spezifischen Ladung

Die in den vorigen beiden Paragraphen dargestellte Untersuchung der Elektronenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern liegt der experimentellen Bestimmung des Verhältnisses e/m zugrunde.

Es muß stets im Auge behalten werden, daß sowohl im Falle des elektrischen als auch im Falle des magnetischen Feldes die Ablenkung im senkrechten Feld nicht nur vom Verhältnis e/m, sondern auch von v abhängt: die magnetische Ablenkung bestimmt sich durch den Faktor e/mv, die elektrische durch den Faktor e/mv^2. Daher ergibt der Ablenkungsversuch in einem Feld allein noch nicht die Möglichkeit, e/m zu finden.

In den ersten diesbezüglichen Arbeiten hat man die Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern gemessen und aus den beiden Gleichungen (4,8) und (4,11) unmittelbar e/m und v berechnet. Als Elektronenbündel wurden Kathodenstrahlen in verdünnten Gasen (bei Drücken von einigen $^1/_{100}$ mm Hg) benutzt. Die Entwicklung der Vakuumtechnik in den letzten Jahrzehnten erlaubt nun, diese Messungen unter definierteren und besser kontrollierbaren Bedingungen durchzuführen. In Abb. 8 ist das Prinzip eines modernen Gerätes zur Bestimmung von e/m und v dargestellt. In einem bis zur von der modernen Vakuumtechnik erreichbaren Grenze evakuierten Rohr ist eine Glühkathode angeordnet, die eine ergiebige Elektronenquelle darstellt. Diese Elektronen werden durch die Batterie B_1 beschleunigt, deren positiver Pol mit der metallischen Anodenblende A, deren Öffnung sich im Zentrum befindet, verbunden ist. Die durch diese Öffnung hindurchtretenden Elektronen bewegen sich geradlinig weiter und ergeben auf der mit fluoreszierendem Material bedeckten Rohrwandung S einen hellen Fleck, welcher der Anodenöffnung A gegenüberliegt. Auf dem Wege von A bis F durchlaufen

die Elektronen die Kondensatorplatten CD, an welche die Spannung einer Batterie B_2 gelegt werden kann. Wird die Batterie B_2 eingeschaltet, so wird das Elektronenbündel von dem zwischen den Kondensatorplatten entstandenen Feld abgelenkt, und der Leuchtfleck wandert nach dem Punkt F'.

Befindet sich zwischen den Kondensatorplatten noch ein senkrecht zur Zeichenebene gerichtetes magnetisches Feld (in der Zeichnung durch Punkte angedeutet), so kann eine Ablenkung sowohl in der einen als auch in der anderen Richtung hervorgerufen werden. Nach Messung beider Ablenkungen können mit Hilfe der

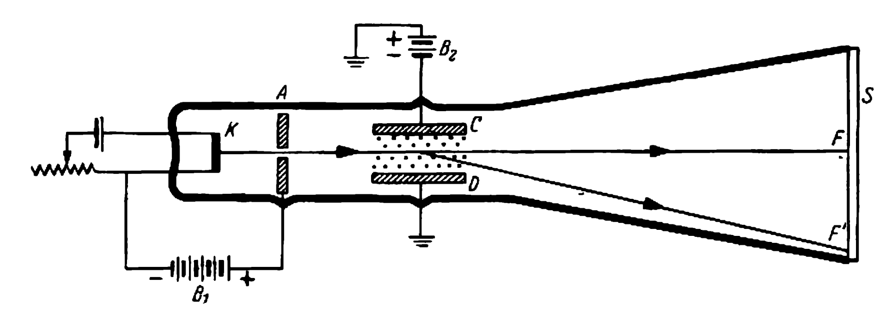


Abb. 8. Schema zur Bestimmung der spezifischen Ladung nach der Ablenkungsmethode im elektrischen und magnetischen Feld

Gleichungen (4,8) und (4,11) e/m und v ausgerechnet werden. Bequemer ist jedoch die Kompensation der anfänglichen elektrostatischen Ablenkung durch das magnetische Feld. In diesem Falle laufen die notwendigen Messungen auf die genaue Intensitätsbestimmung des elektrischen und des magnetischen Feldes hinaus.

Der Vorzug der Vakuumröhren mit Glühkathode gegenüber den alten Methoden, bei denen die Messungen mit Kathodenstrahlen in verdünnten Gasen durchgeführt wurden, besteht darin, daß wir in den Vakuumröhren die Geschwindigkeit der Elektronen verändern können. In Röhren mit verdünnten Gasen werden die Elektronen durch Beschuß mit positiven Ionen aus der Kathode befreit, so daß ihre Geschwindigkeit von der komplizierten Potentialverteilung in verdünnten Gasen abhängt. In Vakuumröhren mit Glühkathode dagegen treten die Elektronen mit sehr kleinen Geschwindigkeiten aus und werden erst durch das Feld der Batterie B_1 beschleunigt. Dadurch hängen die beiden Prozesse – der Austritt der Elektronen und deren Beschleunigung – nicht voneinander ab und unterliegen beide der Kontrolle des Experimentators.

Wie schon oben gesagt, ist die Anfangsgeschwindigkeit der aus der Glühkathode austretenden Elektronen nur klein. So besitzen beispielsweise nur 0,1% aller Elektronen einer als Kathode dienenden Wolframspirale K, die bis auf 2400° K erhitzt wurde, eine Energie von mehr als 1,42 Elektronenvolt, und nur 0,0001% eine 2,85 Elektronenvolt übersteigende Energie. Wenn nun das beschleunigende Feld nicht allzu schwach ist, so können wir mit genügender Genauigkeit die Anfangsgeschwindigkeit der ausgetretenen Elektronen gleich null setzen. Beträgt die Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode (zwischen K und A

der Abb. 8) V Volt, so können wir die Endgeschwindigkeit der Elektronen aus der Gleichung

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300} \qquad (5{,}4')$$

finden. Wir kennen also sofort die Geschwindigkeit der Elektronen, wenn uns V bekannt ist. Hierdurch werden wir der Notwendigkeit enthoben, sowohl die elektrische als auch die magnetische Ablenkung für die Bestimmung von e/m und v zu benutzen. Es genügt die Benutzung entweder des elektrischen oder des magnetischen Feldes, weil die zweite Formel immer durch die Beziehung (5,4′) gegeben ist.

In den folgenden Paragraphen bringen wir aus der großen Anzahl moderner Methoden zur Bestimmung der spezifischen Ladung zwei sehr charakteristische, wobei zuerst ein elektrisches, sodann ein magnetisches Feld benutzt werden.

§ 7. Die Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons mit Hilfe zweier Kondensatoren

Als eine der genauesten Methoden zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses e/m erweist sich ein Experiment mit Hilfe zweier Kondensatoren. Die aus dem Heizfaden F (Abb. 9) austretenden Elektronen werden von dem Feld zwischen der Kathode und der Anode A beschleunigt. Nachdem das Elektronenbündel die Anodenöffnung A und das Diaphragma D_1 durchlaufen hat, tritt es in den

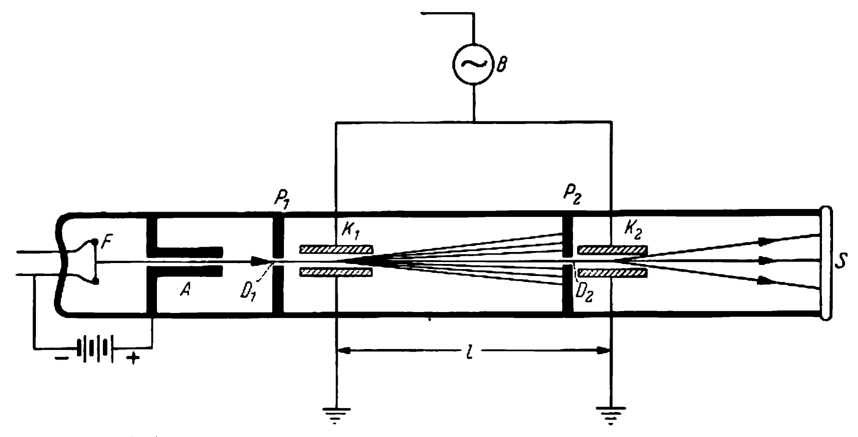


Abb. 9. Methode zur Bestimmung der spezifischen Ladung mit Hilfe zweier Kondensatoren

ersten Kondensator K_1, an welchen die Wechselspannung eines Hochfrequenzgenerators B gelegt ist. Unter der Wirkung dieses Wechselfeldes ändert das Bündel periodisch seine Richtung und wird von der Blende P_2 aufgefangen. Nur jene Elektronen, welche durch den Kondensator in dem Augenblick hindurchlaufen, in dem die Potentialkurve durch null geht, sind auch zum Durchgang durch die kleine Öffnung D_2 in der Blende P_2 befähigt. Diese Elektronen treten daher auch

in den Kondensator K_2, der mit demselben Generator wie K_1 so verbunden ist, daß sich die Felder beider Kondensatoren immer in gleicher Phase befinden. Auf diese Weise treten zweimal im Verlaufe jeder Periode in den Kondensator K_2 Elektronen, deren mehr oder weniger große, nach oben oder unten gerichtete Ablenkung von der Phase des Generators im Augenblick des Elektronendurchganges durch den Kondensator K_2 abhängt. Unschwer können wir uns davon überzeugen, daß es nur zwei symmetrische Richtungen gibt, in welche die Elektronen bei ihrem Durchgang durch den zweiten Kondensator K_2 abgelenkt werden können. Ist beispielsweise die vom Elektron benötigte Zeit, um von dem Kondensator K_1 bis zum Kondensator K_2 zu fliegen, gleich $t_1 = OA$ (Abb. 10), so trifft das eine Elektron im Kondensator K_2 das Potential $AB = + V_1$ an, ein zweites Elektron aber das Potential $A'B' = - V_1$. Aus diesem Grunde erscheinen auf dem fluoreszierenden Schirm S zwei symmetrisch gelegene Flecke.

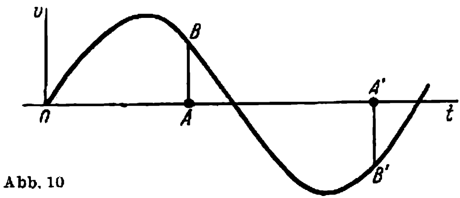


Abb. 10

Durch Variation der Elektronengeschwindigkeit, also Änderung des beschleunigenden Potentials, läßt sich erreichen, daß die Zeit t_1 gleich einer Halbperiode des Generators $T/2$ oder allgemein gleich $nT/2$ wird. Unter dieser Bedingung durchfliegen die Elektronen auch den zweiten Kondensator ohne Ablenkung, und die beiden Flecke auf dem fluoreszierenden Schirm fallen zusammen. Ist die Entfernung zwischen K_1 und K_2 gleich l, die Frequenz des Generators gleich f, so wird die Geschwindigkeit solcher Elektronen $v = \frac{2l}{T} = 2lf$ sein, oder allgemein

$$v = \frac{2l}{nT} = \frac{2lf}{n}. \tag{7,1}$$

Auf der anderen Seite ist

$$eV = \frac{mv^2}{2}, \tag{5,4}$$

worin V das an F und A gelegte Beschleunigungspotential darstellt. Aus (7,1) und (5,4) erhalten wir

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{2f^2l^2}{n^2V}. \tag{7,2}$$

Der große Vorzug dieser Methode mit zwei Kondensatoren besteht darin, daß sie eine sogenannte „Nullmethode“ ist und keine der gewöhnlich mit nur schwer vermeidbaren Fehlern verbundene Messung der Ablenkung benötigt. Die auf diese Weise erhaltene Größe für die spezifische Ladung ist nach Einführung aller Korrekturen gleich[1])

$$\frac{e}{m} = (1{,}7590 \pm 0{,}0015)\, 10^7 \text{ CGSM g}^{-1}.$$

[1]) Aus historischen Gründen drücken wir die spezifische Ladung eines Elektrons e/m in der Einheit CGSM $\cdot$ g^{-1} aus, während die Ladung e gewöhnlich in CGS-Einheiten ausgedrückt wird. Wenn die beiden Größen e und e/m in Formeln in irgendwelcher Kombination auftreten, ist e/m durch e/mc zu ersetzen.

§ 8. Die Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons durch Fokussierung im magnetischen Längsfeld

Eine andere genaue Methode zur Bestimmung von e/m beruht auf der Anwendung eines magnetischen Längsfeldes.

Betrachten wir vor allem die Wirkung des magnetischen Feldes auf ein divergentes Elektronenbündel, das von einem Punkt, der Öffnung des Diaphragmas, ausgeht. Die auf das Elektron von seiten des magnetischen Feldes wirkende Kraft wird durch

$$\mathfrak{F} = e\,[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

dargestellt, wenn e in elektromagnetischen Einheiten gemessen wird. Fliegt ein Elektron unter einem Winkel $\alpha \neq 0^0$, $\alpha \neq 90^0$ zur Richtung der magnetischen Kraftlinien, so kann seine Geschwindigkeit in die Längskomponente v_l und die senkrecht zu den Kraftlinien stehende Komponente v_ϱ zerlegt werden:

$$v_l = v\cos\alpha\,, \qquad v_\varrho = v\sin\alpha\,. \tag{8,1}$$

Betrachten wir den Einfluß des magnetischen Feldes auf jede einzelne dieser Komponenten. Auf ein senkrecht zum Feld mit der Geschwindigkeit v_ϱ fliegendes

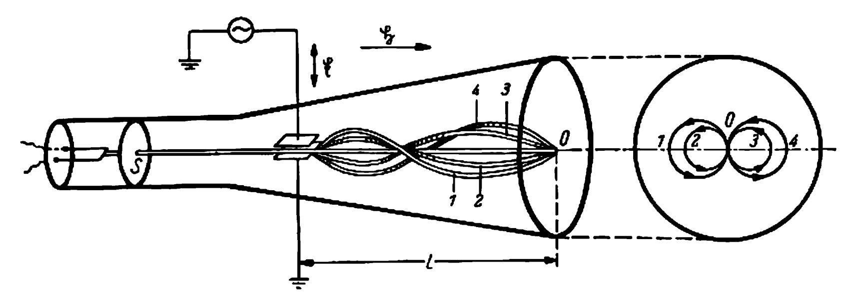


Abb. 11. Methode zur Bestimmung der spezifischen Ladung in einem longitudinalen Magnetfeld

Elektron wirkt die Kraft $F_\varrho = e v_\varrho |\mathfrak{H}|$. Da die Kraft F_ϱ überall senkrecht zu v_ϱ steht, beschreibt das Elektron einen Kreis, dessen Radius wir durch Gleichsetzung von F_ϱ mit der Zentrifugalkraft finden:

$$e v_\varrho |\mathfrak{H}| = \frac{m v_\varrho^2}{\varrho}\,;$$

daraus folgt

$$\varrho = \frac{v_\varrho}{\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|}\,, \qquad v_\varrho = \frac{e}{m}\,|\mathfrak{H}|\,\varrho\,.$$

Die vom Elektron zum Durchlaufen einer Kreisbahn benötigte Zeit t wird dann

$$t = \frac{2\pi\varrho}{v_\varrho} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m}\,|\mathfrak{H}|}\,. \tag{8,2}$$

Es zeigt sich, daß t nicht vom Radius ϱ abhängt. Verfolgen wir einige Elektronen, die von einem Punkt gleichzeitig mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausgehen, dann sehen wir aus obigem Grunde, daß alle diese Elektronen, nachdem sie Kreisbahnen mit verschiedenen Radien beschrieben haben, gleichzeitig in den Ausgangspunkt zurückkehren. Dies zeigt sich in der Abb. 11 rechts, wo auf der senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes gelegenen Ebene die Bahnprojektionen derjenigen Elektronen dargestellt sind, die verschiedene Geschwindigkeitskomponenten v_ϱ besitzen.

Auf die Längskomponente der Geschwindigkeit übt das magnetische Feld keine Wirkung aus. Daher bewegen sich die Elektronen im Zeitabschnitt t auf der Achse des Solenoids um die Strecke

$$l = v_l t = \frac{2\pi v \cos\alpha}{\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|}. \tag{8,3}$$

Ist der Winkel α sehr klein, so ist $\cos\alpha \approx 1$, und (8,3) nimmt die Form

$$l = \frac{2\pi v}{\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|} \tag{8,4}$$

an; alle aus dem Diaphragma mit ein und derselben absoluten Geschwindigkeit v austretenden Elektronen durchlaufen auf der Achse des Solenoids ein und dieselbe Entfernung l in einem Zeitraum, in dem die Projektionen dieser Elektronen auf der zur Achse des Solenoids senkrechten Ebene eine vollständige Kreisbahn beschreiben. Hieraus folgt, daß ein divergierendes Bündel von Elektronen gleicher Energie unter der Wirkung eines longitudinalen Magnetfeldes in der Entfernung l fokussiert wird.

Diese fokussierende Wirkung des Solenoids liegt auch der Methode des magnetischen Längsfeldes zugrunde. Die Elektronen, die aus dem Diaphragma S austreten, gelangen in das Innere des Solenoids, nachdem sie zuvor durch das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ in ein divergierendes Bündel verwandelt wurden. Durch passende Wahl der Feldstärke $\mathfrak{H}$ können wir erreichen, daß das Elektronenbündel an dem Ende des Solenoids, das dem Diaphragma gegenüberliegt, wieder fokussiert wird, wo auch der Fluoreszenzschirm angebracht ist. Ist uns das hierzu notwendige Feld bekannt, so können wir sofort e/m ausrechnen. In der Tat finden wir aus (8,4)

$$v = \frac{l}{2\pi}\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für die Geschwindigkeit in die Energiegleichung

$$\frac{mv^2}{2} = eV \tag{5,4}$$

ein, dann erhalten wir

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{|\mathfrak{H}|^2 l^2}. \tag{8,5}$$

Das Resultat der nach dieser Methode im Jahre 1939 ausgeführten Messungen lautet:

$$\frac{e}{m} = (1{,}7586 + 0{,}0023)\cdot 10^7\ \mathrm{CGSM\,g^{-1}}.$$

Der genaueste Wert für die spezifische Ladung eines Elektrons, der als Resultat einer kritischen Abschätzung der nach verschiedenen Methoden durchgeführten Messungen erhalten wurde, beträgt:

$$\frac{e}{m} = (1{,}7592 \pm 0{,}0005) \cdot 10^7 \text{ CGSM g}^{-1}. \tag{8,6}$$

Vergleichen wir jetzt die Masse eines Elektrons mit der eines Wasserstoffatoms. Hierzu müssen wir vor allem die Größe e/m_H finden, die das Verhältnis einer Elektronenladung zur Masse eines Wasserstoffatoms angibt. Es ist leicht einzusehen, daß dieses gleich dem Verhältnis der FARADAYschen Zahl F zum Atomgewicht des Wasserstoffes M_H ist. Da $F = Ne$ (N ist die LOSCHMIDTsche Zahl) und $M_H = Nm_H$, so folgt $\frac{F}{M_H} = \frac{e}{m_H}$. Aus den genauesten Messungen von F und M_H erhalten wir

$$\frac{e}{m_H} = (9573{,}5 \pm 1) \text{ CGSM} \cdot \text{g}^{-1}. \tag{8,7}$$

Kombinieren wir (8,6) mit (8,7), dann erhalten wir

$$\frac{m_H}{m} = 1837{,}5.$$

Hieraus folgt, daß die Masse eines Elektrons 1837,5mal kleiner als die Masse eines Wasserstoffatoms ist.

§ 9. Fokussierung und Monochromatisierung eines Bündels geladener Teilchen

Wir wollen nun die Erzeugung von Bündeln geladener Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit (Monochromatisierung, Geschwindigkeitsfilter) und die Methoden der Fokussierung dieser Bündel behandeln, deren Kenntnis für die späteren Betrachtungen nötig ist.

Das einfachste Geschwindigkeitsfilter besteht darin, daß ein Bündel geladener Teilchen von zwei zueinander senkrecht gerichteten elektrischen und magnetischen Feldern, durch die es gleichzeitig hindurchgeht, in entgegengesetzten Richtungen abgelenkt wird.

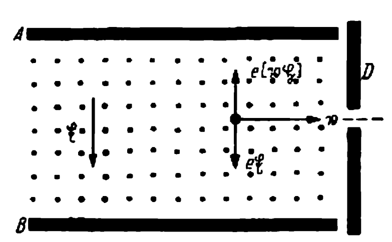


Abb. 12. Geschwindigkeitsfilter für geladene Teilchen

In Abb. 12 ist das magnetische Feld senkrecht zur Zeichenebene gerichtet und wirkt auf ein positiv geladenes Teilchen mit der in der Zeichenebene liegenden Kraft $e[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$. In derselben Ebene liegt auch die Kraft $e\mathfrak{E}$, mit der das elektrische Feld des Kondensators AB auf die Ladung wirkt. Wählen wir die Richtungen der Felder derart, daß die beiden Kräfte in entgegengesetzte Richtungen weisen, so wird der Betrag der resultierenden Kraft $ev|\mathfrak{H}| - e|\mathfrak{E}|$. Unter dem Einfluß dieser Kraft bewegt sich das Teilchen auf einer Kurve mit dem Krümmungsradius ϱ. Setzen wir die auf das Teilchen wirkende Kraft der Zentrifugalkraft gleich, dann erhalten wir

$$ev|\mathfrak{H}| - e|\mathfrak{E}| = \frac{mv^2}{\varrho}. \tag{9,1}$$

Es können also nur Teilchen mit einer solchen Geschwindigkeit durch den Kondensator hindurchgehen, bei der sich die beiden Kräfte $ev|\mathfrak{H}|$ und $e|\mathfrak{E}|$ kompensieren. In diesem Falle ist

$$ev|\mathfrak{H}| - e|\mathfrak{E}| = 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{H}|}. \tag{9,2}$$

Teilchen, deren Geschwindigkeiten nicht die Bedingung (9,2) befriedigen, werden entweder von den Kondensatorplatten angezogen und aus dem Bündel entfernt oder von dem Diaphragma aufgehalten.

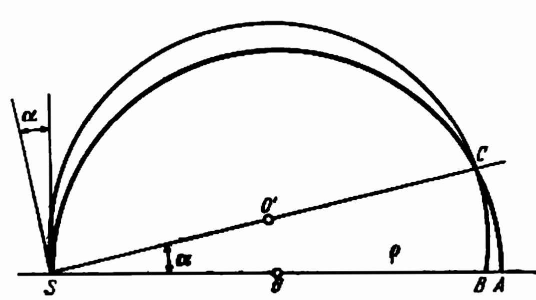


Abb. 13. Fokussierung durch ein homogenes magnetisches Querfeld

In Abb. 13 liegt die Teilchenquelle im Punkt S, und alle Teilchen haben die gleiche Geschwindigkeit mv/e. Ein senkrecht nach oben fliegendes Teilchen beschreibt einen Halbkreis mit dem Durchmesser $SA = 2\frac{mv}{e|\mathfrak{H}|} = 2\varrho$. Ein anderes, unter dem Winkel α zum ersteren ausfliegendes Teilchen beschreibt einen Kreisbogen mit demselben Radius, der die Gerade SA im Punkte B schneidet. Es ist dann

$$AB = 2\varrho(1 - \cos\alpha).$$

Ist der Winkel α genügend klein, so kann die Kosinusreihe $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \cdots$ benutzt werden, und die Berücksichtigung der ersten beiden Glieder ergibt dann

$$AB = \varrho\alpha^2.$$

Ist beispielsweise $\varrho = 5$ cm, $\alpha = 3^0 = 0{,}05$, so ist $AB = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ cm. Offensichtlich werden alle Teilchen, deren Richtungen beim Austritt aus S im Innern des Winkels α liegen, nach Durchlaufen des entsprechenden Bogens die Gerade SA zwischen A und B schneiden. Dient z. B. ein Spalt, durch den die Teilchen hindurchtreten, als Quelle S, so stellt AB die „Abbildung" dieses Spaltes in Gestalt einer schmalen Linie dar. Auf diese Weise wirkt ein homogenes magnetisches Querfeld als Zylinderlinse.

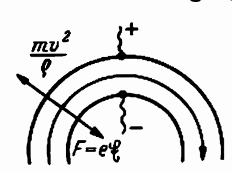


Abb. 14. Das positiv geladene Teilchen im radialen elektrischen Feld eines Zylinderkondensators

Eine andere Filterart, die in der letzten Zeit große Verbreitung gefunden hat, ist auf die Wirkung des radialen elektrischen Feldes in einem zylindrischen Kondensator begründet. Betrachten wir ein in einen zylindrischen Kondensator gelangendes Teilchen mit der Ladung e (Abb. 14). Offensichtlich wird das Teilchen nur in dem Falle ungehindert den Kondensator durchlaufen, wenn die auf ihn von seiten des Feldes wirkende Kraft $e\mathfrak{E}$ gleich der Zentrifugalkraft ist, d. h.

$$e|\mathfrak{E}| = \frac{mv^2}{\varrho}.$$

Wegen der radialen Symmetrie des Feldes im Zylinderkondensator ist

$$|\mathfrak{E}| = -\frac{dV}{d\varrho}.$$

Folglich nimmt die Bedingung für einen ungehinderten Durchgang des Teilchens durch den Kondensator die Gestalt

$$e\frac{dV}{d\varrho} = \frac{mv^2}{\varrho} \tag{9,3}$$

an. Drücken wir die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ durch das Beschleunigungspotential eV_0 aus, $mv^2 = 2eV_0$, und separieren die Variablen in Gleichung (9,3), dann erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2V_0}dV.$$

Sind die Radien der äußeren und der inneren Kondensatorplatte gleich ϱ_2 und ϱ_1, das Potential der äußeren Belegung gleich V_k, das der inneren Belegung gleich null, und integrieren wir innerhalb dieser Grenzen, dann erhalten wir

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2V_0}\int_0^{V_k}dV,$$

woraus

$$V_k = 2V_0\ln\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \tag{9,4}$$

folgt.

Wir sehen, daß jeder Potentialdifferenz V_k des Kondensators eine Elektronenenergie eV_0 entspricht, bei welcher die Elektronen ungehindert durch den Kondensator laufen können.

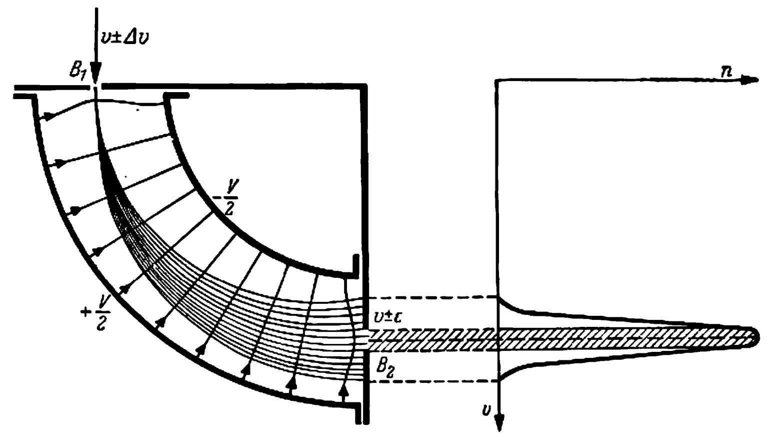


Abb. 15. Zylinderkondensator als Geschwindigkeitsfilter. Die Pfeile kennzeichnen die elektrischen Kraftlinien; in dem Koordinatensystem rechts gibt n die Anzahl der Teilchen, v deren Geschwindigkeit an

In Abb. 15 ist die Wirkungsweise eines Zylinderkondensators als Geschwindigkeitsfilter dargestellt. Tritt ein Elektronenbündel, dessen Geschwindigkeiten innerhalb des Intervalles $v \pm \Delta v$ liegen, durch den Spalt B_1 ein, so werden durch

den Spalt B_2 nur Elektronen austreten, deren Geschwindigkeiten im Innern des engeren Intervalles $v \pm \varepsilon$ liegen. Auf der rechten Seite der Zeichnung ist eine graphische Darstellung der Elektronenverteilung nach der Geschwindigkeit bis zum Spalt B_2 gegeben; der den Spalt B_2 durchlaufende Anteil ist schraffiert dargestellt.

Die Besonderheit des betrachteten Filters liegt in der Fähigkeit, auch divergente Bündel zu fokussieren. JUSS und ROMANSKY zeigten theoretisch und experimentell,

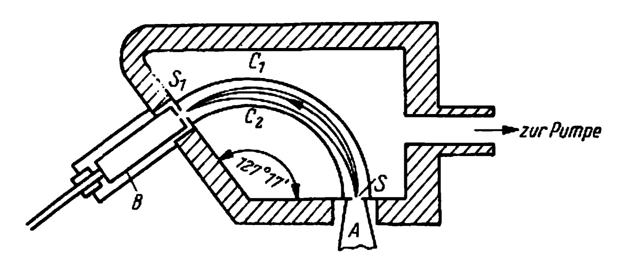


Abb. 16. Fokussierende Wirkung eines radialen elektrischen Feldes

daß ein durch den Spalt S hindurchgehendes divergentes Bündel von neuem fokussiert wird, wenn es im Zylinderkondensator den Bogen $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ\, 17'$ durchlaufen hat (Abb. 16).

Demnach wirkt das radiale elektrische Feld eines Zylinderkondensators auf ein divergentes Bündel geladener Teilchen ebenso wie ein homogenes magnetisches Querfeld. In mancher Beziehung zeigt die Verwendung eines elektrischen Feldes an Stelle eines magnetischen gewisse Vorteile; so ist es beispielsweise sehr viel leichter, mit Hilfe von Schirmen ein elektrisches Feld als ein magnetisches zu begrenzen.

§ 10. Die Abhängigkeit der Masse des Elektrons von seiner Geschwindigkeit

Bei Elektronengeschwindigkeiten, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen, ist die Veränderung der Masse mit der Geschwindigkeit gut meßbar. Die erste experimentelle Bestätigung dieser wichtigen Tatsache erbrachte KAUFMANN, dessen Arbeit im Jahre 1901, noch vier Jahre vor dem Entstehen der Relativitätstheorie, veröffentlicht wurde.

Das Wesen seiner Methode besteht darin, daß die Elektronen gleichzeitig durch ein elektrisches und ein magnetisches Querfeld laufen, die parallel oder antiparallel angeordnet sind, so daß die Ablenkungen durch diese beiden Felder senkrecht zueinander stehen. Ein paralleles Bündel von Elektronen mit gleicher Geschwindigkeit durchläuft die Platten eines Kondensators und ein magnetisches Feld (Abb. 17). Die Richtungen der Felder sind auf der Zeichnung durch Pfeile gekennzeichnet. Die Ablenkung im elektrischen Feld wird nach rechts gerichtet und gleich $OA = x$ sein; die Ablenkung im magnetischen Feld wird nach oben gerichtet und gleich $OB = z$ sein. Hierbei müssen wir bedenken, daß die Elektronen

negative Ladungen tragen; die Ablenkung eines positiv geladenen Teilchens würde entsprechend nach links und nach unten gehen. Die Formeln des § 4 geben

$$z = A\frac{e}{mv} \qquad (4,8)$$

und

$$x = B\frac{e}{mv^2}, \qquad (4,11)$$

in denen A und B Gerätekonstanten darstellen. Alle Elektronen gleicher Geschwindigkeit werden nach dem Durchgang durch beide Felder auf den Punkt C der Photoschicht treffen. Das Bündel möge jetzt inhomogen sein und Elektronen mit verschiedenen Geschwindigkeiten enthalten. In diesem Falle werden sich die Spuren der Elektronen auf der Photoschicht in einer Kurve aufzeichnen, deren Form wir aus den Formeln (4,8) und (4,11) durch Eliminierung von v finden. Quadrieren wir (4,8) und dividieren dieses Quadrat durch (4,11), dann erhalten wir

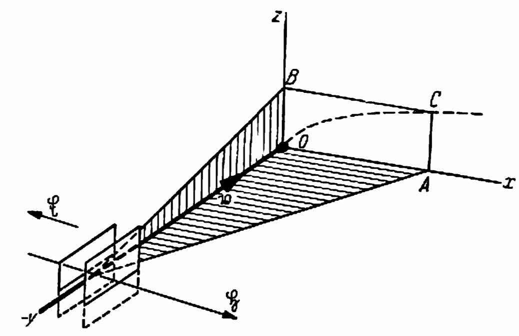


Abb. 17. Elektronen in elektrischen und magnetischen Querfeldern

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B}\frac{e}{m}. \qquad (10,1)$$

Ist e/m konstant, so ist auch

$$\frac{A^2}{B}\cdot\frac{e}{m} = K = \text{const},$$

und es folgt

$$z^2 = Kx. \qquad (10,2)$$

Die aufgefundene Kurve muß einen Parabelabschnitt darstellen. Wird bei konstanter Richtung des magnetischen Feldes das elektrische Feld von der einen auf die andere Seite umgeschaltet, so müßten wir zwei Parabelabschnitte erhalten, deren gemeinsame Tangente im Punkte O die z-Achse darstellt (Abb. 18a). Bei den mit einer solchen Anordnung und mit einem Radiumpräparat als Elektronenquelle durchgeführten Versuchen KAUFMANNs erwiesen sich die erhaltenen Kurven nicht als Parabelabschnitte. Dies allein zeigt bereits, daß e/m in (10,1) nicht konstant bleibt, d. h., daß die Masse von der Geschwindigkeit abhängt. In der Abb. 18b ist die von KAUFMANN erhaltene Form nach einer Photographie schematisch dargestellt. Der Fleck, der durch die in magnetischen und elektrischen Feldern nicht ablenkbaren γ-Strahlen des Radiums hervorgerufen wurde, setzt den Koordinatenanfangspunkt fest. Wir sehen, daß die Kurvenabschnitte nicht bis zum Koordinatenanfangspunkt reichen, obwohl im Elektronenbündel Teilchen mit einer nur wenig von der Lichtgeschwindigkeit abweichenden Geschwindigkeit vorhanden waren. Weiterhin sehen wir, daß die zur Verlängerung beider Kurven durch den Punkt 0 gelegten Tangenten nicht mit der z-Achse übereinstimmen,

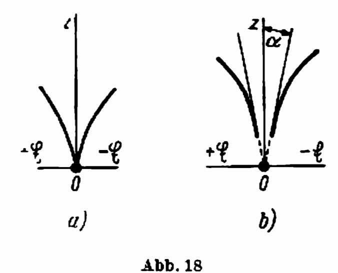


Abb. 18

sondern mit ihr einen Winkel α bilden, der von null verschieden ist. Aus diesem Grunde hat $\frac{z}{x}$ auch bei $z = 0$ einen endlichen Wert, so daß $\frac{z^2}{x} = \frac{z}{x} \cdot z = 0$. Derartige Aufnahmen erlauben die Auswertung von e/m für verschiedene Elektronengeschwindigkeiten, wie auch die Form der Kurven aussehen möge. Haben wir die Koordinaten irgendeines Punktes der Kurve ermittelt, so können wir in der Tat e/m und v mit Hilfe der Formeln (4,8) und (4,11) ausrechnen. Da die auf der Photoschicht erhaltenen Spuren ziemlich verwaschen sind, können die Messungen keine große Genauigkeit ergeben. Jedoch zeigen sie qualitativ eindeutig, daß die Masse mit der Geschwindigkeit anwächst. So erhielt KAUFMANN beispielsweise die in der Tabelle Ia angegebenen Resultate.

Tabelle Ia

v cm/s	e/m CGSM · g⁻¹
$2{,}36 \cdot 10^{10}$	$1{,}31 \cdot 10^{7}$
$2{,}59 \cdot 10^{10}$	$0{,}97 \cdot 10^{7}$
$2{,}83 \cdot 10^{10}$	$0{,}63 \cdot 10^{7}$

Für eine quantitative Festsetzung der Massenabhängigkeit von der Geschwindigkeit ist die Genauigkeit der Versuche von KAUFMANN ungenügend. Zur Zeit seiner Versuche wurde um die Gültigkeit zweier Formeln gestritten: erstens um die ABRAHAMsche Formel, der die Vorstellung des Elektrons als feste und inkompressible Kugel zugrunde lag:

$$m = m_0 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{\beta}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - 1\right),$$

und zweitens um die LORENTZsche Formel

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

die der Vorstellung eines in der Bewegungsrichtung kompressiblen Elektrons entspricht. Bekanntlich folgt die letzte Formel auch aus der Relativitätstheorie. In Anbetracht der großen prinzipiellen Wichtigkeit, die der Lösung der Frage zukommt, welche von den beiden Formeln der Wirklichkeit am besten entspricht,

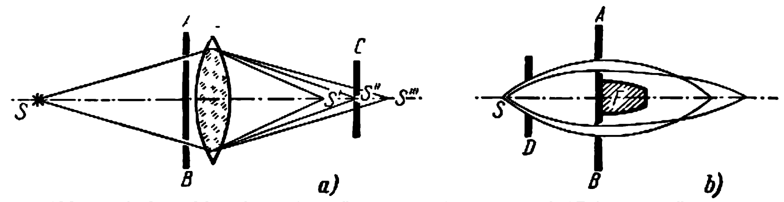


Abb. 19. „Fokaler Monochromator" für Licht (a); Versuch von KAPITZA-TRICKER (b)

folgten der Arbeit KAUFMANNS eine große Anzahl anderer Arbeiten und eine ausführliche Polemik. Der Grund hierfür ist in der außerordentlichen Schwierigkeit der entsprechenden Experimente und dem kleinen Unterschied der durch die beiden Formeln angebbaren zahlenmäßigen Resultate begründet.

Die ersten Experimentatoren deuteten ihre Resultate zugunsten der LORENTZ-EINSTEIN-Formeln, jedoch waren ihre Versuche nicht immer frei von Einwänden. Überzeugendere Ergebnisse wurden im Jahre 1921 von GUYE, LAVANCHY und

RADNOWSKI erhalten. Bei ihren Versuchen wurden allerdings Kathodenstrahlen nur in dem begrenzten Geschwindigkeitsintervall von $\beta = 0{,}2$ bis $\beta = 0{,}5$ benutzt.

Wir verweilen nicht bei der Geschichte dieser Frage, sondern betrachten nur die Resultate der letzten Arbeiten, welche alle Einwände gegen die vorhergehenden Untersuchungen behandeln. In den Versuchen TRICKERS wird eine Anordnung benutzt, die von P. L. KAPITZA für die Analyse der Geschwindigkeit von Elektronen vorgeschlagen wurde. Diese Anordnung stellt ihrem Wesen nach einen „Fokalmonochromator" dar, der einem für Licht benutzten Monochromator entspricht. Die Abb. 19a erklärt die Wirkung dieses Monochromators im optischen Fall. Ein divergentes Strahlenbündel der Lichtquelle S geht durch die Linse L, vor der ein ringförmiges Diaphragma AB angeordnet ist. Der Sinn dieses Diaphragmas liegt darin, daß die achsennahen Strahlen ausgesondert werden und nur die Strahlen hindurchgehen können, die unter einem genügend großen Winkel divergieren. Infolge der chromatischen *Aberration* der Linse werden die Strahlen mit verschiedenen Wellenlängen in verschiedenen Punkten S', S'', S'''... der optischen Achse fokussiert, und zwar werden die kurzwelligen Strahlen näher zur Linse fokussiert, die langwelligen weiter entfernt von ihr. Durch Verschiebung des Diaphragmas C können wir erreichen, daß aus seiner Öffnung Strahlen beliebiger Wellenlänge treten.

In der Methode von KAPITZA-TRICKER wird die Rolle der Linse von einem magnetischen Längsfeld mit Achsensymmetrie übernommen, d. h. von einem Solenoid, das in diesem Falle als eine lange magnetische Linse erscheint. Wie wir in § 8 sahen, werden die Elektronen von einer solchen Linse in der Entfernung

$$l = \frac{2\pi v \cos\alpha}{\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|} \tag{8,3}$$

fokussiert.

Bei gegebenen $\mathfrak{H}$ und α hängt die Entfernung l von v und e/m ab. Das Prinzip des „Fokalmonochromators" ist in der Abb. 19b dargelegt. Aus der Quelle S, einem radioaktiven Präparat, das Elektronen mit Geschwindigkeiten bis $\beta = 0{,}8$ aussendet, tritt das divergierende Elektronenbündel durch das ringförmige Diaphragma AB und wird durch das magnetische Längsfeld des Solenoids fokussiert. Dem Fall der optischen Linse entsprechend, werden hier die Elektronen mit verschiedenen Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten der optischen Achse fokussiert. F ist ein Bleiblock zum Schutze gegen das Auftreffen von Röntgenstrahlen, die bei der Bremsung von Elektronen in den Diaphragmen entstehen. Das Diaphragma kann bis zu $\pm$ 5000 V aufgeladen und hierdurch die Elektronen beschleunigt oder verzögert werden. Bei der Geschwindigkeit $\beta = 0{,}8$, die einem Beschleunigungspotential von $340{,}5 \cdot 10^5$ V entspricht, ist das Verhältnis $\frac{m}{m_0}$ nach der LORENTZ-EINSTEIN-Formel gleich 1,666. Eine Änderung des Beschleunigungspotentials um 5000 V ruft eine Änderung der Masse um ungefähr 0,06% hervor, die jenseits der Fehlergrenzen liegt. Daher beschleunigt oder bremst ein Feld von 5000 V die Elektronen merklich, ohne praktisch deren Massen zu ändern. Aus der Formel (8,3) folgt, daß die Änderung der Geschwindigkeit um Δv den Brennpunkt um

$$\Delta l = \frac{2\pi \Delta v \cos\alpha}{\frac{e}{m}|\mathfrak{H}|}$$

verschiebt. Ist Δv und $\mathfrak{H}$ bekannt, und messen wir Δl, so können wir die Größe e/m für die gegebene Geschwindigkeit ausrechnen.

Die Messungen TRICKERS zeigten, daß bei Elektronengeschwindigkeiten bis zum 0,8fachen der Lichtgeschwindigkeit die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit der Formel von LORENTZ-EINSTEIN mit einer Genauigkeit von 1–2% folgt, während die Unterschiede zwischen den durch die Formeln von ABRAHAM und LORENTZ-EINSTEIN gegebenen Ergebnissen unter diesen Bedingungen bei 5% liegen.

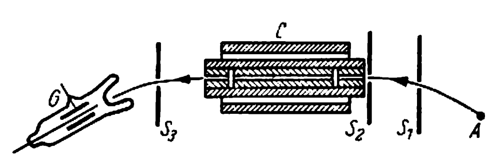


Abb. 20. Versuchsanordnung von ZAHN und SPIESS

Eine andere Methode zur Bestimmung der Massenabhängigkeit von der Geschwindigkeit wurde von ZAHN und SPIESS im Jahre 1938 angewandt. Sie besteht in folgendem: Befindet sich in A (Abb. 20) die Elektronenquelle, und wirkt senkrecht zur Zeichenebene ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}$, dann sortieren die Spalte S_1 und S_2 aus dem Bündel jene Elektronen heraus, deren Geschwindigkeiten die Bedingung

$$\frac{mv^2}{\varrho} = ev|\mathfrak{H}| \qquad (10,3)$$

befriedigen, in welcher ϱ der durch die Anordnung der Spalte S_1, S_2, S_3 bestimmbare Radius der Flugbahn ist. Die Elektronen, die durch die Spalte S_1 und S_2 hindurchgegangen sind, treten hierauf in den Kondensator C. Wegen des senkrecht zum elektrischen Feld liegenden magnetischen Feldes wirkt dieser Kondensator als ein Filter, das eine genauere Monochromatisierung der Elektronengeschwindigkeit hervorruft. In G ist ein Auffänger aufgestellt (ein GEIGER-Zähler, wie er im Band II, Abschnitt XIX beschrieben wird), mit dessen Hilfe die einzelnen, durch alle drei Spalte und den Kondensator hindurchgelaufenen Elektronen gezählt werden können. Der Versuch besteht nun darin, daß bei gegebener Größe des magnetischen Feldes eine solche Potentialdifferenz an die Kondensatorplatten gelegt wird, daß die Anzahl der vom Zähler G registrierten Elektronen ein Maximum wird. Ist $\mathfrak{E}$ die Feldstärke im Kondensator, so werden nur solche Elektronen durch ihn hindurchlaufen können, deren Geschwindigkeit die Forderung

$$v = \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{H}|} \qquad (9,2)$$

befriedigt. Kombinieren wir diese Formel mit (10,3), dann erhalten wir

$$\frac{e}{m} = \frac{|\mathfrak{E}|}{\varrho|\mathfrak{H}|^2}. \qquad (10,4)$$

Die Versuche von ZAHN und SPIESS, ebenso wie die von KAPITZA und TRICKER, zeigten, daß eine Abweichung gegenüber den nach der LORENTZ-EINSTEIN-Formel ausrechenbaren Ergebnissen bei Elektronengeschwindigkeiten bis $\beta = 0{,}745$ nicht über 1,5% hinausgeht.

Damit hat die LORENTZ-EINSTEIN-Formel innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenzen und für das angegebene Geschwindigkeitsintervall eine experimentelle Bestätigung gefunden. Auf Grund allgemeiner Überlegungen ist es klar, daß keine

Ursache besteht, an der Richtigkeit dieser Formel für beliebige, nahe der Lichtgeschwindigkeit liegende Geschwindigkeiten zu zweifeln. Beachten wir die überragende Wichtigkeit dieser Formel sowohl vom theoretischen als vom experimentellen Gesichtspunkt (siehe insbesondere die Abschnitte über den Atomkern und über kosmische Strahlung), so wäre uns ihre ergänzende Bestätigung für ein breiteres Geschwindigkeitsintervall mit einer dem modernen Stand der experimentellen Technik erreichbaren Genauigkeit wünschenswert.

§ 11. Die elektromagnetische Masse

In Verbindung mit den Versuchsergebnissen, die die Abhängigkeit der Masse des Elektrons von seiner Geschwindigkeit feststellten, wollen wir noch kurz die Frage der sogenannten elektromagnetischen Masse berühren. Bereits im Jahre 1881 begründete J. J. THOMSON theoretisch die Vermutung, daß die gesamte Masse des Elektrons elektromagnetischer Herkunft sei. Diese Annahme wurde in der Folge beibehalten und insbesondere von H. A. LORENTZ, A. POINCARÉ und M. ABRAHAM entwickelt.

Der Grund für eine solche Annahme besteht darin, daß das ruhende Elektron nur ein elektrostatisches Feld besitzt. Wird es in Bewegung gesetzt, dann entsteht noch ein magnetisches Feld, für dessen Bildung die Aufwendung einer zusätzlichen Arbeit notwendig ist. Wird umgekehrt das sich bewegende Elektron angehalten, dann muß das magnetische Feld hierbei verschwinden. Das Verschwinden eines magnetischen Feldes ruft nach dem Gesetz der Induktion aber das Auftreten eines zusätzlichen Feldes hervor, das so gerichtet ist, daß es das gebremste Elektron zu beschleunigen strebt. Es verhält sich alles so, als ob mit dem Feld des Elektrons eine zusätzliche Trägheit verbunden wäre. Daher sind wir berechtigt, die Bewegungsgröße des Elektrons als die Summe zweier Komponenten zu betrachten, des gewöhnlichen oder mechanischen Impulses p_m und der auf die Trägheit des Feldes begründeten Bewegungsgröße p_e:

$$p = p_m + p_e .$$

Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist dann

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dp_m}{dt} + \frac{dp_e}{dt} .$$

Eine Änderung des „mechanischen" Impulses $\frac{dp_m}{dt}$ entspricht $m_m \dot{v}$, worin m_m die „mechanische Masse" bedeutet. Stellen wir uns p_e als Produkt $m_e \dot{v}$ vor, so gibt der Koeffizient m_e die elektromagnetische Masse:

$$F = (m_m + m_e)\, \dot{v} = m\dot{v} , \tag{11,1}$$

worin $m = m_m + m_e$.

Die Größe der zusätzlichen Masse m_e kann unter bestimmten Voraussetzungen über die Struktur des Elektrons leicht ausgerechnet werden. Ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegendes Elektron kann als ein elektrischer Strom der Dichte

ev betrachtet werden. Sein magnetisches Feld wird dann in dem in der Entfernung r vom Elektron befindlichen Punkt P gleich[1])

$$|\mathfrak{H}| = \frac{ev \sin\vartheta}{cr^2}.$$

Die Energiedichte dieses Feldes ist $\frac{|\mathfrak{H}|^2}{8\pi}$, und die Energie in dem im Raumelement $d\tau$ befindlichen Punkt P ist

$$dE = \frac{|\mathfrak{H}|^2}{8\pi} d\tau = \frac{e^2 v^2 \sin^2\vartheta}{8\pi c^2 r^4} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr. \tag{11,2}$$

Um die gesamte, mit dem magnetischen Feld verbundene Energie aufzufinden, genügt es, anfänglich das Elektron als Kugel mit dem Radius r_0 und seine Ladung als gleichmäßig auf seiner Oberfläche verteilt anzunehmen. Dann ist das Feld im Innern des Elektrons gleich null, aber außerhalb sphärisch symmetrisch angeordnet, so daß für die Berechnung der gesamten Energie des magnetischen Feldes die Formel (11,2) über alle möglichen Winkel ϑ und φ und über den Radiusvektor r von r_0 bis ∞ integriert werden muß. Wir haben dann

$$E = \frac{e^2 v^2}{8\pi c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{e^2 v^2}{4 r_0 c^2} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta. \tag{11,22}$$

Da $\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{3}$ (siehe § 64) ist, so finden wir schließlich

$$E = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2}. \tag{11,3}$$

Wird ein ruhendes Elektron durch die Wirkung einer äußeren Kraft mit einer Geschwindigkeit v bewegt, die klein im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit ist, dann wird die hierzu notwendige Arbeit nicht nur für die Vergrößerung der kinetischen Energie von 0 bis $\frac{1}{2} m_m v^2$ aufgewandt, sondern auch für die Erzeugung des magnetischen Feldes mit der Energie (11,3). Das Ergebnis ist also das gleiche, als wäre die Masse des Elektrons *größer* als m_m; diese zusätzliche Masse m_e bestimmt sich aus der Bedingung

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2},$$

woraus

$$m_e = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2} \tag{11,4}$$

folgt.

Dieses Resultat beruht auf der obigen Aussage über die Oberflächenverteilung der Elektrizität. Bei anderen Annahmen werden etwas andere Ergebnisse erhalten. So ergibt beispielsweise die Annahme einer räumlichen Verteilung innerhalb des Radius r_0 den Wert

$$m_e = \frac{4}{5} \frac{e^2}{r_0 c^2}. \tag{11,5}$$

---

[1]) Siehe z. B. R. Becker, „Theorie der Elektrizität", Bd. II, 7. Aufl., Leipzig 1950.

Im Anfangsstadium der Elektronentheorie hatte die Vorstellung von der elektromagnetischen Herkunft der gesamten Elektronenmasse, d. h. $m_m = 0$ und $m_e = m$, breite Anerkennung gefunden. Diese Vorstellung wurde dadurch bestätigt, daß die von LORENTZ auf der Grundlage der Hypothese über die rein elektromagnetische Natur der Masse gefundene Formel für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{11,6}$$

experimentell gut bestätigbare Ergebnisse zeigt. Dieses Argument kann jedoch gegenwärtig nicht als überzeugend angesehen werden, da aus der Relativitätstheorie folgt, daß jede *beliebige* Masse unabhängig von ihrer Herkunft von der Geschwindigkeit nach Formel (11,6) abhängen muß. Daher können wir aus der Tatsache allein, daß die Formel (11,6) durch den Versuch bestätigt wird, keinerlei Schlüsse über die Herkunft der Masse des Elektrons ziehen.

Die Vorstellung, daß die gesamte Masse des Elektrons von seinem elektromagnetischen Feld hervorgerufen wird, erlaubt die Berechnung des sogenannten „klassischen Elektronenradius". Die Formeln (11,4) und (11,5) ergeben entsprechend für die oberflächige und räumliche Ladungsverteilung für $m_e = m$,

$$r_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2} \tag{11,4'}$$

und

$$r_0 = \frac{4}{5}\frac{e^2}{mc^2}\,. \tag{11,5'}$$

Beide Ausdrücke unterscheiden sich nur wenig voneinander.[1]) Da die Hypothesen über die Struktur des Elektrons jetzt noch vollständig willkürlich sind, können wir im allgemeinen mit Multiplikatoren der Größe 1 rechnen und erhalten für r_0 den einfachen Ausdruck:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\,. \tag{11,7}$$

Der Zahlenwert r_0, der gewöhnlich als „klassischer Elektronenradius" bezeichnet wird, kann nach der Formel (11,7) berechnet werden. Für seine Größe finden wir

$$r_0 = \frac{e}{c}\cdot\frac{e}{mc} = \frac{4{,}80\cdot 10^{-10}}{3\cdot 10^{10}}\cdot 1{,}76\cdot 10^{7} = 2{,}8\cdot 10^{-13}\,\text{cm}\,.$$

---

[1]) Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die minimale Größe des „Radius" eines ruhenden Elektrons, die mit der Hypothese von der rein elektrischen Entstehung der Masse übereinstimmt, $\frac{1}{2}\frac{e^2}{mc^2}$ ist. Die Feldstärke des elektrischen Feldes einer Punktladung beträgt

$$|\mathfrak{E}| = \frac{e}{r^2}\,.$$

Die Gesamtenergie des Feldes ist gleich

$$E = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}^2\, d\tau\,.$$

Für die Berechnung von E lassen wir wieder zu, daß die Ladung auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r verteilt ist. Dann ist im Innern der Kugel $|\mathfrak{E}|$ gleich null, und zur

Eine direkte experimentelle Methode zur Bestimmung des „Elektronenradius" besteht nicht. Es gibt jedoch Tatsachen, die darauf hinweisen, daß der Wirkungsquerschnitt des Elektrons, wie er beispielsweise bei der Wechselwirkung mit Licht beobachtet werden kann, von der Größenordnung r_0^2 ist. So führt die Theorie der Streuung von Röntgenstrahlen an freien Elektronen zu einem Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt des Elektrons (siehe § 32):

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 .$$

Trotzdem erscheint die Vorstellung vom Elektron als einer den Raum mit dem Radius r_0 einnehmenden elektrischen Ladung offensichtlich unhaltbar. Dies folgt schon daraus, daß die Kräfte, die diese Ladung im endlichen Raum zusammenhalten, nicht nur elektromagnetischer Art sein können; ohne zusätzliche Kräfte könnte das Elektron nicht seine Form beibehalten. Die wechselseitige elektrische Abstoßung der Teilchen einer auf beliebige Weise im Raum der Größe $(10^{-13})^3$ verteilten Ladung müßte unvermeidlich das Elektron sprengen.

Es muß noch bemerkt werden, daß die Strukturbestimmung des Elektrons eines der schwierigsten und bei weitem noch nicht gelösten Probleme der modernen theoretischen Physik ist. Die Zulassung eines endlichen Elektronenradius kann nicht mit den Forderungen der Relativitätstheorie übereinstimmen, ebenso führt aber die Vorstellung von einem punktförmigen Elektron zu anderen ernsten Schwierigkeiten, weil bei $r_0 \to 0$ die Selbstenergie des Elektrons $\frac{e^2}{r_0}$ ins Unendliche strebt. Eine Betrachtung der sich hierauf beziehenden Fragen geht über den Rahmen dieses Buches hinaus.

Die Entdeckung des Elektrons, die Feststellung seiner elektromagnetischen Masse und die Abhängigkeit seiner Masse von der Geschwindigkeit, ferner der Nachweis, daß die Elektronen als Bestandteile aller Atome der Materie erscheinen, alle diese neuen, am Ende des XIX. und am Anfang des XX. Jahrhunderts entdeckten Tatsachen riefen bei den Zeitgenossen den Eindruck eines vollständigen Zusammenbruches der grundlegendsten physikalischen Prinzipien hervor. Dieses Zusammenbruches bemächtigen sich plötzlich die idealistischen Philosophen,

---

Berechnung der Gesamtenergie des Feldes muß die Integration über r von a bis ∞ durchgeführt werden:

$$E = \frac{e^2}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2a} .$$

Nach der Relativitätstheorie entspricht der beliebigen Energie E die Masse $\frac{E}{c^2}$. Deshalb ist allgemein

$$m = m_m + \frac{E}{c^2} = m_m + \frac{e^2}{2ac^2} .$$

Nehmen wir an, daß die „mechanische" Masse gleich null ist, dann erhalten wir

$$a = \frac{e^2}{2mc^2} .$$

Wenn nun $m_m \neq 0$ ist, so ist $a > \frac{e^2}{2mc^2}$. Dann ist tatsächlich $\frac{1}{2}\frac{e^2}{mc^2}$ die unterste Grenze des Elektronenradius.

um die „Krise der Physik", das „Verschwinden der Materie" oder den „Zusammenbruch des Materialismus" zu verkünden. LENIN unterzog diese Behauptungen in seinem Werk „Materialismus und Empiriokritizismus" einer vernichtenden Kritik. Er zeigte, daß die neuen Entdeckungen in der Physik in Wirklichkeit als glänzende Bestätigungen des dialektischen Materialismus erscheinen. LENIN schreibt: „Die Materie verschwindet, heißt: es verschwindet jene Grenze, bis zu welcher wir die Materie bis dahin kannten, unsere Kenntnis dringt tiefer; es verschwinden solche Eigenschaften der Materie, die früher als absolut, unveränderlich, ursprünglich gegolten haben (die Undurchdringlichkeit, die Trägheit, die Masse usw.) und die sich nunmehr als relativ, nur einigen Zuständen der Materie eigen, entpuppen. Denn die *einzige* ‚Eigenschaft' der Materie, an deren Anerkennung der philosophische Materialismus gebunden ist, ist die Eigenschaft, *objektive Realität zu sein*, außerhalb unseres Bewußtseins zu existieren."[1])

---

[1]) W. I. LENIN, Materialismus und Empiriokritizismus. S. 250/251, Kapitel V, Abschnitt 2. Dietz Verlag, Berlin.

II. ATOME UND ISOTOPE

§ 12. Einführung

Der vorhergehende Abschnitt war dem Teilchen negativer Elektrizität, dem Elektron, als einem der wichtigsten Elementarteilchen gewidmet. Wir betrachteten die Existenzbeweise des Elektrons und auch die unmittelbaren Bestimmungen der Größe seiner Ladung und Masse. In diesem Abschnitt gehen wir zur Betrachtung der Atome selbst über. Die Beweise ihrer Existenz sind höchst mannigfaltig und aus den Elementarkursen über Physik und Chemie gut bekannt, so daß wir uns damit nicht aufhalten wollen, sondern unsere Aufmerksamkeit auf das wichtigste Kennzeichen des Atoms, seine Masse, konzentrieren.

In der Chemie werden gewöhnlich nicht die absoluten, sondern die relativen Atommassen oder Atomgewichte benutzt, wobei als vereinbarte Einheit $^1/_{16}$ des Atomgewichtes des Sauerstoffes genommen wird, letzteres genau gleich 16 gerechnet. Die Bestimmung der Atomgewichte wird mit makroskopischen Stoffmengen mit Hilfe der chemischen Analyse durchgeführt. Die auf diesem Wege erhaltenen Zahlen haben praktische Bedeutung und liegen allen chemischen Berechnungen zugrunde. Macht man die vor langer Zeit aufgestellte Annahme, daß alle Atome eines gegebenen Elementes die gleiche Masse haben, und benutzt das Gesetz von Avogadro, wonach in einem Mol eines beliebigen Stoffes stets ein und dieselbe Anzahl Moleküle enthalten ist, dann kann man mit Hilfe der chemischen Atomgewichte auch die absolute Masse des Atoms berechnen.

In diesem Abschnitt werden wir jedoch sehen, daß die chemischen Atomgewichte allein nicht die Möglichkeit zur Berechnung der absoluten Atommassen geben. Trotzdem war die Kenntnis der chemischen Atomgewichte historisch nicht nur vom praktischen Gesichtspunkt wichtig, sondern auch deshalb, weil mit ihrer Hilfe die wichtigste Atome verschiedener Elemente verbindende Gesetzmäßigkeit entdeckt wurde. Diese Gesetzmäßigkeit erscheint in dem Periodensystem der Elemente von D. I. Mendelejew, mit dessen Betrachtung wir diesen Abschnitt beginnen wollen.

§ 13. Das Periodensystem der Elemente von D. I. Mendelejew

In der Mitte des XIX. Jahrhunderts wurde eine große Anzahl neuer chemischer Elemente entdeckt, und es entstand natürlich die Frage, ob diese Elemente irgendwie unter sich verbunden oder ob ihre Eigenschaften vollständig zufällig und voneinander unabhängig wären. Verschiedene Einzelgesetzmäßigkeiten waren schon verhältnismäßig früh entdeckt worden, aber erst D. I. Mendelejew gelang es,

das allgemeine Gesetz zu finden, das alle Elemente in einem einzigen System zusammenfaßt und als der deutlichste Beweis der Einheitlichkeit im Bau der Atome erscheint. Um den genialen Gedanken, durch den MENDELEJEW sein System entdeckte, richtig abschätzen zu können, wollen wir einige Tatsachen betrachten.

Die erste Tabelle wurde von MENDELEJEW im Jahre 1869 veröffentlicht, zu welcher Zeit erst 63 Elemente bekannt waren. Bei ihrer Einordnung in ein System zeigte sich jedoch, daß nur 35 Elemente in bezug auf ihre Atomgewichte eindeutig untergebracht werden konnten. Die Lage von 8 Elementen rief Erstaunen hervor. Beispielsweise war unverständlich, weshalb Zn, Cd und Hg in eine Gruppe mit Mg, Ca, Sr und Ba fallen sollten; noch größeres Befremden rief die Einordnung von Mn in eine Gruppe mit den Halogenen hervor (d. i. in die VII. Gruppe des Periodischen Systems). Schließlich war MENDELEJEW gezwungen, bei den übrigen 20 Elementen entweder ihre Atomgewichte oder die Reihenfolge zu ändern. Mitunter waren diese Änderungen recht wesentlich. So wurde beispielsweise das Atomgewicht des Cer mit 92 angenommen; MENDELEJEW schrieb ihm jedoch das Atomgewicht 138 zu (der genaue heutige Wert ist 140,13); die Atomgewichte von Thorium und Uran waren zu jener Zeit entsprechend 116 und 120. MENDELEJEW zeigte, daß diese Atomgewichte 232 und 240 sein müßten. Ferner blieben einige Plätze in der Tabelle MENDELEJEWs frei, und er zeigte, daß diese Stellen noch nicht entdeckten Elementen entsprächen. Insbesondere sagte er die Existenz dreier Elemente voraus, die er mit Ekabor, Ekaaluminium und Ekasilicium bezeichnete und deren Eigenschaften er beschrieb. Kurze Zeit später, im Jahre 1875, wurde ein Element entdeckt und Gallium genannt. MENDELEJEW zeigte sofort, daß dieses Gallium das von ihm vorausgesagte Ekaaluminium sei und das Atomgewicht ungefähr gleich 68, das spezifische Gewicht 5,9–6,0 und das Atomvolumen 11,5 sein müsse. In der Tat ergab sich das Atomgewicht des Gallium zu 69,9, das spezifische Gewicht zu 5,96 und das Atomvolumen zu 11,7.

Die Grundtatsache, von der MENDELEJEW beim Bau des Systems der Elemente ausging, besteht darin, daß sich bei der Anordnung der Elemente nach wachsendem Atomgewicht Elemente mit analogen Eigenschaften periodisch wiederholen. Hiervon ausgehend, gelang es ihm, das „natürliche System der Elemente" aufzubauen, das sich als gültig erwies, obwohl später das Atomgewicht nicht als eine die individuellen Eigenschaften des Atoms eindeutig bestimmende Konstante angesehen werden konnte. Tatsächlich werden wir weiter unten sehen, daß Stoffe existieren, die sich in chemischer Hinsicht trotz verschiedener Atomgewichte praktisch gleich benehmen. Diese Stoffe werden *Isotope* genannt, da sie infolge ihrer chemischen Identität auf ein und denselben Platz im Periodischen System gesetzt werden müssen (das Wort „Isotope" bedeutet in wörtlicher Übersetzung aus dem Griechischen „das ein und denselben Platz Einnehmende"). Die chemischen Elemente erscheinen in der Tat als Gemische von Isotopen und ihre nach den üblichen chemischen Methoden bestimmbaren Atomgewichte als die Mittelwerte aus den Atomgewichten aller sie aufbauenden Isotope. Neben Atomen, die gleiche Eigenschaften bei verschiedenen Atomgewichten haben, existieren auch Atome, die verschiedene Eigenschaften bei gleichen Atomgewichten besitzen (Isobare, siehe Band II, Abschnitt XVIII).

Trotz dieser Tatsachen erweist sich das von MENDELEJEW geschaffene System der Elemente als richtig und muß als ein *Fundamentalgesetz der Natur* betrachtet werden.

Da das chemische Atomgewicht tatsächlich nicht das wesentliche Kennzeichen des *Atoms* ist, erscheint sein Platz im Periodensystem als grundlegendes Kennzeichen des Atoms, wobei diese Lage durch die Nummer des Platzes bestimmt wird, den das gegebene Element in der Tabelle MENDELEJEWS einnimmt. Der tiefere Sinn dieser Ordnungszahl (Atomnummer) besteht darin, daß sie tatsächlich nicht als einfache Ordnungsnummer, sondern als eine der physikalischen Fundamentalkonstanten des Atoms erscheint.

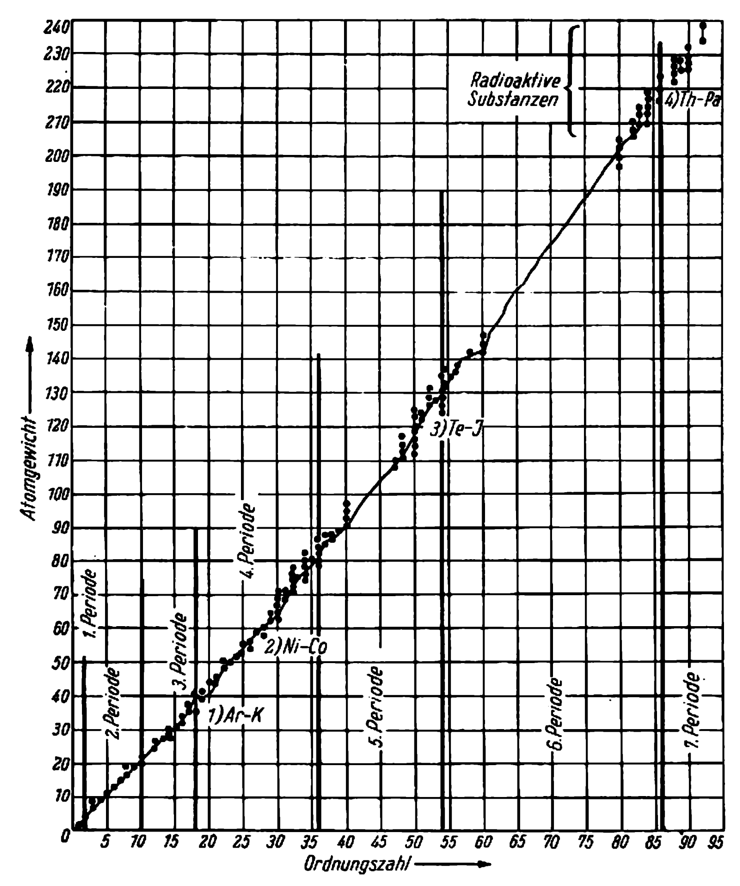
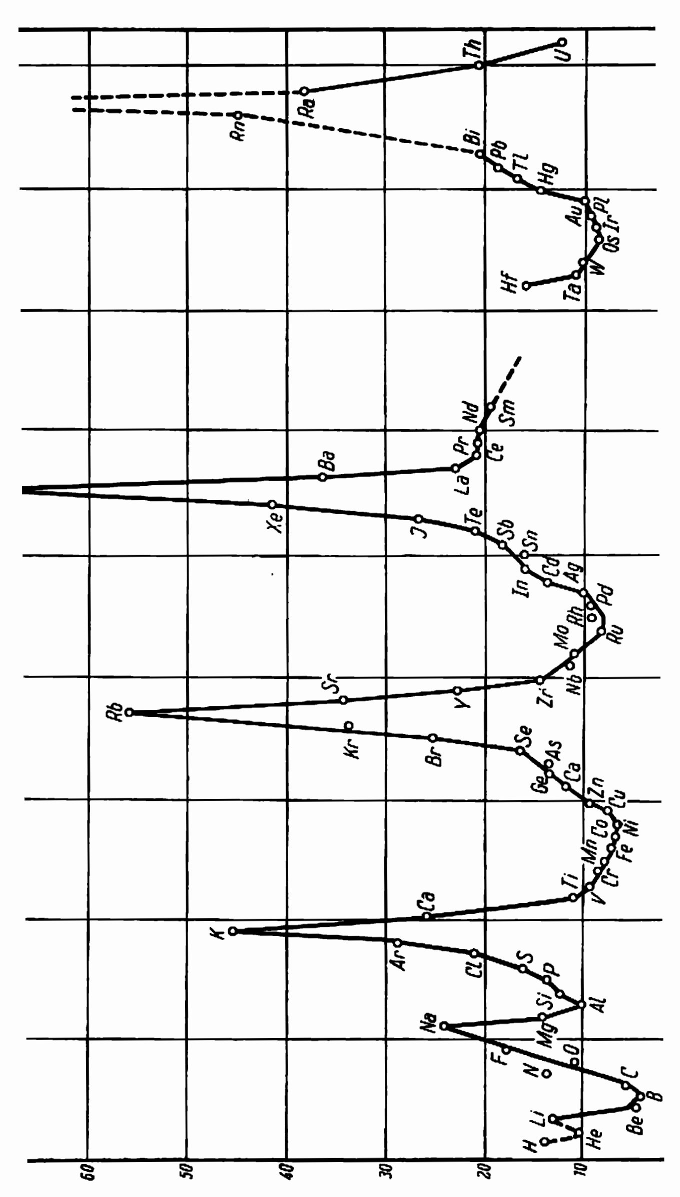


Abb. 21. Die Atomgewichte als Funktion der Ordnungszahl

Die Möglichkeit einer Anordnung der Elemente in ein richtiges System mit Hilfe der Atomgewichte ist auf folgende bemerkenswerte Tatsache begründet: wenn ein gegebenes Element durch das Atomgewicht charakterisiert wird, welches nach chemischen Methoden bestimmbar ist und als Mittel der Atomgewichte aller Isotope des gegebenen Elements erscheint, so besteht zwischen diesem mittleren Atomgewicht und der Ordnungszahl eine einfache monotone Abhängigkeit (Abb. 21). In fünf Fällen wird diese Beziehung verletzt (K–Ar, Te-J, Co–Ni, Th–Pa und U–Np),


Atomvolumen in cm3/Grammatom bei T = 0 °K
10
20
30
40
50
60

aber MENDELEJEW ordnete die Elemente in genialer Eingebung entgegen der Reihenfolge ihrer Atomgewichte richtig ein.

In den Abbildungen 22 und 23 sind einige Beispiele der periodischen Wiederholung von Eigenschaften der Atome dargestellt. Die Abb. 22 stellt die Kurve der Atomvolumina dar: auf der Abszisse sind die Ordnungszahlen und auf der Ordinate die Atomvolumina $\left(=\frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Dichte}}\right)$ aufgetragen. In Abb. 23 ist in einem Diagramm der Gang einiger physikalischer Eigenschaften in Abhängigkeit von der Ordnungszahl dargestellt, und zwar gibt die obere Kurve den Gang der

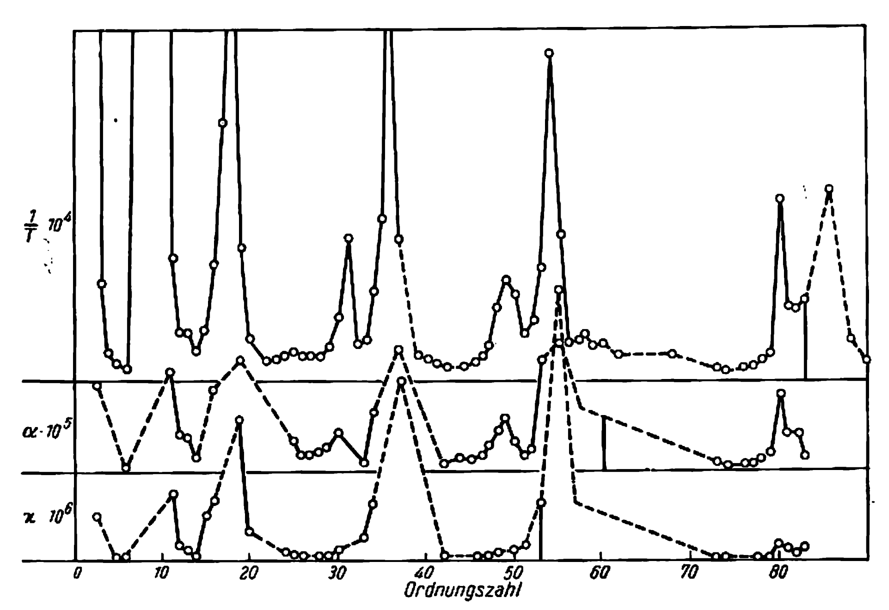


Abb. 23. Periodizität der physikalischen Eigenschaften

reziproken Schmelztemperatur, die mittlere Kurve den Gang des linearen Ausdehnungskoeffizienten und die untere den Gang der Kompressibilität an. Wir sehen hier, daß alle diese Eigenschaften nicht nur periodische Änderungen bei monotonem Anwachsen der Ordnungszahl (des mittleren Atomgewichtes) erleiden, sondern daß die Maxima und Minima bei allen Kurven bei ein und denselben Werten der Ordnungszahl erscheinen, d. h., alle diese Eigenschaften lassen eine *gleiche* Periodizität erkennen.

Dem natürlichen System der Elemente können höchst unterschiedliche äußere Formen gegeben werden. Am verbreitetsten sind die beiden Tabellen mit langen und kurzen Perioden. Theoretisch besser begründet ist die Tabelle mit langen Perioden (Tabelle II auf Seite 37).

Betrachten wir die aufeinanderfolgenden Reihen dieser Tabelle. Die erste Reihe besteht aus zwei Elementen; sie beginnt mit dem einwertigen Element Wasserstoff und endet mit dem Edelgas Helium. Das dritte Element – Lithium – ist wieder

1 H 1,0080																		2 He 4,003
3 Li 6,940	4 Be 9,02												5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,000	10 Ne 20,183
11 Na 22,997	12 Mg 24,32												13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457	18 Ar 39,944
19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10		22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916	36 Kr 83,7
37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92		40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92	54 Xe 131,3
55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La 138,92	58—71 Selt. Erden	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At (211)	86 Rn 222

1	1 H 1,0080										2 He 4,003
2	3 Li 6,940	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,000				10 Ne 20,183
3	11 Na 22,997	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457				18 Ar 39,944
4	19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	
	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916				36 Kr 83,7
5	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc (99)	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71	
	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92				54 Xe 131,3
6	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La* 138,92	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,82	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23	
	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At (211)				86 Rn 222
7	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227,05	**							

einwertig; es erscheint als typisches Metall und besitzt scharf ausgeprägte alkalische Eigenschaften. Bei weiterem Fortschreiten nach rechts schwächen sich diese beiden Eigenschaften merklich, und es erscheinen allmählich die entgegengesetzten Eigenschaften. Schließlich erweist sich das neunte Element – Fluor – als der Antipode des Lithiums; es erscheint als typisches Metalloid und zeigt scharf ausgeprägte Säureeigenschaften. Weiter folgt das Edelgas Neon und nach ihm das Alkalimetall Natrium (Nr. 11). Nun wiederholt sich das ganze Bild der vorhergegangenen Periode, so daß nach acht Elementen (Natrium eingerechnet) wir von neuem das Alkalimetall Kalium antreffen, dem das Edelgas Argon (Nr. 18) vorhergeht. Der Übergang von typischen Metallen zu typischen Metalloiden findet bei dem „amphoteren" Element Silicium (Nr. 14) statt, das sowohl eine metallische als auch eine nichtmetallische Modifikation besitzt. Die folgende vierte Periode beginnt mit dem Kalium, enthält aber nicht mehr 8, sondern schon 18 Elemente, so daß das dem Kalium folgende alkalische Metall Rubidium bereits auf dem 37. Platz steht. Dem Rubidium folgt eine neue, große, auch aus 18 Elementen bestehende Periode und schließt mit dem auf dem 54. Platz stehenden Edelgas Xenon. Weiter beginnt mit dem alkalischen Metall Cäsium (Nr. 55) die längste, 32 Elemente enthaltende Periode. Inmitten dieser 32 Elemente bilden die dem Lanthan folgenden 14 Elemente von Nr. 58 bis Nr. 71 – die Seltenen Erden oder „Lanthaniden" genannt – eine besondere Gruppe. Sie besitzen so verwandte chemische Eigenschaften, daß ihre Trennung für die Chemie eine sehr schwierige Aufgabe darstellt. Wegen dieser chemischen Ähnlichkeit wird den Lanthaniden in der Tabelle nur ein Kästchen zugeteilt und die gesamte Reihe gesondert aufgeführt. Die letzte, mit dem 87. Element beginnende Reihe besteht aus den unbeständigen, natürlichradioaktiven Elementen. Das schwerste der in der Natur vorkommenden Elemente, das Uran (Nr. 92), war bis vor kurzer Zeit das letzte bekannte Element des periodischen Systems. In den letzten Jahren gelang es jedoch, auf künstlichem Wege weitere noch schwerere Elemente (Nr. 93–101) zu erhalten, die „Transurane". Die Untersuchung ihrer chemischen Eigenschaften und die Überprüfung der vorangehenden Elemente führten zu dem Schluß, daß das dem Aktinium (Nr. 89) folgende Element Thorium (Nr. 90) eine Gruppe von Elementen mit verwandten chemischen Eigenschaften, die „Aktiniden", eröffnet, ähnlich der Gruppe der Seltenen Erden, den „Lanthaniden".

Als bedeutend verbreiteter erweist sich eine andere Darstellung des natürlichen Systems der Elemente, die Tabelle mit kurzen Perioden (Tabelle III auf Seite 38). Ihr Hauptvorzug erscheint in ihrer Geschlossenheit, ihr Nachteil darin, daß die Verteilung aller Elemente in vier Gruppen nur durch ziemlich künstliche Einführung von Untergruppen und „Triaden" (in der VIII. Gruppe) verwirklicht werden konnte.

§ 14. Bestimmung der wahren Masse der Atome. Die Parabelmethode

Aus dem vorhergehenden Paragraphen folgt, daß die Bestimmung der wahren und nicht der mittleren Atommassen eine sehr wichtige Aufgabe darstellt. Die genauesten modernen Bestimmungen der Atommassen, die ausschließlich *auf den Massenunterschied* individueller Atome begründet sind und nicht von irgendwelchen anderen Eigenschaften abhängen, wurden mit Hilfe der

Ablenkung von Ionen verschiedener Gase in elektrischen und magnetischen Feldern durchgeführt. Der erste derartige Versuch wurde von J. J. THOMSON ausgeführt.

Befindet sich in der Kathode eines Entladungsrohres, das bei erniedrigtem Druck (ca. 10^{-2} mm Hg) arbeitet, eine Öffnung, so werden die Ionen, welche auf die Kathode zufliegen, durch diese Öffnung hindurchtreten und hinter der Kathode ein Strahlenbündel, die sogenannten *Kanalstrahlen*, bilden. Diese Kanalstrahlen bestehen vorzugsweise aus positiven Ionen jener Gase, deren Reste sich in dem Entladungsrohr befinden. Dazu kommen noch in geringer Zahl neutrale Teilchen, die bei Rekombinationen positiver Ionen und Elektronen im Raume hinter der Kathode entstehen, und negative Ionen.

Die THOMSON-Methode erlaubt die Bestimmung der relativen Massen einzelner Teilchen, die zum Bestand des Kanalstrahlbündels gehören, auf folgende Weise: Die Kanalstrahlen erhält man dadurch, daß Ionen, die in dem Entladungsrohr erzeugt und beschleunigt werden, durch einen Kanal K (Abb. 24) mit einer Länge von 2 cm und einem Durchmesser von 0,1 mm hindurchgehen. Durch die be-

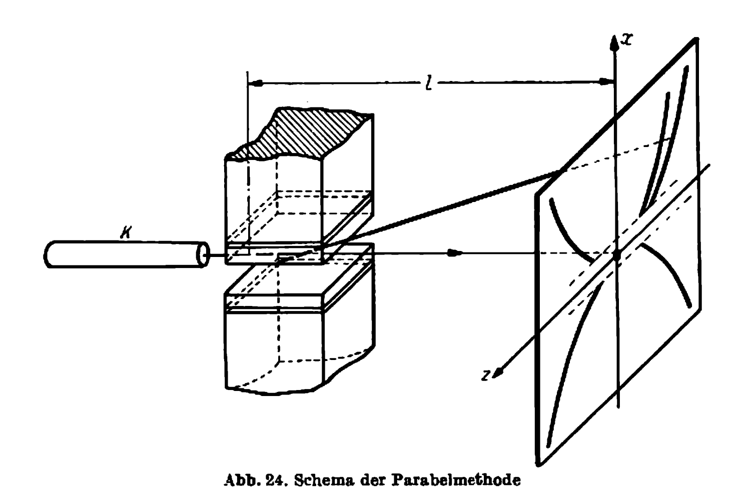


Abb. 24. Schema der Parabelmethode

deutende Länge des Kanals wird ein fast paralleles Bündel erhalten, das Teilchen mit verschiedensten Energien bis herauf zu einem durch die Rohrspannung bestimmbaren Maximum enthält. Das Bündel der Kanalstrahlen wird danach der Wirkung eines elektrischen und eines magnetischen Querfeldes ausgesetzt, die zueinander parallel bzw. antiparallel gerichtet sind. Hierbei werden die geladenen Teilchen durch die elektrischen und die magnetischen Felder in zueinander senkrechte Richtungen abgelenkt. Wie wir im § 10 sahen, wird das aus Teilchen gleicher Masse, aber verschiedener Geschwindigkeiten bestehende Bündel von den elektrischen und magnetischen Feldern derart abgelenkt, daß es auf einem senkrecht zur Anfangsrichtung des Strahles angebrachten Fluoreszenzschirm oder einer Photoplatte eine Spur in Form eines Parabelabschnittes hinterläßt, die der in Abb. 25 dargestellten gleicht.

Die elektrische Ablenkung möge in Richtung der x-Achse und die magnetische Ablenkung in der z-Achse liegen. Wie in § 10 gezeigt wurde, muß dann zwischen z und x die Beziehung

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B} \cdot \frac{e}{m} \tag{10,1}$$

bestehen, in der A und B Gerätekonstante sind (siehe § 4). Aus (10,1) erhalten wir

$$z^2 \cdot \frac{m}{e} = \frac{A^2}{B} \cdot x. \tag{14,1}$$

Die Ladung eines Ions kann nur ein ganzes Vielfaches einer Elektronenladung sein, d.h., sie kann nur gleich $+e$, $+2e$, ... sein. Sind nun alle Ionen einfach geladen, so zeigt die Formel (14,1), daß bei konstantem Wert der Abszisse x die Ionenmassen den Quadraten der Ordinaten umgekehrt proportional sind (siehe Abb. 25).

Der Koordinatenursprung wird auf der Photoschicht durch ungeladene Teilchen festgelegt, da diese nicht in den elektrischen und magnetischen Feldern abgelenkt werden; irgendwelche Koordinatenachsen gibt es natürlich auf der Photoschicht nicht. Um die für die Bestimmung der Massen notwendige Ausmessung der Ordinaten möglich zu machen, wird die Richtung des magnetischen Feldes im Verlaufe des Versuches vertauscht, wodurch man außer den Parabelabschnitten MN, PQ auch noch die symmetrischen Abschnitte M′N′, P′Q′ erhält. Hier wurde die Richtung des magnetischen Feldes geändert, im Unterschied zu dem Versuch zur Bestimmung der Abhängigkeit der Elektronenmasse von der Geschwindigkeit, bei dem das elektrische Feld umgepolt wurde.

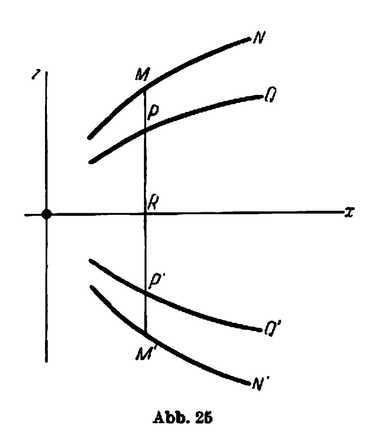


Abb. 25

Sind neben den einfach geladenen Ionen im Bündel auch zweifach geladene anzutreffen (z. B. O^+ und O^{++}), so geben die letzteren eine Parabel, die der halben Masse entspricht (z. B. entspricht die Parabel O^{++} der Masse 8). Es bestehen jedoch äußere Kennzeichen, mit deren Hilfe die Parabeln mehrfach geladener Teilchen von den Parabeln einfach geladener Teilchen zu unterscheiden sind.

In der Abb. 26 sind zwei Photographien von Parabeln dargestellt, die nach dieser Methode, aber mit einer modernen und vervollkommneten Einrichtung aufgenommen wurden. Auf der linken Seite sind deutlich zwei Parabeln sichtbar, die von einfach geladenen Ionen ein und desselben Stoffes, des Neons, gebildet werden, womit offensichtlich auf die Existenz der Isotope mit den Massen 20 und 22 beim Neon hingewiesen wird. Diese Photographien zeigen die Möglichkeit, bei entsprechender Konstruktion des Gerätes und seiner richtigen Berechnung, Parabeln in Gestalt sehr dünner Spuren zu erhalten, die noch bei kleinen Massenunterschieden durch einen genügend großen Abstand voneinander getrennt sind. Das maximale Auflösungsvermögen, das auf diese Weise erreicht wurde, ist gleich $^1/_{600}$, d. h., die Linien von zwei sich um $^1/_{600}$ in ihrer Größe unterscheidenden Massen sind noch (bei zwanzigfacher Vergrößerung) getrennt sichtbar. Jedoch liegt ein wesentlicher Mangel des Gerätes in seiner äußerst geringen „Lichtstärke“.

Um scharfe Linien zu bekommen, müssen sehr schmale Spalte verwandt werden; außerdem zerstreuen das elektrische und das magnetische Feld den Teilchenstrom noch, so daß sich die Intensität der Spuren als sehr gering erweist. Diese Be-

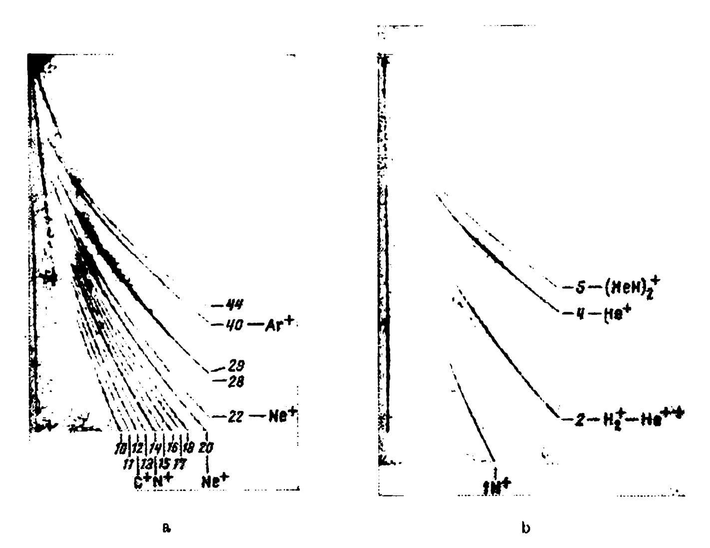


Abb. 26. Parabeln von Ionen verschiedener Gase

dingungen erinnern etwas an eine photographische Kamera mit kleiner Öffnung, aber ohne Objektiv; ein verkleinerter Öffnungsdurchmesser ermöglicht eine befriedigend scharfe Abbildung, dafür wächst aber die Belichtungszeit bis zu einem praktisch undurchführbaren Wert an.

§ 15. Der Massenspektrograph

Einen großen Vorzug vor der Parabelmethode besitzen jene Methoden, mit denen durch verschiedene Kombinationen elektrischer und magnetischer Felder eine Fokussierung geladener Teilchen erreicht wird. Die so gebauten Geräte heißen Massenspektrographen; der erste von ihnen wurde von Aston gebaut.

Dieser Spektrograph hat die folgende Einrichtung: positiv geladene Teilchen erhält man in einem Rohr bei Niederdruckentladung. Durch die Öffnung in der Kathode fallen diese Ionen in den hinter der Kathode gelegenen Rohrteil in Gestalt eines Bündels von Kanalstrahlen, das nun der Analyse unterworfen wird. Das Bündel wird mit Hilfe zweier Kollimatorspalte B_1 und B_2 der Breite 0,02 mm parallel gemacht (Abb. 27). Der Kondensator zerlegt das Bündel, indem er den Teilchen eine Ablenkung erteilt, die proportional e/mv^2 ist. Der Teil des auseinandergezogenen Bündels, der von dem Schirm C mit dem Spalt B_3 ausgesondert wurde, fällt nun in das magnetische Feld, das von dem Elektromagneten mit den Polschuhen M aufgebaut wird. Im Unterschied zur Thomson-Methode, bei welcher das magnetische Feld parallel oder antiparallel zum

elektrischen gerichtet ist, wirkt in dem Gerät ASTONS das magnetische Feld *senkrecht* zum elektrischen. Infolgedessen wird hier die von dem magnetischen Feld bewirkte Ablenkung der Teilchen in derselben Ebene wie auch die elektrische Ablenkung liegen, wobei allerdings die Richtung des magnetischen Feldes derart ausgewählt wird, daß die Teilchen in ihm in einer zu ihrer elektrischen Ablenkung entgegengesetzten Richtung abgelenkt werden. Unter solchen Bedingungen

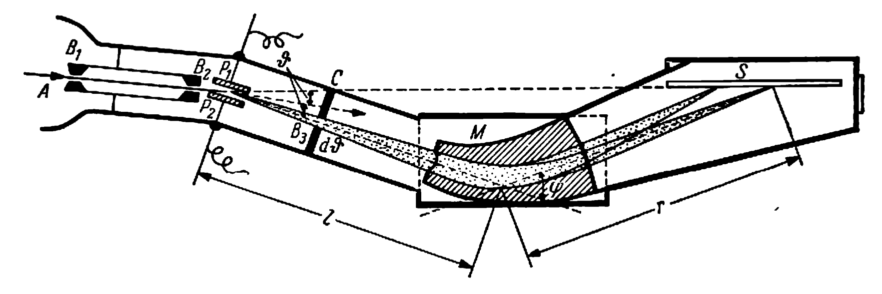


Abb. 27. Schema des ASTONschen Massenspektrographen

wird schließlich das magnetische Feld diejenigen Teilchen in einem gemeinsamen Brennpunkt auf der Photoschicht S sammeln, die gleiche Masse (genauer: gleiches Verhältnis e/m), aber verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Da die Ablenkung, welche die Ionen in dem Kondensator erfahren, proportional e/mv^2 ist, aber der Radius der Flugbahnkurve im magnetischen Feld nach der Formel (4,9) proportional mv/e ist, so werden jene Teile, welche im elektrischen Feld eine größere Ablenkung erlitten, im magnetischen Feld eine Flugbahnkurve mit kleinerem Radius beschreiben. Im Endergebnis faßt das magnetische Feld das divergierende Ionenbündel in einem gemeinsamen Brennpunkt zusammen. Die in der Zeichnung angeführte besondere Form der Polschuhe verbessert noch die Fokussierung.

Das folgende optische Analogon erlaubt, die Wirkungsweise des Gerätes besser zu verstehen. Ein paralleles Strahlenbündel weißen Lichtes (Abb. 28) geht durch das Prisma P_1, wo es spektral zerlegt wird. Ein zweites Prisma P_2, welches zum ersteren entgegengesetzt angeordnet ist und eine größere Dispersion besitzt, sammelt von neuem alle verschieden farbigen Strahlen in einen weißen „Brennpunkt". Hier entspricht das erste Prisma dem elektrischen Feld und das zweite Prisma dem magnetischen, während die Strahlen mit verschiedener Wellenlänge den Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten entsprechen.

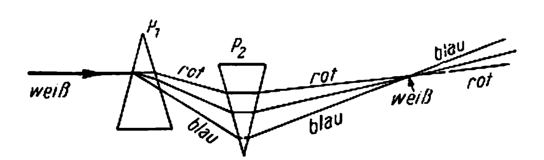


Abb. 28. Ein dem Massenspektrographen analoges optisches System

Die genaue Theorie des ASTONschen Gerätes ist recht kompliziert. Wir führen hier nur einige einfache Überlegungen an, welche die Fokussierung der Teilchen klarmachen. Es sei $d\vartheta$ die Winkelbreite des von dem elektrischen Feld zerlegten und von dem Spalt B_3 ausgebildeten Bündels. Ist l die Entfernung von der Kondensatormitte bis zum Zentrum des magnetischen Feldes und r die Ent-

fernung vom Zentrum des magnetischen Feldes bis zum Brennpunkt, so würde ohne das magnetische Feld das von dem elektrischen Feld zerlegte Bündel in der Entfernung $l + r$ die Breite $(l + r)\, d\vartheta$ haben. Um nun eine Fokussierung zu erreichen, muß diese Breite durch die entgegengesetzt gerichtete magnetische Ablenkung kompensiert werden. Ist $d\varphi$ die Winkelbreite, die das Bündel infolge der magnetischen Ablenkung erreicht, so ist $r d\varphi$ seine lineare Breite in der Entfernung r. Für die Fokussierung ist nun erforderlich, daß die Ablenkung im elektrischen Feld durch die Ablenkung im magnetischen Feld kompensiert wird. Dies ergibt die Bedingung

$$(l + r)\, d\vartheta - r d\varphi = 0. \tag{15,1}$$

Betrachten wir zuerst ein Bündel, das in bezug auf die Massen homogen ist; wir nehmen also an, daß für alle Teilchen des Bündels $e/m = \text{const}$ ist. Die Ablenkung z eines parallelen Bündels von Teilchen wird in einem homogenen elektrischen Feld nach den Formeln (4,11) und (4,12)

$$z = \frac{e}{2mv^2} |\mathfrak{E}| a^2,$$

worin a die Länge der Kondensatorplatten darstellt. Hieraus erhalten wir für kleine Ablenkungswinkel

$$\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{z}{a} = \frac{e}{2mv^2} |\mathfrak{E}| a$$

und folglich

$$\vartheta v^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} |\mathfrak{E}| a = \text{const}.$$

Durch Differentiation erhalten wir $v^2 d\vartheta + 2v\vartheta dv = 0$ oder

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -2 \frac{dv}{v}. \tag{15,2}$$

Der Radius der Flugbahnkurve in einem homogenen magnetischen Feld ist nach (4,9) gleich

$$\varrho = \frac{mv}{e} \frac{1}{|\mathfrak{H}|}.$$

Für den Ablenkungswinkel φ im magnetischen Feld ergibt sich dann

$$\varphi = \frac{L}{\varrho} = \frac{e}{mv} L |\mathfrak{H}|,$$

worin L die Weglänge im Magnetfeld ist. Ebenso wie früher erhalten wir $\varphi v = \frac{e}{m} L |\mathfrak{H}| = \text{const}$, $\varphi\, dv + v\, d\varphi = 0$, und daraus

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dv}{v}. \tag{15,3}$$

Setzen wir $d\vartheta$ und $d\varphi$ aus (15,2) und (15,3) in (15,1) ein, so finden wir

$$\frac{dv}{v} [(\varphi - 2\vartheta) r - 2l\vartheta] = 0.$$

Da $\frac{dv}{v} \neq 0$ ist, wird diese Bedingung erfüllt, wenn der Ausdruck in der Klammer gleich null ist, d. h.

$$(\varphi - 2\vartheta) r = 2l\vartheta. \tag{15,4}$$

Der geometrische Sinn dieser Beziehung kann mit Hilfe der Abb. 29 erklärt werden. Es seien Z die Mitte des elektrischen Kondensatorfeldes, O die Mitte des magnetischen Feldes und F der Brennpunkt, in welchem sich die Teilchen mit der von uns gewählten Masse sammeln. ZN ist die Flugrichtung der Kanalstrahl-

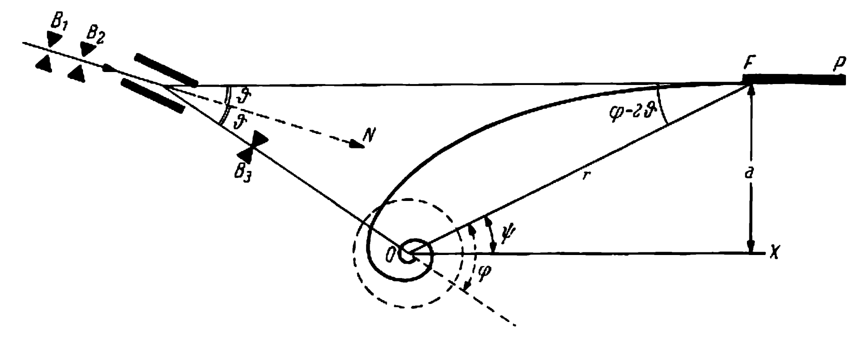


Abb. 29. Fokussierungsbedingung im ASTONschen Massenspektrographen

teilchen vor ihrer Ablenkung. Ist in dem Dreieck OZF der Winkel bei Z gleich 2ϑ, so erhalten wir auf Grund des trigonometrischen Sinussatzes

$$\frac{r}{\sin 2\vartheta} = \frac{l}{\sin(\varphi - 2\vartheta)}, \tag{15,5}$$

wobei $ZO = l$ und $OF = r$ ist (siehe Abb. 27). Für kleine Winkel ergibt die Beziehung (15,5) sofort (15,4).

Bis jetzt betrachteten wir nur Teilchen mit bestimmtem Wert e/m. Es zeigt sich jedoch, daß bei einer solchen Stellung der Photoschicht FP, mit der Geraden ZF in ihrer Ebene, die Brennpunkte für verschiedene e/m ebenfalls auf der Schicht liegen. Wählen wir als Polarachse die Gerade OX, die parallel FZ ist, dann wird der nach F geführte Radiusvektor gleich r und der Polarwinkel ψ gleich φ–2ϑ sein. Der Abstand zwischen ZP und OX wird gleich $r \sin(\varphi$–$2\vartheta)$ sein oder nach (15,5)

$$a = r \sin(\varphi - 2\vartheta) = l \sin 2\vartheta \approx 2l\vartheta.$$

Da aber der Winkel ϑ durch die Anordnung des Spaltes B_3 festgelegt ist (Abb. 27), ist a eine *konstante Größe*. Benutzen wir die Bezeichnungen $\varphi - 2\vartheta = \psi$, $2l\vartheta = a$, so ergibt sich aus (15,4)

$$r = \frac{a}{\psi}. \tag{15,6}$$

Infolge der Konstanz von a stellt (15,6) die Gleichung der hyperbolischen Spirale dar.[1]) Diese Spirale besitzt eine unendliche Zahl von Windungen und nähert sich dem Koordinatenanfangspunkt, ohne ihn je zu erreichen; sie besitzt ferner eine Asymptote, die im Abstand a parallel zur Polarachse liegt. Wird daher die Lage der Photoschicht derart gewählt, daß diese Asymptote in ihrer Ebene liegt,

---

[1]) Siehe z. B. W. I. SMIRNOW, „Lehrgang der höheren Mathematik", Band I; Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Auflage, Berlin 1956.

so werden in der Ebene der Photoschicht alle die Brennpunkte liegen, welchen die Winkel ψ entsprechen, die kleiner als eine gewisse bestimmte Größe sind, wodurch die Schärfe der Linien im Massenspektrographen gesichert ist.

In der Abb. 30 sind einige Massenspektren dargestellt, die mit einem Gerät des beschriebenen Typus aufgenommen wurden. Es ist zu sehen, wie scharf die Linien dieser Spektren sind. Der Abstand zwischen den Linien (Auflösungsvermögen des Gerätes) ist so groß, daß die Ausmessung der Massen sowie die Trennung nahe beieinanderliegender Massen mit einer großen Genauigkeit durchgeführt werden können. Tatsächlich sind in einer Länge des Spektrums von 16 cm

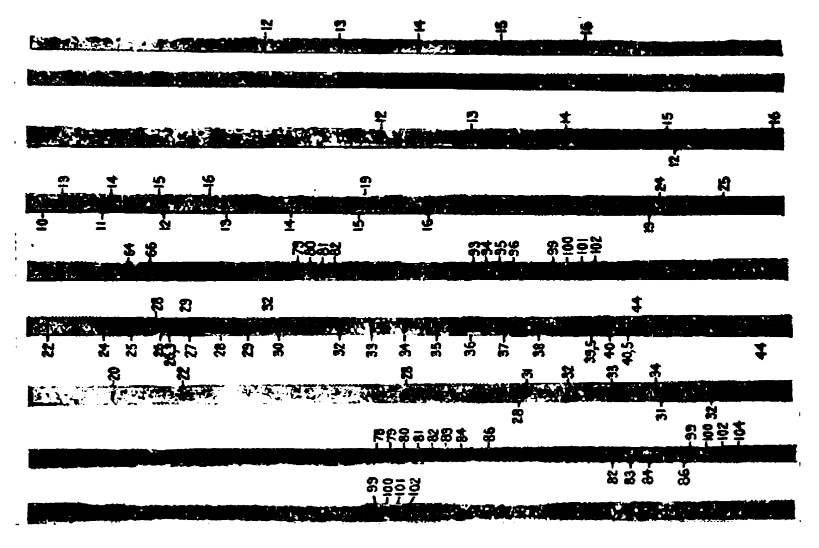


Abb. 30. Einige typische Massenspektren

die Atomlinien untergebracht, denen Massen entsprechen, die sich um etwas mehr als das Doppelte unterscheiden; einer Änderung der Masse um ein Prozent entspricht also ein Linienabstand von 1,5 bis 3 mm (in verschiedenen Teilen der Platte).

Zur Bestimmung der Massen aus diesen Spektren verfährt man folgendermaßen: erstens muß irgendeine bestimmte Masse als „Standard“ ausgewählt werden, da mit Hilfe der Massenspektren nur die *relativen* Größen der Massen bestimmt werden können. In der sogenannten physikalischen Massenskala wird die Masse des Sauerstoffisotops $O^{16} = 16$ als Grundlage genommen. Zweitens muß zur Bestimmung unbekannter Massen eine Eichkurve aufgenommen werden, auf deren Abszisse die Entfernung der Linie von einem bestimmten Punkt der Photoschicht und auf deren Ordinate die entsprechenden Massen aufgetragen werden. Diese Massenskala kann mit Hilfe von Linien, deren Lagen genau bekannten Massenverhältnissen entsprechen, hergestellt werden. Beispielsweise werden den Linien des Atoms und des Moleküls von Sauerstoff, O und O_2, die Massen 16 und 32

zugeschrieben; den ein- und zweifach geladenen Ionen O^+ und O^{++} müssen die Massen 16 und 8 zugeschrieben werden.

In der Abb. 31 ist das Beispiel einer Eichkurve des ASTONschen Spektrographen angeführt. Wir sehen, daß sie nur wenig von einer Geraden abweicht, was eine hohe Ablesegenauigkeit zuläßt. Zur Erreichung einer maximalen Genauigkeit werden verwickeltere Methoden angewandt, bei deren Beschreibung wir nicht verweilen werden.

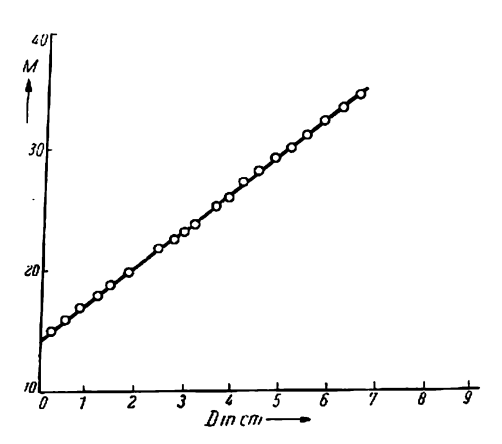


Abb. 31. Eichkurve des ASTONschen Spektrographen

BAINBRIDGE benutzte in seinem Gerät eine vollkommen andere Kombination der elektrischen und magnetischen Felder. Der von ihm gebaute Massenspektrograph ist durch eine besonders einfache Konstruktion gekennzeichnet, und seine Ergebnisse sind nicht schlechter, sondern in einigen Fällen sogar genauer als die des ASTONschen Spektrographen. Das Prinzip des Gerätes von BAINBRIDGE ist folgendes: ein Bündel von Kanalstrahlen wird mit Hilfe zweier Kollimatorblenden S_1 und S_2 parallel ausgeblendet (Abb. 32). Dieses parallele Bündel, welches Ionen verschiedener Masse und verschiedener Geschwindigkeit enthält, tritt hierauf in den Kondensator $P_1 P_2$, der sich in einem magnetischen Querfeld befindet, das senkrecht zur Zeichenebene liegt. Wie im § 9 gezeigt, stellt ein solches System ein Geschwindigkeitsfilter dar. Die Anwesenheit dieses Filters vereinfacht in hohem Maße das Gerät, weil tatsächlich das Filter durch den Spalt S_3 wohl Ionen verschiedener Masse, aber nur ein und derselben Geschwindigkeit v_0 hindurchläßt. Die durch den Spalt S_3 hindurchgegangenen Ionen beschreiben in dem homogenen magnetischen Querfeld Flugbahnkurven, deren Radien nach der Formel (4,9) proportional der Bewegungsgröße der Ionen sind:

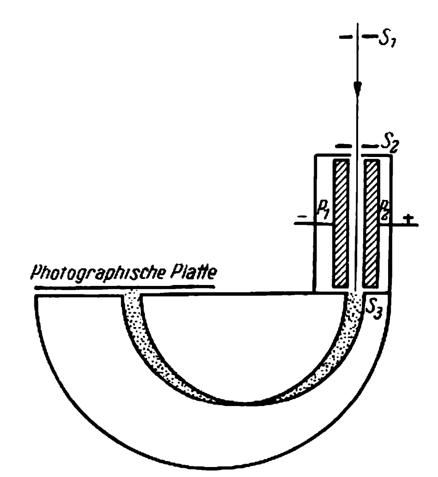


Abb. 32. Schema des Massenspektrographen von BAINBRIDGE

$$\varrho = \frac{m v_0}{e|\mathfrak{H}|}. \tag{4,9}$$

Weil aber die Geschwindigkeit v_0 bei allen Ionen gleich ist, werden die Kurvenradien von Ionen verschiedener Massen diesen Massen proportional sein, da $\varrho = \text{const} \cdot m$. Aus diesem Grunde wird der Abstand einer Linie von der auf der Photo-

schicht als Bezugspunkt ausgewählten Linie auch streng proportional der Masse sein. Die Linearität der Skala dieses Gerätes, aber auch die besonders symmetrische Form der Linien, die sich auch stark voneinander in ihrer Intensität unterscheiden, geben diesem Gerät einen großen Vorzug vor dem ASTONschen Spektrographen.

In der Abb. 33 sind einige Massenspektren angegeben, die mit dem Gerät von BAINBRIDGE aufgenommen wurden. Das hohe Auflösungsvermögen dieses Spek-

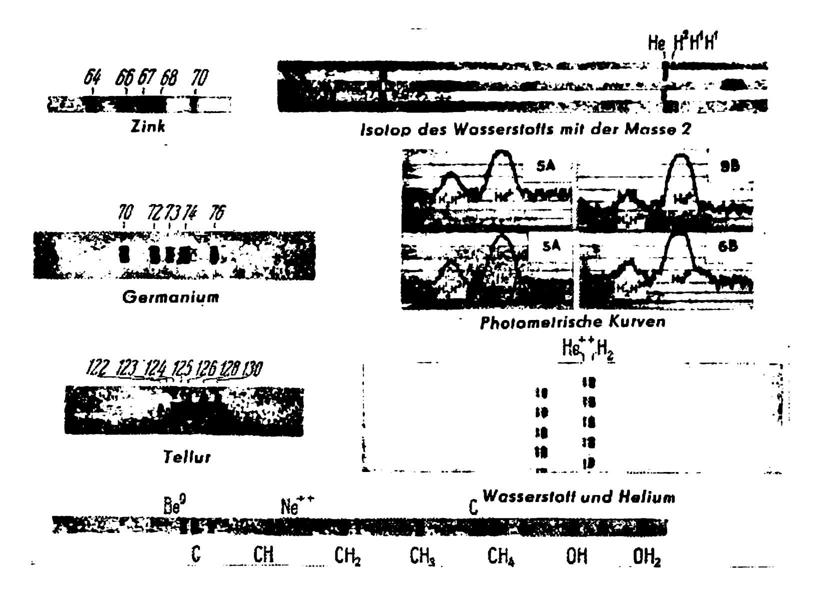


Abb. 33. Beispiele von Massenspektren, die mit dem Spektrographen von BAINBRIDGE aufgenommen wurden. Links die Daten der Isotopen von Zink, Germanium und Tellur; rechts die Spektren, die die Existenz des Isotops von Wasserstoff mit der Masse 2 bestätigen. Das untere Spektrum zeigt die Existenz von Beryllium-Isotopen.

trographen ist daraus ersichtlich, daß die Linien des Wasserstoffmoleküls und des zweifach geladenen Ions von Helium He^{++} weit auseinander liegen.

Obwohl der Spektrograph von BAINBRIDGE in bezug auf die Idee so einfach ist, stellt er doch eine gewaltige Anlage dar; besonders sein großer Elektromagnet, der ein homogenes Feld von 15000 Oersted bei einem Polabstand von 1,8 cm für die Fläche eines Halbkreises mit dem Durchmesser von 40 cm geben muß, nimmt einen großen Platz ein.

§ 16. Massenspektrometer und Massenspektrographen mit doppelter Fokussierung

Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Massenspektrographen erlauben die Bestimmung der Atommassen individueller Atomarten mit einem großen Grad von Genauigkeit durchzuführen. Werden die Methoden der Photometrie be-

nutzt, so kann jetzt auch, dem Grad der Schwärzung der Photoschicht in bestimmten Spektrallinien entsprechend, der Vergleich des prozentualen Anteils der diesen Linien entsprechenden Massen durchgeführt werden. Jedoch sind erstens die Methoden der Photometrie höchst mühselig und ergeben keine genauen Resultate, und zweitens kann die Bestimmung des prozentualen Anteils der Isotope unvergleichlich schneller und genauer mit Hilfe von Geräten durchgeführt werden, die Massenspektrometer genannt werden. In diesen Geräten erfolgt die Registrierung der Ionen bestimmter Masse nicht auf photographischem, sondern auf elektrischem Wege nach der Größe der Ladung, die von den Ionen einer bestimmten Masse übertragen wird, oder nach der Stärke des Ionenstromes. Dadurch erfordert die Bestimmung des prozentualen Anteiles keine zusätzlichen Messungen; die Angaben des elektrischen Meßgerätes, des Elektrometers oder Galvanometers, sind einfach der Anzahl der Ionen des gegebenen Typs proportional.

Die Massenspektrometer erlauben auch die Bestimmung der Atommassen, allerdings mit einer geringeren Genauigkeit als die Massenspektrographen. In der letzten Zeit bekamen sie eine große praktische Bedeutung durch ihre Verwendung bei der chemischen Gasanalyse (beispielsweise bei der Analyse der Kohlenwasserstoffe) und bei der massenspektrometrischen Isotopentrennung, von der weiter unten im § 20 gesprochen werden wird, bei der Massenspektrometer großer Leistung benutzt werden.

Als eine der wesentlichen Besonderheiten der Massenspektrometer erscheint die Fokussierung der divergenten Ionenbündel. Bei der Betrachtung des Massenspektrographen von Aston sahen wir, daß unter Fokussierung in diesem Gerät die Sammlung der Anteile gleicher Masse, aber verschiedener Geschwindigkeit in einem Brennpunkt verstanden wird. Dazu muß vor allem das Ionenbündel parallel gemacht werden, wozu es durch zwei enge, in einem großen Abstand voneinander angebrachte Blenden (B_1 und B_2 in Abb. 27) hindurchgesandt wird. Dies führt aber zu einem großen Verlust an Ionen; in der Sprache der Optik gesprochen, gewinnt das Gerät an Schärfe der Abbildung, verliert aber an Lichtstärke. Für die Konstruktionen der Massenspektrometer ist die Verwertung der verschiedenartigsten Methoden der Fokussierung divergenter Ionenbündel charakteristisch, sowohl die der Richtungen als auch die der Geschwindigkeiten.

Die Lösung dieser Aufgaben wird durch die Entwicklung der „geometrischen Elektronenoptik" bedeutend erleichtert, d. h. durch die Benutzung der bemerkenswerten Analogie zwischen der Mechanik und der geometrischen Optik für die Berechnung der Bahnen geladener Teile in elektrischen und magnetischen Feldern. Diese Methode wurde in der letzten Zeit wegen ihrer großen praktischen Bedeutung beim Fernsehen und beim Bau von Elektronenmikroskopen weiterentwickelt.

Die älteste und bei der Konstruktion von Massenspektrometern am häufigsten angewandte Methode der Richtungsfokussierung ist die Fokussierung im magnetischen Querfeld auf einem Bogenmaß von 180°. In § 9 sahen wir, daß ein schwach divergentes Ionenbündel mit bestimmtem Wert e/m fokussiert wird, wenn es in einem homogenen und in der ganzen Ausdehnung der Ionenbahn wirkenden magnetischen Querfeld einen Halbkreis beschrieben hat. Hierauf beruht die folgende Konstruktion eines Massenspektrometers, das zum ersten Mal von Dempster fast gleichzeitig mit dem Astonschen Massenspektrographen im Jahre 1918

gebaut wurde (Abb. 34). Die von der Quelle A ausgehenden Ionen, die beim Erhitzen eines Salzes des zu untersuchenden Metalles erzeugt werden, erhalten alle durch die zwischen A und C gelegene Potentialdifferenz V die gleiche Energie.[1]) Durch den Spalt S_1 gelangt das divergente Ionenbündel in das Gebiet des homogenen magnetischen Querfeldes $\mathfrak{H}$. Die Ionen, die verschiedenes e/m besitzen, werden in verschiedenen Punkten fokussiert werden, wie es in der Zeichnung dargestellt wird. Ist nun wie hier die Energie der Ionen ein und dieselbe, so können wir zwischen dem die Lage des Brennpunktes bestimmenden Kurvenradius und der Masse (genauer m/e) leicht eine einfache Beziehung aufstellen.

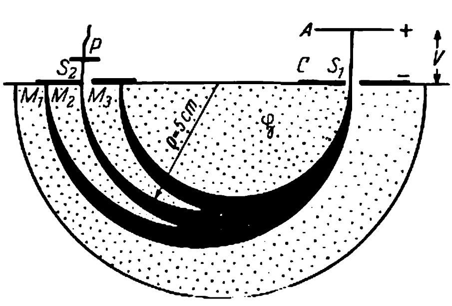


Abb. 34. Schema eines Massenspektrometers mit Fokussierung

Wir haben

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \qquad (5,4)$$

$$\varrho = \frac{mv}{|\mathfrak{H}|e}, \qquad (4,9)$$

woraus sich sofort

$$\frac{m}{e} = \frac{|\mathfrak{H}|^2 \varrho^2}{2V}$$

oder

$$\varrho^2 = \frac{2\frac{m}{e}}{|\mathfrak{H}|^2} V$$

ergibt. Wählen wir nun die Größe des Beschleunigungspotentials derart, daß der Kurvenradius ϱ bei gegebenen m/e einen bestimmten Wert annimmt, beispielsweise 5 cm wie in Abb. 34, so können durch den Ausgangsspalt S_2 Ionen beliebiger Masse austreten. Das Potential, bis zu welchem der Kollektor hierdurch aufgeladen wird (oder die Stärke des Ionenstromes auf diesen Kollektor), dient als Maß für die Anzahl der Ionen gegebener Masse.

Die in den letzten Jahren an dieser Methode durchgeführten Vervollkommnungen streben danach, eine möglichst große Ionenmenge zu erhalten. In seinem Massenspektrometer, das einer Reihe von späteren Konstruktionen als Vorbild diente, erreichte dies Blackin auf folgende Weise. Die Ionen werden in dem Raum zwischen der Elektrode P_1 und dem Spalt P_2 (Abb. 35) durch einen Elektronenstrom erzeugt, der senkrecht zur Zeichenebene diese im Punkt S schneidet. Das Selenoid erzeugt das homogene magnetische Querfeld, das ebenfalls zur Zeichenebene senkrecht steht, und dem Elektronenbündel, zu dem es parallel ist, keine Verbreiterung gestattet. Die entstandenen Ionen werden von dem elektrischen

---

[1]) Wird auf eine Anode das Salz eines Metalles aufgetragen und erhitzt, so geht bei der Entladung in einem verdünnten Gas von der Anode ein Strom positiver Metallionen in Gestalt der sogenannten Anodenstrahlen aus, wobei, und dies ist besonders wichtig, die Energie der entstehenden Ionen sehr klein ist; in jedem Falle ist sie wesentlich kleiner als jene Energie, die die Ionen bei der nachfolgenden Beschleunigung erwerben, so daß alle Ionen gleiche Energie erhalten werden, da sich der geringe Unterschied in der Anfangsenergie als unwesentlich erweist.

Feld zwischen P_1 und P_2 in den Raum zwischen den Blenden P_2 und P_3 eingeschossen, wo ein stärkeres elektrisches Feld wirkt. Die durch den Spalt P_3 hindurchgegangenen Ionen werden von dem magnetischen Feld auf dem Bogen π fokussiert, wie das bereits weiter oben dargelegt wurde. Durch entsprechende Wahl des Magnetfeldes können die Ionen gezwungen werden, durch den Spalt P_4 in den FARADAY-Becher F einzutreten, dessen Ladung dann als Maß für die Stromstärke der Ionen gegebener Masse dient. Alle Blenden haben zur Vergrößerung der Anzahl der durch sie hindurchgehenden Ionen eine große Länge.

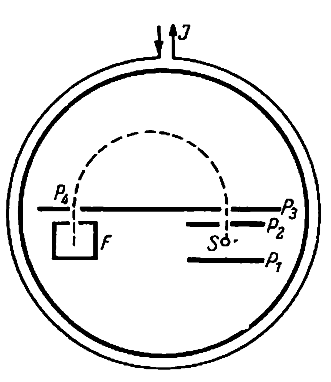


Abb. 35. Schema des Massenspektrometers von BLACKIN

In Abb. 36 ist als Beispiel die Analyse der Isotopenanteile von Kadmium angegeben, die mit einem verbesserten Spektrometer der beschriebenen Art durchgeführt wurde. Die Zahlen auf der Abszisse stellen die abgerundeten Atommassen der Isotope dar; die scharfen Maxima entsprechen den Isotopen des Kadmiums mit den Massen 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 116. Das Verhältnis der Ionenströme, deren Größen auf der Ordinate abzulesen sind, ergibt sofort den prozentualen Anteil der Isotopen (sieheTabelle S. 52).

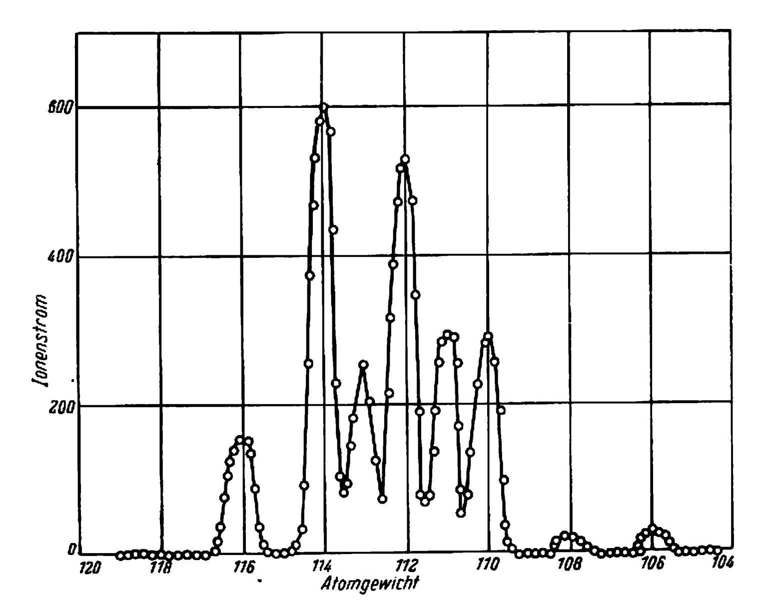


Abb. 36. Isotope des Kadmiums

Das homogene, auf die gesamte Ausdehnung der halbkreisförmigen Flugbahn der Ionen wirkende magnetische Querfeld stellt vom Gesichtspunkt der Elek-

tronenoptik eine Zylinderlinse dar, die eine Abbildung des Spaltes S_1 liefert. In der Elektronenoptik wird gezeigt, daß ein homogenes Magnetfeld, das in dem begrenzten Bereich eines Sektors mit dem Winkel ϑ wirkt, dann als Zylinderlinse er-

Massenzahl	106	108	110	111	112	113	114	116
Prozentsatz	1,215	0,875	12,39	12,75	24,07	12,26	28,86	7,58

scheinen kann, wenn der Zentralstrahl des divergenten Ionenbündels normal zu den Grenzen des Feldes ein- und austritt (Abb. 37). Hierbei findet eine Fokussierung statt, wie auch der Winkel des Sektors sein möge, nur müssen die Winkel β, γ, ϑ durch die Beziehung $\beta + \gamma + \vartheta = \pi$ verknüpft sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Ionenquelle, die Spitze des Sektors und der Brennpunkt auf einer Geraden liegen. Ist $\vartheta = \pi$, so erhalten wir den schon behandelten Fall der Fokussierung kreisförmiger Flugbahnen.

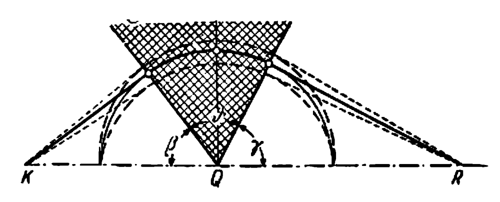


Abb. 37. Richtungsfokussierung mit Hilfe eines begrenzten magnetischen Feldes

Das radiale elektrische Feld eines Zylinderkondensators kann ebenfalls zur Fokussierung divergenter Ionenstrahlbündel benutzt werden. In diesem Falle liegt, wie wir schon im § 9 sahen, der Brennpunkt um 127°17′ von der Quelle entfernt. Als besonders wirk-

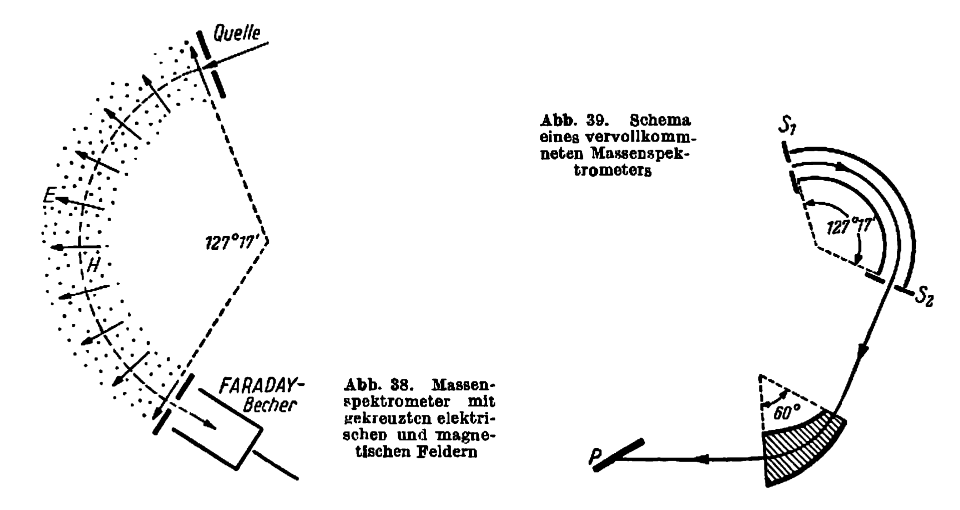


Abb. 38. Massenspektrometer mit gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern

Abb. 39. Schema eines vervollkommneten Massenspektrometers

sam erscheint die in einigen Massenspektrometern benutzte Verbindung eines radialen elektrischen Feldes mit einem magnetischen Querfeld (Abb. 38).

Eine doppelte Fokussierung durch ein radiales elektrisches und ein magnetisches Sektorfeld wurde von Bainbridge und Jordan bei dem Bau eines Massenspektro-

graphen großer Intensität und mit besonders hohem Auflösungsvermögen benutzt. In diesem Gerät (Abb. 39) wird zu Anfang das divergente Ionenbündel durch das radiale elektrische Feld fokussiert, und hierauf gibt erst das magnetische Sektorfeld mit dem Winkel von 60° auf der Photoschicht ein flaches Massenspektrum. Die „Lichtstärke" dieses Gerätes ist derart, daß für helle Linien die Expositionszeit nur 1 bis 5 s beträgt und sich bei den schwächsten Linien erst auf 180 s vergrößert. Das Auflösungsvermögen, das durch das Verhältnis der minimalen Massendifferenz ΔM, bei welcher die Linien noch getrennt sichtbar sind, zur Masse M selbst in Abhängigkeit von der Spaltbreite gegeben ist, schwankt zwischen $^1/_{6000}$ und $^1/_{15000}$.

§ 17. Die Massen und der prozentuale Anteil der Isotope

Bereits in den Jahren 1906–1910 wurde bei der Untersuchung der chemischen Eigenschaften bei radioaktiven Elementen beobachtet, daß Elemente existieren, die auf chemischem Wege nicht getrennt werden können, obwohl ihre Atomgewichte verschieden sind. Ein solches Elementepaar ist beispielsweise Mesothorium und Radium. J. J. Thomson konnte unter Benutzung der von ihm entdeckten Parabelmethode im Jahre 1913 zeigen, daß sich auch das nichtradioaktive Gas Neon als Gemisch zweier nicht unterscheidbarer Atomarten, also zweier Isotope mit den Massen 20 und 22, darstellt (siehe Abb. 26a), während das in der Chemie angenommene Atomgewicht 20,2 beträgt. Hieraus ist zu schließen, daß dieses „chemische" Atomgewicht tatsächlich nur das Mittel aus den Atomgewichten der beiden Isotope 20 und 22 ist. Bei der Anwendung des von ihm erbauten Massenspektrographen beobachtete Aston später, daß die zwei oder mehr Isotope besitzenden Elemente keineswegs eine Ausnahme darstellen, sondern gerade umgekehrt jene Elemente als Ausnahme erscheinen, bei denen keine stabilen, d. h. nichtradioaktiven Isotope beobachtet werden konnten, wie beispielsweise bei Natrium und Fluor. Aber auch in diesen Fällen zeigte die Entdeckung der künstlichen Radioaktivität, daß es dann immer radioaktive Isotope gibt, wie z. B. die Radioaktiven Na^{22}, Na^{24} neben dem stabilen Isotop Na^{23}.

Die genaue Bestimmung der Atommassen der Isotope wird mit Hilfe des Massenspektrographen durchgeführt. Die Anwendung der Photometrie läßt auch die Bestimmung der prozentualen Häufigkeitsverteilung der Isotope durch den Schwärzungsgrad der Photoschicht zu. Jedoch ist genauer und einfacher der prozentuale Anteil mit Hilfe der im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Massenspektrometer zu ermitteln. Dabei ist es charakteristisch, daß mit ihrer Hilfe der prozentuale Anteil schnell und mit hoher Genauigkeit bestimmt werden kann.

Bereits die ersten Bestimmungen der wahren Atommassen, die von Aston mit einer Genauigkeit bis zu 0,001 durchgeführt wurden, zeigten, daß die Atommassen immer durch fast ganze Zahlen im Verhältnis zu der mit 16,000 angenommenen Masse des Sauerstoffs ausgedrückt werden können. Als Ausnahme erscheint der Wasserstoff, dessen Atommasse in den angegebenen Genauigkeitsgrenzen stark von der Einheit abweicht und gleich 1,008 ist. Die *chemischen* Atomgewichte erscheinen als die Mittelwerte der Massen aller Isotope des gegebenen Elementes, woraus sich die Abweichungen der chemischen Atomgewichte einiger Elemente

von ganzen Zahlen erklären. So besitzt beispielsweise Magnesium die folgende relative Isotopenhäufigkeit:

Massenzahl	24	25	26
Prozentsatz	78,60	10,11	11,29

Hieraus ergibt sich eine mittlere Masse von 24,33, gleich dem chemischen Atomgewicht des Magnesiums von 24,32.

Die Bestimmung der Atommassen wird mit Hilfe der vervollkommneten Massenspektrographen bis zur vierten oder fünften Dezimalen genau durchgeführt. Bei einer solchen Genauigkeit lassen die erhaltenen Zahlen geringe Abweichungen von ganzen Zahlen erkennen. Die Bedeutung und der Grund dieser Abweichungen werden in dem Abschnitt XVIII des zweiten Bandes dieses Buches behandelt.

§ 18. Isotopentrennung mit Hilfe von Diffusionsmethoden

Die in der Natur vorkommenden Elemente stellen sich als Gemische stabiler Isotope dar, wobei mit geringen Ausnahmen diese Gemische streng konstant sind. Eine wesentliche Bedeutung hat nun die Darstellung der einzelnen Isotope in reiner Form. Diese Aufgabe besitzt gegenwärtig einen sehr wichtigen wissenschaftlichen und technischen Wert. Ihre Bedeutung ist besonders in den letzten Jahren in Verbindung mit der Entwicklung der sogenannten Kernenergetik gewachsen (Band II, Abschnitt XXIII).

Die Darstellung reiner Isotope oder auch nur angereicherter Isotopengemische ist eine der schwierigsten Aufgaben. Bei der Isotopentrennung müssen diejenigen Eigenschaften benutzt werden, die von der Masse abhängen. Aber die prozentuale Massendifferenz hat nur bei den Isotopen der leichtesten Elemente einen feststellbaren Wert. So beträgt beispielsweise bei Wasserstoff die Massendifferenz zwischen dem schweren (H^2 oder D) und dem leichten (H^1) Isotop 100%, aber bereits für die Isotope des Kohlenwasserstoffs C^{12} und C^{13} ist dieser Unterschied nur noch gleich 8,35% und für die Isotope des Uran U^{238} und U^{235} nur noch 1,2%.

Bevor wir zur Betrachtung der verschiedenen Methoden der Isotopentrennung übergehen, legen wir die Fachausdrücke fest, mit welchen wir es im weiteren zu tun haben. Das Gemisch zweier Isotope verschiedener Masse werde der Trennung unterworfen, und es sei σ der Teil der gesamten Atomanzahl, der auf eines der beiden Isotope bis zur Trennung entfällt, und $\lambda = 1 - \sigma$ der Anteil des anderen Isotops ebenfalls bis zur Trennung; entsprechend werden Σ und $\Lambda = 1 - \Sigma$ eben jene Anteile nach der Trennung bedeuten. Die durch die Gleichung

$$q = \frac{\Sigma/\Lambda}{\sigma/\lambda} \tag{18,1}$$

bestimmte Größe werden wir den Trennungskoeffizienten nennen. Das in der Natur anzutreffende Neon besteht beispielsweise zu 90% aus Atomen mit der Masse 20 und zu 10% aus Atomen mit der Masse 22. Wollen wir in dem Gemisch die schwe-

rere Komponente derart anreichern, daß ihr Anteil gleich 50% wird, so muß der Trennungskoeffizient gleich

$$q = \frac{0{,}5/0{,}5}{0{,}1/0{,}9} = 9$$

werden.

Von den von der Masse abhängenden und deshalb für die Isotopentrennung tauglichen Prozessen betrachten wir vor allem die Diffusion. Nehmen wir ein Gas, welches sich als Gemisch von Teilchen mit zwei verschiedenen Massen darstellt. Da sich das Gas im Temperaturgleichgewicht befindet, sind die mittleren kinetischen Energien der Teilchen beider Sorten gleich $\overline{m_1 v_1^2} = \overline{m_2 v_2^2}$, und deshalb die mittleren Geschwindigkeiten den Quadratwurzeln aus den Massen umgekehrt proportional

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,.$$

Infolgedessen werden die leichteren Teilchen bei der Diffusion vorlaufen und die schweren zurückbleiben.

Die Möglichkeit einer Trennung von Gemischen zweier Gase auf dem Wege der Diffusion durch poröse Scheidewände war schon im Jahre 1896 von Rayleigh theoretisch erkannt worden. Es möge sich auf der einen Seite der Scheidewand ein Gas befinden, das aus Molekülen zweier sich durch ihre Massen unterscheidender Arten besteht, und auf der anderen Seite ein Vakuum. Im Verlaufe der Diffusion wird sich die leichte Komponente auf der einen Seite der Scheidewand anreichern und die schwerere auf der anderen. Die günstigsten Bedingungen, unter denen die beste Trennung erreicht wird, bestehen nach Rayleigh darin, daß erstens die Größe der Poren bedeutend kleiner als die mittlere freie Weglänge der Moleküle ist und zweitens sich die langsamer diffundierende Komponente nicht an der Oberfläche der porösen Scheidewand ansammelt.

Außerdem müssen wir im Auge behalten, daß die Zusammensetzung des hindurchdiffundierenden Gemisches nicht nur von dem Verhältnis der Geschwindigkeiten der schweren zu den leichten Molekülen abhängt, sondern auch von der relativen Konzentration dieser Moleküle im anfänglichen Gemisch. Dieser Umstand ist sehr wesentlich, weil das Ausgangsgemisch im Diffusionsprozeß allmählich an leichten Molekülen verarmt und deshalb die Zusammensetzung des durch die poröse Scheidewand hindurchtretenden Gases sich immer mehr von dem Ausgangsgemisch unterscheidet.

Das diffundierende Gas stelle nunmehr ein Gemisch zweier Isotope dar, die sich in bezug auf die Masse nur unbedeutend unterscheiden, wie dies auch tatsächlich der Fall zu sein pflegt. Dann wird nach Rayleigh der Anreicherungskoeffizient der schweren Komponente des nicht hindurchdiffundierten Gases durch die Formel

$$q = \sqrt[\nu]{\frac{\text{Anfangsraum}}{\text{Endraum}}} \qquad (18{,}1')$$

ausgedrückt, in der $\nu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}$ (m_1 und m_2 sind die Atommassen beider Isotope). Wenden wir diese Formel auf das Neon an. Die Massen seiner Isotope sind $m_2 = 20$ und $m_1 = 22$, folglich $\nu = 21$. In den ersten von Aston durchgeführten Versuchen zur Trennung der Neon-Isotope war das Verhältnis der Räume größer

als 500 und kleiner als 10000. Nach der Formel (18,1′) wird der Trennungskoeffizient einen Wert zwischen 1,3 und 1,5 erhalten, der 6- bis 7mal kleiner ist als jener, der zur Anreicherung des Gemisches mit der schweren Komponente bis zu 50% notwendig ist. Bei den Isotopen des Chlors mit den Massen 36 und 38 wird HCl der Diffusion unterzogen; hier ist der Exponent in der Formel (18,1′) schon gleich 37, und bei einer Änderung des Raumes um das 10^4fache wird der Anreicherungskoeffizient gleich 1,3.

Die betrachteten Beispiele zeigen, daß auf dem Wege einer einfachen Diffusion nur eine kleine Änderung in der Zusammensetzung des Isotopengemisches erreicht werden kann. Ein viel besseres Ergebnis wird bei der Verwendung der vielstufigen oder Kaskadenmethode erreicht, die zuerst von G. Hertz benutzt wurde. Die von ihm verwendete Apparatur besteht aus einer Reihe folgerichtig verbundener Kettenglieder, von denen ein jedes den eintretenden Gasstrom in zwei sich etwas in ihrer Zusammensetzung unterscheidende Teile zerlegt. Um den Bau und die Arbeitsweise einer solchen Kaskade zu begreifen, müssen wir zu Anfang die einzelnen Trennungsglieder betrachten.

Die einfachste Form eines solchen Gliedes ist in der Abb. 40 angegeben. Es besteht aus einem Rohr aus porösem Material, das in das Innere eines weiteren Glasrohres verlegt ist. Strömt bei A ein Gemisch aus zwei Gasarten mit verschiedenen Teilchenmassen ein, so wird sein in das äußere Rohr hindurchdiffundierender Teil etwas mit der leichten Komponente angereichert sein. Dieser Teil wird mit Hilfe einer Pumpe durch B in das benachbarte obere Glied gepumpt, während der verbliebene Teil, der mit der schweren Komponente angereichert ist, durch D in das benachbarte linke Glied übertritt. Auf diese Weise wird tatsächlich das einzelne Glied den Gasstrom in zwei sich etwas in ihrer Zusammensetzung unterscheidende Teile zerlegen: links wird sich das Gas ansammeln, das mit der schweren Komponente angereichert ist, und oben das Gas mit der angereicherten leichten Komponente. Der Nachteil dieses Aufbaues besteht jedoch in folgendem: das im Inneren des porösen Rohres strömende Gas wird im Verlauf seines Vorwärtsschreitens mit der schweren Komponente angereichert. Daher wird das Gas, welches an dem linken Ende des Gliedes bei D hindurchdiffundiert, sich in seiner Zusammensetzung nur noch wenig von dem Gas unterscheiden, das bei A hindurchtrat.

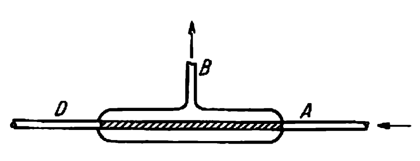


Abb. 40. Einfache Form eines Trennrohres

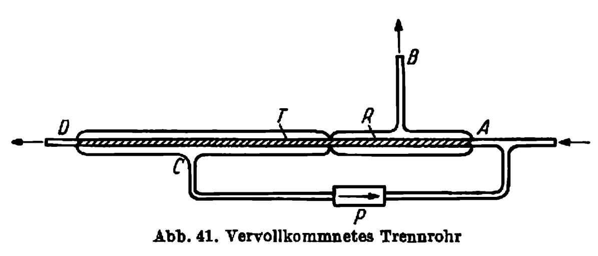


Abb. 41. Vervollkommnetes Trennrohr

Um diesen Mangel zu überwinden, teilte G. Hertz jedes Glied in zwei Teile, wie dies in Abb. 41 gezeigt wird. Nur jener Gasteil, der durch R diffundiert und mit der leichten Komponente angereichert ist, wird über B in das benachbarte obere Glied gepumpt. Der restliche Teil tritt in T ein, und weil nach dem Gesagten der hier diffundierende

Teil ungefähr eben denselben Zustand wie der in das Kettenglied eintretende besitzt, so wird er durch die Pumpe *P* über *C* abgepumpt und tritt bei *A* wieder in den Anfang des Gliedes ein, um sich von neuem der Diffusion und der entsprechenden Anreicherung zu unterwerfen.

In Abb. 42 ist eine kleine aus drei Trennzellen bestehende Kaskade abgebildet. V_l und V_s sind Ballons, in welchen sich das Gas mit der entsprechend vorherr-

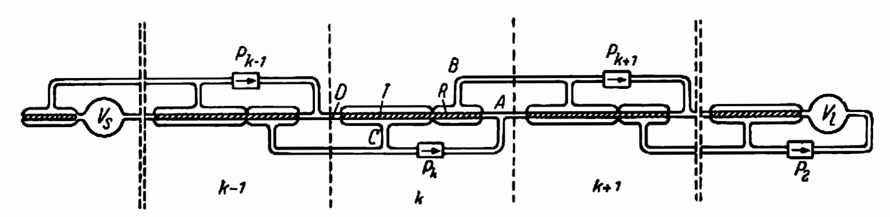


Abb. 42. Kaskade aus Diffusionszellen

schenden leichten oder schweren Komponente ansammelt. Über diese Ballons tritt das Gas von neuem in die Trennzellen zurück, bis sich schließlich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Das kleine Tonrohr links vom Ballon V_s wirkt nicht als Trennzelle, sondern dient zur Geschwindigkeitsregulierung des durch den Ballon zirkulierenden und in die benachbarte Trennzelle zurückfließenden Gases.

Die Wirkungsweise dieser Einrichtung wird schematisch durch die Abb. 43 erklärt, in welcher jede Zelle durch ein Quadrat gekennzeichnet ist. Im Anfangszustand ist die gesamte Kaskade mit dem Gemisch normaler Zusammensetzung gefüllt. Im Verlaufe der Diffusion wird jede Zelle nach rechts ein mit der leichten Komponente angereichertes Gas abgeben und nach links das mit der schweren

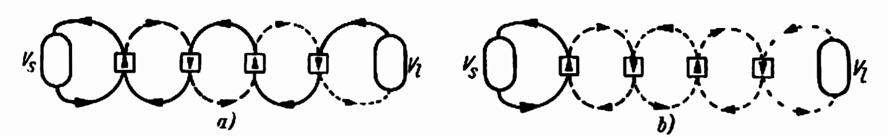


Abb. 43. Arbeitsschema einer Kaskade aus Diffusionszellen

Komponente angereicherte Gas. In Abb. 43 ist der Strom des mit der leichten Komponente angereicherten Gemisches durch Punktierung gekennzeichnet, während der Strom des mit der schweren Komponente angereicherten Gemisches durch eine ausgezogene Linie angedeutet wird. Aus der den Anfangszustand darstellenden Abb. 43a ist ersichtlich, daß sich durch die Arbeit der Trennzellen zwei Ströme einstellen: nach rechts der mit der leichten Komponente angereicherte und nach links der mit der schweren Komponente angereicherte Strom. Durch diese Bewegung wird sich die Zusammensetzung des Gases in den Ballons V_l und V_s auf entsprechende Weise ändern. Eine Änderung der Gemischzusammensetzung wird bis zu dem Zeitpunkt stattfinden, in welchem sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, d. h. bis die Zusammensetzung des Gases, das jede Zelle von den Nachbarn erhält, den Gemischen gleicht, die beiden Nachbarn von dieser Zelle übergeben

werden. Da sich aber die beiden, von jeder Zelle nach rechts und nach links abgegebenen Ströme wie früher in bezug auf den Anteil an leichten und schweren Komponenten um einen Koeffizienten q unterscheiden, so wird sich im stationären Zustand die Zusammensetzung des Gases, das zwischen den Paaren aufeinanderfolgender Glieder zirkuliert, von dem benachbarten gerade um diesen Koeffizienten q unterscheiden. Dies wird in Abb. 43b durch die unterschiedliche Strichelung angedeutet. Das rechte Gemisch, das zwischen der letzten Zelle und dem Ballon V_l kreist, ist in größtmöglichem Grade mit der leichten Komponente angereichert und in der Abbildung am feinsten gestrichelt. Die relative Konzentration der schweren Komponente des zwischen der letzten und vorletzten Zelle von rechts zirkulierenden Gemisches ist q-mal größer

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

und daher dichter gestrichelt. Für das folgende Paar gilt

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-2} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q^2\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

usw. Enthält nun die Kaskade z Glieder, so wird sich offensichtlich die Zusammensetzung des Gemisches im linken Ballon V_s schon um den Koeffizienten q^z von der des Gemisches im rechten Ballon V_l unterscheiden. Auf diese Weise wird der Trennungskoeffizient Q der gesamten Kaskade gleich

$$Q = q^z. \tag{18,2}$$

Für die Berechnung von q ist es notwendig zu wissen, welcher Anteil f des in die Trennzelle eintretenden Stromes durch das poröse Rohr R diffundiert (Abb. 41). Der in das Trennglied eintretende Strom teilt sich in drei Teile: der eine Teil diffundiert durch R und wird über R in das benachbarte rechte Glied gepumpt, der andere Teil, der durch T diffundiert, wird durch die Pumpe P zur nochmaligen Zirkulation in dieselbe Zelle zurückgepumpt, während der dritte Teil durch D in die benachbarte linke Zelle übertritt. Sind die Längen R und T gleich, so sind alle drei Stromanteile unter sich gleich und $f = {}^1/_3$; sind aber R und T ungleich, so hängt f von dem Verhältnis ihrer Längen l_R zu l_T ab. Wie eine einfache Rechnung zeigt, wird im allgemeinen Fall

$$f = \frac{1}{2 + \frac{l_R}{l_T}}. \tag{18,3}$$

Bei $l_R = l_T$ erhalten wir wie früher $f = {}^1/_3$. Die von HERTZ abgeleitete Formel für den Trennungskoeffizienten eines einzelnen Gliedes ist

$$q = \frac{\mu}{1 - (1 - f)^\mu}, \tag{18,4}$$

worin

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \qquad (m_1 < m_2)$$

ist; der Trennungskoeffizient der gesamten Kaskade wird nach (18,2)

$$Q = \left(\frac{f^\mu}{1 - (1 - f)^\mu}\right)^z, \tag{18,5}$$

worin z die Anzahl der Kaskadenglieder ist.

Zur Erklärung betrachten wir noch einmal das Beispiel des Neons. In der ersten HERTZschen Apparatur waren die Rohrlängen R und T gleich, so daß $f = {}^1/_2$. Da $\mu = \sqrt{\frac{20}{22}} = 0{,}954$, so finden wir nach der Formel (18,4) $q = 1{,}089$. Besteht die Kaskade aus 24 Gliedern, so erhalten wir für Q schon

$$Q = (1{,}089)^{24} = 7{,}73$$

und für eine Kaskade aus 48 Gliedern

$$Q = (1{,}089)^{48} = 59{,}75.$$

Wir sehen hieraus, daß durch die Benutzung einer Kaskade der Trennungskoeffizient stark anwächst und eine weitgehende Isotopentrennung ermöglicht wird.

Die beschriebene Methode wurde anfänglich zur Isotopentrennung bei einer Reihe leichter Elemente benutzt. Für die Trennung der Neonisotope war eine Kaskade aus 24 Gliedern verwendet worden. Das Gleichgewicht stellte sich nach 4 Stunden ein. Hierbei sammelte sich an Stelle des normalen Häufigkeitsverhältnisses $Ne^{20} : Ne^{22} = 9 : 1$ in dem Behälter auf dem „schweren Ende" der Apparatur ein Gemisch der Anteile $Ne^{20} : Ne^{22} = 1{,}25 : 1$. Das Volumen dieses Endproduktes betrug 4 cm³ bei Atmosphärendruck. Mit einer Kaskade aus 48 Gliedern wurde reines Ne^{22} erhalten. Vollständig wurden auch die Isotope des Wasserstoffes getrennt und eine Anreicherung mit schweren Komponenten bei Kohlenstoff und Stickstoff (mit den Isotopen C^{13} und N^{15}) durchgeführt.

Für die Arbeit der Kaskade hat die poröse Trennwand, durch welche die Diffusion erfolgt, eine wesentliche Bedeutung. Wie schon gesagt, erfordern die für die Trennung günstigsten Bedingungen eine besondere Auswahl der porösen Zwischenwand. HERTZ benutzte speziell angefertigte Tonröhren. Sie entsprachen jedoch nicht vollständig den Anforderungen, weswegen er die Methode so veränderte, daß die Diffusion nicht durch eine poröse Wandung, sondern in einem Quecksilberstrahl stattfand, der das mit der leichten Komponente angereicherte Gas mit sich forttrug. Das Trennglied dieser Methode kann als Diffusionspumpe angesehen werden, die vorzugsweise die eine Komponente des Gemisches abpumpt. Aus ähnlichen Gliedern setzen sich Kaskaden zusammen, die bis zu 50 Pumpen enthalten. Der Vorzug dieser Methode besteht vor allem in seiner schnelleren Einstellung des Gleichgewichtes. Mit ihrer Hilfe führten HERTZ und andere Forscher die Trennung oder Anreicherung einer ganzen Reihe von Isotopen leichter Elemente durch (Neon, Sauerstoff, Argon und Kohlenstoff).

Übung: Es sind die vollständigen Trennungskoeffizienten der aus 24 Gliedern bestehenden HERTZschen Anlage zu berechnen für $f = 0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}5$ und die Abhängigkeitskurve Q von f zu konstruieren.

§ 19. Die Isotopentrennung durch Thermodiffusion

Eine der wirksamsten Methoden der Isotopentrennung ist mit einer eigentümlichen Erscheinung verbunden, die Thermodiffusion genannt wird. Um diese Erscheinung überhaupt verstehen zu können, ist es notwendig, sich vor allem ihren Unterschied zu der gewöhnlichen Diffusion klarzumachen. Der klassische, die

Diffusion demonstrierende Versuch besteht in folgendem: stellen wir uns einen geschlossenen Raum vor, in den zwei Gase mit verschiedenen Molekulargewichten derart eingeführt sind, daß sich das schwere Gas unten und das leichtere darüber im Raum befinden. Jetzt werden sich infolge Diffusion die Moleküle des schwereren Gases (entgegen der Wirkung der Schwerkraft) nach oben verlagern, und die Moleküle des leichteren werden nach unten gelangen. Nach einiger Zeit werden wir ein vollkommen homogenes Gemisch der beiden Gase erhalten haben. Die gewöhnliche Diffusion führt auf diese Weise zu einer Vermischung von Gasen, die anfänglich getrennt waren.

Die Erscheinung der Thermodiffusion zeigt eine genau *umgekehrte Wirkung:* durch die Thermodiffusion findet bei Anwesenheit eines Temperaturgradienten in dem Gemisch der Gase eine teilweise Trennung des Gemisches statt. Dies wird durch das in Abb. 44 dargestellte Beispiel erklärt. Stellen wir uns einen Kasten vor, in welchem sich ein vollkommen homogenes Gemisch z. B. der Moleküle des Sauerstoffes und des Stickstoffes befindet: 50% O_2 + 50% N_2. Wird nun die untere Wand des Kastens auf einer Temperatur von 0° C und die obere Wand auf 500° C gehalten, so zeigt der Versuch, daß an der oberen, d. h. der heißeren Wand die Zusammensetzung des Gases 50,27% N_2 + 49,73% O_2 sein wird, während an der unteren, kälteren Wand eine Zusammensetzung von 49,73% N_2 + 50,27% O_2 auftritt. Auf diese Weise zeigt sich durch die Thermodiffusion an der heißeren Wand ein Überschuß an leichten Molekülen und entsprechend an der kälteren ein Überschuß an schweren Molekülen: die Thermodiffusion zerstört also die Homogenität des Gemisches und ruft eine teilweise Trennung ihrer leichten und schweren Komponenten hervor.

500°C

50%N_2+50%O_2

0°C

Abb. 44

Bezeichnen wir die Konzentration einer der Komponenten im Gemisch (beispielsweise des leichten) mit c, dann wird die Änderung dieser Konzentration an der heißeren Wand, mit T_2 und T_1 als Temperaturen beider Wände, durch die folgende Beziehung verbunden sein:

$$\Delta c = \varkappa \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{19,1}$$

worin $\varkappa$ der *Thermodiffusionskoeffizient* ist.

Die Existenz der Thermodiffusion wurde theoretisch vorhergesagt und später experimentell bestätigt. Die Theorie dieser Erscheinung enthüllte den folgenden interessanten Umstand: In der kinetischen Gastheorie werden die Zusammenstöße zwischen den Gasmolekülen manchmal einfach als Stoß idealelastischer Kugeln betrachtet, jedoch leidet diese Vorstellung bewußt an dieser starken Vereinfachung. Viel richtiger ist es, an Stelle der einfachen „Stöße" die Wechselwirkungen zwischen den Molekülen zu betrachten, die sich bei einer gegenseitigen Annäherung auf sehr kleine Entfernung durch ihre Abstoßung kundtun. Das Gesetz dieser Wechselwirkung kann in die Form $\frac{\text{const}}{r^\nu}$ gekleidet werden, worin r die Entfernung und ν ein Exponent ist. Es zeigt sich nun, daß für die Thermodiffusion theoretisch ganz verschiedene Resultate in Abhängigkeit von der Größe des Exponenten ν erhalten werden. So kann beispielsweise bei einigen Werten ν die Thermodiffusion ihr Vorzeichen ändern oder sogar ganz verschwinden. Insbesondere findet letzteres bei $\nu = 5$ statt.

Dieses Resultat ist in geschichtlicher Hinsicht deshalb interessant, weil MAXWELL bei der Entwicklung der kinetischen Gastheorie eine Hypothese benutzte, nach der die Abstoßung zwischen den Molekülen gerade dem Gesetz const/r^5 gehorcht und daher nicht die Notwendigkeit der Thermodiffusion ergab.

Aus dem bei der Beschreibung des Thermodiffusionsprozesses Gesagten wird klar, daß diese Erscheinung gut für die Isotopentrennung benutzt werden kann. Wird das Temperaturfeld in einer rechteckigen Kiste aufrechterhalten, deren Wände sich auf den Temperaturen T_2 und T_1 befinden, so ergibt sich für den Trennungskoeffizienten die folgende einfache Formel:

$$q = 1 + \frac{2}{3}\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\ln\frac{T_2}{T_1}\,.$$

Benutzen wir diese Formel für den Fall des Neons ($m_1 = 22$, $m_2 = 20$) und setzen $T_1 = 900°\,\text{C}$ und $T_2 = 300°\,\text{C}$, so erhalten wir

$$q = 1{,}035.$$

Dieses ist also von derselben Größenordnung, wie für ein Glied in der HERTZschen Kaskade, woraus sich die Möglichkeit einer Benutzung der Thermodiffusion für die Isotopentrennung ergibt. Wird eine Kaskade aus z Gliedern benutzt, so erhalten wir wie oben den gesamten Trennungskoeffizienten $Q = q^z$.

CLUSIUS und DICKEL benutzten zur Verstärkung der Trennwirkung neben der Thermodiffusion auch noch die Konvektion. Nehmen wir einen engen rechtwinkligen Kasten (Abb. 45), dessen Wände verschiedene Temperaturen haben. An der wärmeren Wand wird das Gas sich ausdehnen und nach oben steigen und an der kälteren Wand nach unten sinken. Dasselbe wird erreicht, wenn an Stelle des rechteckigen Kastens ein Zylinder mit dem Radius R_a benutzt wird, in dessen Innern sich ein koaxialer Zylinder mit dem Radius R_i befindet, der auf einer höheren Temperatur gehalten wird und beispielsweise von einem durch elektrischen Strom aufgeheizten Draht gebildet wird (Abb. 46).

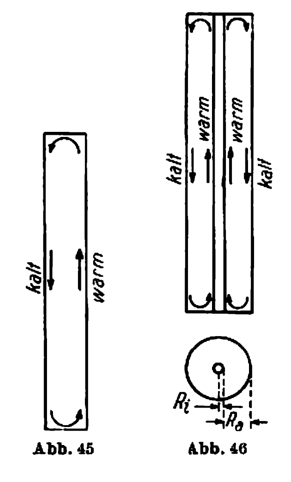


Abb. 45 Abb. 46

Es ergeben sich als Folge der *Konvektion* zwei in entgegengesetzter Richtung verlaufende Ströme. Befindet sich nun in dem Kasten oder Rohr ein Gemisch zweier Gase mit verschiedenen Molekulargewichten, so wird die Thermodiffusion außerdem einen Strom hervorrufen, der zu dem Konvektionsstrom senkrecht gerichtet ist und somit eine größere Konzentration an leichteren Molekülen an der erhitzten Wand als an der kalten bewirkt. Die gemeinsame Wirkung beider Effekte führt zu einem bemerkenswerten Unterschied in der Konzentration an den oberen und unteren Enden des Rohres.

Betrachten wir diese Erscheinung etwas ausführlicher. Stellen wir uns wieder einen rechteckigen Kasten vor (Abb. 47), dessen gegenüberliegende Wände auf verschiedenen Temperaturen ($T_2 > T_1$) gehalten werden. Die Koordinatenachsen legen wir, wie in Abb. 47 gezeigt, und betrachten zu Anfang nur einen

Strom, der durch die Thermodiffusion und die gewöhnliche Diffusion bedingt ist. Befindet sich im Kasten ein Gemisch zweier Gase unterschiedlicher Molekulargewichte und wird wieder die Konzentration der leichteren Komponente durch c angegeben, so ruft die Thermodiffusion einen Transport von Materie hervor, deren Menge proportional $\frac{\partial \ln T}{\partial x}$ sein wird. Die Stärke des Thermodiffusionsstromes oder die Stoffmenge, die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zum Strom liegende Fläche übertragen wird, ist gleich

$$\varrho D \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}, \tag{19,2}$$

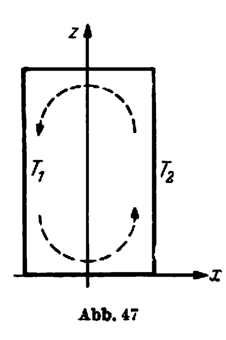


Abb. 47

worin ϱ die Gasdichte und D der Diffusionskoeffizient sind. Infolge der Thermodiffusion zwischen der erhitzten und der kalten Wand entsteht ein Unterschied in der Konzentration der schweren und leichten Komponenten. Dieser Unterschied ruft eine Erscheinung hervor, die der gewöhnlichen Diffusion, die ja die Konzentrationen der gesamten Gasmasse auszugleichen sucht, entgegengerichtet ist. Die Stärke dieses letzten Stromes ist offensichtlich gleich

$$-\varrho D \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{19,3}$$

Die gesamte Stromstärke J erhalten wir, wenn wir beide Prozesse und damit die beiden Formeln (19,2) und (19,3) benutzen:

$$J = \varrho D \left(\varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}\right). \tag{19,4}$$

In dem sich einstellenden Zustand ist die durch die Thermodiffusion und die Diffusion bedingte Stromstärke gleich null, und wir erhalten aus (19,4)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \tag{19,5}$$

Die gemeinsame Wirkung der Thermodiffusion und der gewöhnlichen Diffusion ruft somit bei Anwesenheit eines Temperaturgradienten zwischen den Wänden einen *Konzentrationsgradienten* der Komponenten des Gemisches hervor. Auf irgendwelche Weise möge in dem Kasten eine Zirkulation in der in Abb. 47 durch Pfeile angegebenen Richtung hervorgerufen worden sein. Hierbei wird die Gasmenge, die sich an der rechten Wand nach oben bewegt, gleich der Gasmenge sein, die an der linken Wand nach unten sinkt. Also wird der gesamte *Materialstrom* durch einen beliebigen horizontalen Querschnitt gleich null sein. Jedoch ist der Strom der verschiedenen Komponenten des Gasgemisches *von null verschieden*, da nach Formel (19,5) infolge der Thermodiffusion im stationären Zustand ein zur erhitzten Wandung gerichteter Konzentrationsgradient der leichten Komponente bestehen muß. Daher hebt die Zirkulation eine größere Menge der leichten Komponente an der erhitzten Wand nach oben, als sich an der kalten Wandung senkt. Dies führt dazu, daß sich allmählich ein *vertikaler* Konzentrationsgradient einstellt, durch den sich oben ein Überschuß an leichter Komponente und unten ein Überschuß der schweren Komponente ergibt.

Der Wert der beschriebenen Methode liegt darin, daß sich die Zirkulation des Gases, deren Bedeutung durch die dargelegten Überlegungen erklärt wurde, unter Wirkung der Schwerkraft von selbst einstellt. Bedenken wir, daß alles, was bisher über die Gemische von Gasen mit verschiedenen Molekulargewichten gesagt wurde, sich ebenso auf Isotopengemische mit verschiedenen Massen bezieht.

In der Abb. 48 wird eine Rohranordnung für die Isotopentrennung bei Chlor gezeigt. Das Rohr wirkt nach dem in Abb. 46 erklärten Prinzip der zylindrischen Trennzelle. Als innerer Zylinder dient ein elektrisch heizbarer Platindraht von 0,4 mm Durchmesser; der Durchmesser des äußeren Rohres beträgt 8,4 mm. Für die Isotopentrennung bei Chlor wurden 5 zu einer Kaskade verbundene Rohre benutzt: ihre Länge war 7 m, 8 m, bei zwei Rohren 6 m und bei einem Rohr 9 m, so daß die Gesamtlänge 36 m betrug. Zur Trennung wurde Chlorwasserstoff benutzt, ein Gemisch der Moleküle HCl^{35} und HCl^{37}. Hierbei wurden von dem schweren Bestandteil täglich 8 cm^3 HCl mit einem Gehalt von 99,4% HCl^{37} und von der leichten Komponente 25 cm^3 HCl mit einem Gehalt von 99,6% HCl^{35} erhalten. Später gelang es, HCl mit einem Gehalt von 99,6% HCl^{35} bei einer gesamten Rohrlänge von bereits 20 m darzustellen.

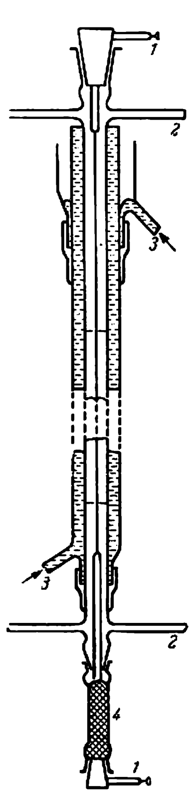


Abb. 48. Trennrohr für Thermodiffusion

Diese Methode wurde auch für die Trennung der Neonisotope angewandt, und es gelang, einige Liter reines Neon herzustellen. Ebenso ist eine Anreicherung der schweren Komponente C^{13} bis zu 6,6% bei Kohlenwasserstoff (der normale Bestand des Kohlenstoffs ist $C^{12} : C^{13} = 99{,}1 : 1$) mit einer Ausbeute von einigen Milligramm pro Tag erreicht worden.

Die Methode der Thermodiffusion erwies sich auch bei der Trennung flüssiger Isotopengemische als geeignet. So wurde zum Beispiel eine Lösung von $ZnSO_4$ der Thermodiffusion unterworfen, wobei die Lösung sich zwischen zwei im Abstand von 0,25 mm angebrachten Scheiben mit einem Durchmesser von 90 cm befand. Zwischen den Scheiben wurde eine Temperaturdifferenz von 50° C aufrechterhalten. Das normale Verhältnis der Isotopenanteile des Zinks 64 und 68 ist gleich 2,93; nach der Thermodiffusion zeigte sich an der unteren Scheibe ein Verhältnis von $Zn^{64} : Zn^{68} = 2{,}7$ und an der oberen Platte $Zn^{64} : Zn^{68} = 3{,}2$.

Der Prozeß der Gleichgewichtseinstellung im Falle flüssiger Systeme dauert länger; die Kolonnen für die Trennung sind allerdings weniger lang als im Falle der Gase.

Trotz der großen Einfachheit erweist sich der beschriebene Aufbau für die Isotopentrennung als überaus wirksam. Zum Vergleich dieser Methode mit der Diffusionsmethode wurden Trennungsversuche an Isotopen des schweren Gases Xenon mit Hilfe eines Trennrohres von 2,5 m Länge und einem Durchmesser von 5 mm und einem auf 1200–1750° C erhitzten zentralen Draht und gleichzeitig mit Hilfe einer Kaskade aus 12 Diffusionszellen durchgeführt. Es zeigte sich, daß die Wirksamkeit eines Rohres von 1 m Länge die gleiche wie bei 12 Diffusionszellen war.

§ 20. Die Isotopentrennung mit Hilfe gekoppelter elektrischer und magnetischer Felder

Als überaus wirksame Mittel zur Isotopentrennung erscheinen die massenspektrometrischen Methoden. Tatsächlich ist jeder Massenspektrograph und insbesondere das Massenspektrometer im Wesen ein Gerät zur vollständigen Isotopentrennung. Nehmen wir an, daß an den Stellen, die den Lagen der Brennpunkte der abzuscheidenden Massen entsprechen, Spalte vorgesehen sind, hinter welchen sich Auffänger befinden, so werden sich die reinen Isotope in diesen Auffängern sammeln.

Durch die geringe Ionenstromstärke ist allerdings die Stoffmenge, die auf solchen Auffängern gesammelt werden kann, nur verschwindend klein; bei gewöhnlichen Massenspektrometern ist die Geschwindigkeit der Materialanhäufung in der Größenordnung von Tausendsteln eines Mikrogramms (10^{-9} g) pro Stunde.

Die Methode dieser Massenspektrographen ist daher in allen jenen Fällen ausreichend, wo bereits eine sehr kleine Menge des getrennten Isotops genügt. Wünschen wir aber eine große Menge zu erhalten, so begegnen uns zwei Hauptschwierigkeiten. Da im Massenspektrographen das Material durch den Ionenstrom übertragen wird, müssen erstens zur Herstellung großer Isotopenmengen die Ströme sehr kräftig sein. Dies führt auf die Notwendigkeit der Herstellung kräftiger Ionenquellen. Auch wenn diese zur Verfügung stehen, wird sich zweitens die Vergrößerung der Stromstärke über einen Grenzwert hinaus als unzweckmäßig erweisen, weil die bei starken Ionenströmen entstehende Raumladung das Auflösungsvermögen des Massenspektrographen stark herabsetzt und somit eine Vergrößerung der Stromstärke nicht zu einer größeren Geschwindigkeit bei der Anhäufung getrennter Isotope führt.

Betrachten wir diese Frage etwas ausführlicher. Wir haben einen Strom, der aus Ionen zweier Isotope mit den Massen M_1 und M_2 (in Gramm) besteht. Wie wir aus § 16 wissen, wird ein homogenes magnetisches Querfeld jedes der Isotope in seinem Brennpunkt fokussieren, wobei die Lage dieses Brennpunktes durch den Radius der von dem Ion beschriebenen Flugbahnkurve bestimmt wird. Zur Ausrechnung dieses Kurvenradius hatten wir im § 16 die Formel (4,9) benutzt, die sich aus der Übereinstimmung der LORENTZ-Kraft $|\mathfrak{H}|ev$ mit der Zentrifugalkraft mv^2/ϱ ergibt:

$$\frac{mv^2}{\varrho} = |\mathfrak{H}|ev. \qquad (20,1)$$

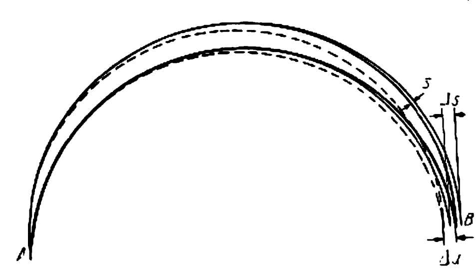


Abb. 49. Ionenwege zweier Isotope

Sehen wir jetzt, welchen Einfluß die Raumladung auf die Schärfe des Brennpunktes ausübt. In Abb. 49 sind die Wege von Ionen mit wenig unterschiedlichen Massen in einem homogenen magnetischen Querfeld durch ausgezogene und punktierte Linien dargestellt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Ausdehnung der Ionenbündel senkrecht zur Zeichenebene sehr groß ist. Ist die gesamte Ionenstromstärke auf der Einheitslänge senkrecht zur Zeichenebene gleich J, so ist die auf die Einheitslänge senkrecht zur Zeichenebene entfallende Elektrizitätsmenge gleich $\frac{J}{v}$, wobei v die Ionengeschwindigkeit ist. Diese auf solche Weise geschaffene Raumladung wirkt ihrerseits auf die Ionen.

Betrachten wir jetzt von jedem der Bündel die beiden äußersten Ionenbahnen. Nehmen wir an, daß die Änderung der Bahnkrümmung beim Übergang von einem Bündel zum anderen nicht groß ist, so erhalten wir bei Anwendung des Theorems von Gauss-Ostrogradski den folgenden Ausdruck für die Kraft, die auf die verschiedenen Ionenbahnen von der Raumladung ausgeübt wird:

$$F = 2\pi \frac{J}{v} e\,, \tag{20,2}$$

worin e die Ladung des Ions ist. Diese Kraft wird in bezug auf das Bündel immer nach außen gerichtet sein; auf ein sich auf der oberen Bahn bewegendes Ion wird die Kraft vom Zentrum der Flugbahnen weggerichtet und bei einem auf der unteren Bahn sich bewegenden Ion zum Zentrum hin gerichtet sein. Dadurch wird die Raumladung den Brennpunkt verschmieren. Zur Berechnung der Bündelbreite im Brennpunkt ist es notwendig, an Stelle der Beziehung (20,1) eine Gleichgewichtsbedingung zwischen der Zentrifugalkraft und der Lorentz-Kraft *plus einer von seiten der Raumladung wirkenden Kraft* aufzustellen. Beachten wir, was über die Richtung dieser Kraft gesagt wurde, dann erhalten wir die folgenden Gleichungen für die sich auf der äußersten Flugbahn bewegenden Ionen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Mv^2}{\varrho_1} &= |\mathfrak{H}|ev + 2\pi \frac{Je}{v}\,, \\ \frac{Mv^2}{\varrho_2} &= |\mathfrak{H}|ev - 2\pi \frac{Je}{v}\,, \end{aligned}\right\} \tag{20,3}$$

woraus

$$\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{4\pi Je}{Mv^3}$$

folgt. Bezeichnen wir mit ϱ den Bahnradius ohne Raumladung und setzen $\varrho_1\varrho_2 \approx \varrho^2$, dann erhalten wir für die Breite des Bündels nach Durchlaufen des Halbkreises

$$\Delta s = 2\,(\varrho_2 - \varrho_1) = \frac{8\pi e}{M} \cdot \frac{J\varrho^2}{v^3}\,. \tag{20,4}$$

Da der Massenunterschied der beiden betrachteten Isotope nur klein ist, werden die ihnen entsprechenden Brennpunkte in B (Abb. 49) sehr nahe beieinander liegen. Wir können deshalb damit rechnen, daß ihre Ionenbahnen fast auf der ganzen Strecke zusammenfallen und die Breite der Bündel bei B für beide Arten übereinstimmt und gleich Δs ist.

Ohne Raumladung ist der Abstand zwischen den Brennpunkten der Ionen mit den Massen M_1 und M_2

$$\Delta x = \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}\,\varrho. \tag{20,5}$$

Offensichtlich wird die Wirksamkeit des Gerätes für die Darstellung reiner Isotope durch das Verhältnis zwischen Δs und Δx bestimmt. Es läßt sich nun zeigen, daß die günstigsten Bedingungen bei $\Delta x = \Delta s$ bestehen. Um die Anhäufungsgeschwindigkeit der Substanz zu vergrößern, muß natürlich die Stromstärke J erhöht werden, aber gleichzeitig wird sich die Breite des Brennpunktes Δs proportional zu J ändern. Wird Δs größer als Δx, so wird die Anhäufungsgeschwindigkeit für reine Isotope in bezug auf die Einheit der Bündelbreite in der senkrecht zur Zeichenebene liegenden Richtung proportional $\frac{\Delta x}{\Delta s}\,J$ sein. Da nun

die Breite Δs ihrerseits proportional J ist, gewinnen wir nichts, wenn wir J so weit vergrößern, daß Δs größer als Δx wird. Aus der Bedingung $\Delta x = \Delta s$ erhalten wir mit Hilfe von (20,4) und (20,5):

$$J = \frac{M_1 v^3}{8\pi e \varrho} \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}. \tag{20,6}$$

Benutzen wir jetzt die Beziehungen $\frac{M_1 v^2}{\varrho} = \frac{|\mathfrak{H}| e v}{c}$ (e in elektrostatischen Einheiten gemessen) und $\frac{M_1 v^2}{2} = eV$, wobei V das Beschleunigungspotential der Ionen ist, so erhalten wir nach einigen Umformungen für die Menge aufgefangenen Materials

$$\mu \left[\frac{\text{mg}}{\text{Std}}\right] = 3{,}19 \cdot 10^{-8}\, \eta \frac{|A_2 - A_1|}{A_1} V |\mathfrak{H}|, \tag{20,7}$$

worin η das Verhältnis der Konzentrationen der Isotope im Material und A_2 und A_1 ihre auf ganze Zahlen abgerundeten Atommassen sind und ferner V in Volt und $\mathfrak{H}$ in Gauß gemessen werden. Betrachten wir beispielsweise den Fall der Isotopentrennung bei Calcium Ca^{44} und Ca^{40}, wo $\eta = {}^1/_{20}$ ist, so erhalten wir bei sehr hohen Werten von V und $\mathfrak{H}$ ($V = 50000$ V und $|\mathfrak{H}| = 16000$ Oersted)

$$\mu = 0{,}12 \frac{\text{mg}}{\text{Std}}$$

und eine entsprechende Gesamtstromstärke von 1,6 mA pro cm. Eine weitere Erhöhung dieser Stromstärke wäre unzweckmäßig. Hieraus folgt, daß die Methode des Massenspektrographen zur Darstellung reiner Isotope in großer Menge nur unter der Bedingung der Neutralisierung der Raumladung, die die Wirksamkeit dieser Methode auf das Äußerste herabsetzen würde, günstig ist.

Diese Möglichkeit zur Neutralisierung der Raumladung ist aber gegeben, wenn wir uns vorstellen, daß eine Anzahl von Elektronen in das Innere des Ionenbündels gebracht werden. Es ist leicht einzusehen, daß diese Elektronen im Innern des Bündels verbleiben und durch ihre negative Ladung einen Teil der positiven Ionenladung neutralisieren werden. Wie schon gezeigt wurde, bildet die Raumladung ein in bezug auf das Ionenbündel nach außen gerichtetes Feld, weswegen auf die negativen Elektronen eine in das Innere des Bündels gerichtete Kraft wirken wird. Diese erlaubt es den Elektronen nicht, das Bündel in der Querrichtung zu verlassen. Die Elektronen können sich nur längs der Achse des Bündels bewegen, jedoch können die Potentiale der Elektronen so gewählt werden, daß sich die Elektronen auch in dieser Richtung nicht entfernen können. Da außerdem das magnetische Querfeld vorhanden ist, so werden sich die Elektronen auf geschlossenen, zykloidenförmigen Bahnen bewegen, wie dies in der Abb. 50 angedeutet wird, und werden hierdurch die Raumladung der Ionen wirksam kompensieren.[1])

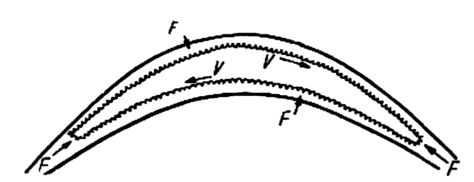


Abb. 50. Elektronenwege innerhalb des Ionenbündels

[1]) Die Rolle der Raumladung in elektrisch-magnetischen Isotopen-Trennanlagen wird in einem Artikel von L. SMITH, W. PARKINS und A. FORRESTER [Phys. Rev. **72**, 989 (1947)] untersucht, der dem vorliegenden Paragraphen zugrunde liegt.

§ 21. Die Isotopentrennung durch fraktionierte Destillation und Austauschreaktionen

Die Trennung zweier Flüssigkeiten auf dem Wege der fraktionierten Destillation ist ein Prozeß, der seit langem bekannt ist und in den Laboratorien und der Fabrikpraxis häufig angewendet wird. Hierbei destilliert zuerst die Flüssigkeit mit niedrigerer Siedetemperatur und höherem Dampfdruck, weswegen das Destillat mit der leichter siedenden Flüssigkeit angereichert sein wird, während der Rest einen Überschuß an Flüssigkeit mit niedrigerem Dampfdruck hat. Bei einer mehrmaligen Wiederholung dieser Operation können beide Flüssigkeiten getrennt werden.

Der Dampfdruck der Isotope hängt von ihrer Masse ab, und deshalb ist die fraktionierte Destillation im Prinzip für die Isotopentrennung anwendbar. Jedoch ist der Unterschied der Dampfdrücke meist so klein, daß die Anwendung dieser Methode auf gewöhnliche Weise vollkommen unzweckmäßig sein würde. In der Praxis werden bessere Ergebnisse mit der „Gegenstrommethode" erzielt, bei welcher der Dampf von unten nach oben und die Flüssigkeit von oben nach unten strömen und einander begegnen. Hierbei werden Maßnahmen getroffen, daß die Berührungsoberfläche zwischen der Flüssigkeit und dem Gas möglichst groß ist. Bei dem Molekülaustausch zwischen der Flüssigkeit und dem Gas zeigen die Moleküle der Flüssigkeit mit höherem Dampfdruck das große Bestreben, sich in der Gasphase zu konzentrieren. Diese Methode wird nur auf solche Isotope angewandt, die eine nicht zu kleine Differenz ihrer Siedetemperaturen besitzen.

Die Methode der Austauschreaktionen steht dem Wesen nach der Fraktionierung sehr nahe, ist aber bedeutend wirksamer als diese und besteht in folgendem: Wir betrachten ein zweiphasiges System, eine Flüssigkeit und über dieser ein Gas, beispielsweise gasförmiges Ammoniak NH_3 und die Lösung von Ammoniak in Wasser oder Alkohol oder schließlich auch Ammoniumnitrat $[NH_4]NO_3$, das in Lösung in NH_4^+ und NO_3^- dissoziiert ist. In diesem Falle wird eine Austauschreaktion stattfinden: der Stickstoff des gasförmigen Ammoniaks wird mit dem Stickstoff des in Lösung befindlichen Ammoniaks die Plätze tauschen. Diese Reaktion kann von beiden Seiten ausgehen und ein Gleichgewicht ergeben. Wenn sich Isotope gleicher Masse austauschen, so kann im allgemeinen die Reaktion nicht beobachtet werden. Es kann aber vorkommen, daß sich N^{14} auf den Platz von N^{15} oder umgekehrt stellen wird, so daß die Reaktion nach der Gleichung

$$N^{15}H_3\,(\text{Gas}) + N^{14}H_3\,(\text{Lösung}) \rightleftarrows N^{14}H_3\,(\text{Gas}) + N^{15}H_3\,(\text{Lösung})$$

verläuft. Die Theorie und der Versuch zeigen nun, daß in diesem Falle das leichte Isotop das Bestreben hat, sich in der Gasphase zu konzentrieren, während sich das schwere in der flüssigen Phase anzureichern versucht. Dies zeigt sich darin, daß die Konstante des nach dem Massenwirkungsgesetz bestimmbaren Reaktionsgleichgewichtes

$$K = \frac{[N^{14}H_3]_{\text{Gas}}\,[N^{15}H_3]_{\text{Lösung}}}{[N^{15}H_3]_{\text{Gas}}\,[N^{14}H_3]_{\text{Lösung}}}$$

von eins verschieden sein wird, während sie im Falle eines Austausches von Atomen gleicher Masse genau gleich eins sein muß. Im Falle des Gleichgewichtes

ist $K = 1{,}033$. Es ist leicht zu sehen, daß dies auch der Trennungskoeffizient des gegebenen Prozesses sein wird. Tatsächlich kann K auch in der Form

$$K = \frac{\left(\frac{[N^{15}H_3]}{[N^{14}H_3]}\right)_{\text{Lösung}}}{\left(\frac{[N^{15}H_3]}{[N^{14}H_3]}\right)_{\text{Gas}}}$$

geschrieben werden, und dies bedeutet, daß das schwere Isotop die Tendenz hat, sich in der flüssigen Phase zu konzentrieren, wenn $K = q$ und $K > 1$ ist.

Auch andere für die Isotopentrennung günstige Austauschreaktionen existieren, so beispielsweise

$$S^{34}O_2\,(\text{Gas}) + HS^{32}O_3\,(\text{Lösung}) \rightleftarrows S^{32}O_2\,(\text{Gas}) + HS^{34}O_3\,(\text{Lösung}).$$

Für diese Reaktion ist $K = q = 1{,}012$.

Wie bei der Gasdiffusion ist der Trennungskoeffizient sehr klein, kann aber auch hier mit Hilfe der Kaskadenschaltung bedeutend gesteigert werden. Besteht die Kaskade aus z Gliedern, so wird der gesamte Trennungskoeffizient ebenso wie im Falle der Diffusion gleich $Q = q^z$ sein.

Für die Konzentrierung der Isotope des Sauerstoffes O^{18} und des Stickstoffes N^{15} wurde eine Kolonne mit 621 Gliedern benutzt. Die ganze Kolonne stellte sich als eine Stahlröhre mit dem inneren Durchmesser von 15 cm und einer Höhe von 10,7 m dar. Es wurde die Gegenstrommethode benutzt, bei der die Flüssigkeit nach unten fließt und der Dampf nach oben gerichtet ist.

Es zeigte sich, daß diese Methode Konzentrate der Isotope C^{13}, N^{15}, O^{18}, S^{34} von der Größenordnung 1 g je 24 Stunden gibt.

§ 22. Die Isotopentrennung nach der Methode der Zentrifugierung

Für die Isotopentrennung kann man auch den Umstand benutzen, daß die Schwerkraft proportional zur Masse ist. Es wird in einem als Isotopengemisch erscheinenden Gas im Gleichgewicht die Konzentration der Atome mit größerer Masse unten verhältnismäßig groß sein. Diesen Unterschied kann man jedoch nicht praktisch ausnutzen, da die Stärke des Gravitationsfeldes der Erde zu klein ist. Es ist jedoch möglich, künstliche Felder zu benutzen, deren Stärke hunderttausendmal größer als das Gravitationsfeld der Erde ist. Da die Zentrifugalkräfte ebenso wie die Gravitationskräfte proportional der Masse sind, so entstehen künstliche oder Pseudogravitationsfelder in der Zentrifuge.

In der Zentrifuge finden wir in den verschiedenen Entfernungen von der Achse eine verschiedene Verteilung der Teilchen. Sind ϱ die Gasdichte, r die Entfernung von der Achse, ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist die Zentrifugalbeschleunigung gleich $r\omega^2$, und die Masse einer Gasschicht mit dem Querschnitt von 1 cm² und der Dicke dr wird $\varrho\, dr$. Der Druck einer Schicht mit den Radien r und $r + dr$ ist dann gleich

$$dp = \varrho\, dr \cdot r\omega^2\,. \tag{22,1}$$

Andererseits ist nach den idealen Gasgesetzen

$$p = \frac{RT}{M}\varrho\,, \tag{22,2}$$

worin M das Molekulargewicht ist. Aus (22,1) und (22,2) erhalten wir

$$\frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT}\, r\, dr\,,$$

oder integriert

$$p = p_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}\,.$$

Da andererseits der Druck proportional der Anzahl der Teilchen in 1 cm³ ist, so erhalten wir für die Verteilung einer Anzahl Teilchen bei verschiedenen Entfernungen

$$n = n_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}\,. \tag{22,3}$$

Nehmen wir nun an, daß unser Gas ein Gemisch von leichten Teilchen M_L, n_L und von schweren Teilchen M_S, n_S sei. Im Gleichgewicht wird die Beziehung (22,3) für die Teilchen jeder Art Geltung haben, und in der Entfernung r von der Achse das Verhältnis der Anzahl der Teilchen

$$\frac{n_L}{n_S} = \left(\frac{n_L}{n_S}\right)_0 e^{\frac{(M_L - M_S)\omega^2 r^2}{2RT}} \tag{22,4}$$

sein, worin $(n_L)_0$ und $(n_S)_0$ die Anzahl Teilchen der einen und der anderen Art auf der Achse sind. Als Trennungskoeffizient wird das Verhältnis der Zahlen n_S/n_L an der Grenze des Feldes ($r = r_0$) und auf der Achse ($r = 0$) dienen:

$$q = \frac{(n_S/n_L)}{(n_S/n_L)_0} = e^{\frac{(M_S - M_L)\omega^2 r_0^2}{2RT}}\,. \tag{22,5}$$

Bemerkenswert ist hier, daß im Unterschied zu den anderen Methoden, bei denen der Trennungskoeffizient in dieser oder jener Form von dem Verhältnis der Massen abhängt $\left(\text{beispielsweise bei der Diffusionsmethode von } \sqrt{\frac{M_S}{M_L}}\right)$, in diesem Falle der Trennungskoeffizient durch die Massendifferenz $M_S - M_L$ bestimmt wird. Dies erscheint als ein großer Vorteil dieser Methode. Erstens wird der Trennungskoeffizient, unabhängig davon, in welche Verbindung die zu untersuchenden Isotope eintreten, gleich sein, weswegen stets eine solche Verbindung zusammengestellt werden kann, bei der die Ausführung am zweckmäßigsten ist. Zweitens wirkt sich im Falle der schweren Elemente diese Eigenschaft günstig auf die Größe des Trennungskoeffizienten aus. Zum Beispiel erscheint bei der Isotopentrennung des Urans das Uranhexafluorid UF_6 als gasförmige Verbindung; die Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Molekulargewichte von $U^{238}F_6$ und $U^{235}F_6$ ist gleich $\sqrt{\frac{352}{349}} = 1{,}0043$, während für die Methode der Zentrifugierung der Unterschied $M_S - M_L = 3$ bei einer linearen Geschwindigkeit an der Peripherie der Zentrifuge von $5 \cdot 10^4$ cm/s und bei einer Temperatur von 300° K einen Trennungskoeffizient gleich 1,16 ergibt.

Wie weiterhin aus der Formel (22,5) ersichtlich ist, hängt q stark von der Temperatur ab und wächst mit abnehmender Temperatur an. Beispielsweise hat q für $v = 5 \cdot 10^4$ cm/s und $M_S - M_L = 3$ die folgenden Werte bei verschiedenen Temperaturen:

$T°$ K	300	200	90	20
q	1,16	1,25	1,65	9,53

BEAMS baute eine schnellaufende Zentrifuge speziell für die Isotopentrennung. Diese Zentrifuge besteht aus einem Zylinder aus Chrom-Molybdän-Stahl mit einem äußeren Zylinderdurchmesser von 10 cm bei einer Wandstärke von 12 mm. Der Zylinder wurde durch Preßluft in Drehung versetzt, wobei die durch die Materialfestigkeit zulässige Maximalgeschwindigkeit der Drehung einer Lineargeschwindigkeit von $v = 8 \cdot 10^4$ cm/s entspricht.

Die Wirksamkeit der Zentrifuge für die Isotopentrennung kann auch durch Kombinierung ihres Pseudogravitationsfeldes mit der Diffusion erhöht werden. Zu diesem Zwecke wird der Dampfstrom im äußeren Teil des Zylinders nach unten und im axialen Teil nach oben gerichtet. An der Grenze zwischen den beiden Strömen findet eine ununterbrochene Diffusion aus dem einen Strom in den anderen statt. Die Zentrifugalkraft verstärkt den Übergang der schwereren Moleküle in Richtung der Peripherie, weswegen die Konzentration des schweren Isotops an der Peripherie größer sein wird als im Zentrum. Für das leichte Isotop wird das umgekehrte Bild erhalten.

Übung: Es ist der Trennungskoeffizient bei der Zentrifuge unter den folgenden Bedingungen auszurechnen: Lineargeschwindigkeit $v = 5 \cdot 10^4$ cm/s, Massenunterschied der Isotope $M_S - M_L = 1, 2, 3, 4$; Temperatur $T = 300, 200, 90°$ K. (Für den Unterschied $M_S - M_L = 3$ sind die im Text angegebenen Zahlen zu prüfen.)

§ 23. Die Darstellung des schweren Wasserstoffisotops (Deuterium) und des schweren Wassers

Das schwere Isotop des Wasserstoffes – das Deuterium (D) – spielt in der modernen Physik und in der Chemie eine so große Rolle, daß seine Darstellung gesondert betrachtet werden muß. Der besondere Wert des schweren Wasserstoffisotops liegt unter anderem darin, daß es das einzige Isotop ist, dessen Masse sich von der des Hauptisotops um 100% unterscheidet, wodurch sich diese beiden Abarten des Wasserstoffes in den verschiedenen chemischen und physikalischen Prozessen wesentlich verschieden verhalten.

In dem gewöhnlichen, in der Natur anzutreffenden Wasserstoff beträgt der prozentuale Anteil an schwerem Wasserstoff 0,02%. In konzentrierter Form wird das Deuterium in Gestalt des schweren Wassers erhalten. Da nicht nur der Wasserstoff, sondern auch der Sauerstoff Isotope besitzt (O^{16}, O^{17}, O^{18}), so werden inmitten der Wasserstoffmoleküle die verschiedenen Kombinationen dieser Isotope an-

zutreffen sein; zum Beispiel D_2O^{16}, HDO^{16}, H_2O^{18}, D_2O^{18} usw. Jedoch versteht man unter dem Begriff des schweren Wassers ein Wasser mit dem Molekülgehalt D_2O^{16}.

Die physikalischen Eigenschaften des schweren Wassers unterscheiden sich von den Eigenschaften des gewöhnlichen oder leichten Wassers, wie dies aus der Tabelle IV zu ersehen ist.

Tabelle IV. Einige physikalische Eigenschaften des schweren (D_2O) und leichten (H_2O) Wassers

Eigenschaften	D_2O	H_2O
Dichte d_4^{20}	1,1059	0,9982
Schmelztemperatur	3,82° C	0,00° C
Siedetemperatur	101,42° C	100,00° C
Maximum der Dichte bei	11,60° C	4,00° C
Zähigkeit 10^3 CGS	12,60	10,09
Oberflächenspannung in dyn/cm	67,8	72,75
Brechungsindex n_D^{20}	1,32844	1,33300

Kurz nach der Entdeckung des schweren Wassers wurde beobachtet, daß sich bei der Elektrolyse wäßriger Lösungen das Wasser mit Deuterium anreichert, während der frei gewordene gasförmige Wasserstoff mit dem leichten Isotop angereichert ist. Hierdurch wurde die Darstellungsmethode praktisch reinen schweren Wassers (mit einem Anteil D_2O von 99,9%) auf dem Wege der Elektrolyse begründet.

Heute wird schweres Wasser fabrikmäßig in großen Mengen hergestellt, wobei ein kombinierter Prozeß aus Elektrolyse und Austauschreaktion benutzt wird (siehe § 21). Findet die Austauschreaktion, bei welcher der Wasserstoff des Wassers gegen das Deuterium aus gasförmigem Wasserstoff ausgetauscht wird, in Anwesenheit eines Katalysators statt, so wird im Gleichgewicht die Konzentration des Deuteriums in Wasser angenähert dreimal so groß wie in der gasförmigen Phase.

Die Gewinnung des schweren Wassers geschieht dadurch, daß Wasser auf den Oberteil der Kolonne gepumpt wird und von dort nach unten dem aufsteigenden, mit Wasserstoff vermischten Dampf entgegenfließt. In Anwesenheit eines Katalysators findet zwischen dem Wasserstoff und dem Dampf eine Austauschreaktion statt, bei welcher das Deuterium sich im Dampf konzentriert und hierauf in Wasser übergeht. Im unteren Teil der Kolonne wird das Wasser durch elektrischen Strom zerlegt, wobei in dem nichtzerlegten Wasser eine weitere Konzentration an Deuterium stattfindet und der Wasserstoff zusammen mit dem Dampf nach oben dem Wasserstrom entgegensteigt. Kolonnen ähnlicher Art sind als Kaskaden eingerichtet.

Die Darstellung schweren Wassers ist mit dem Verbrauch großer Mengen von Elektrizität verbunden, weswegen die Fabriken für die Herstellung von schwerem Wasser in Gegenden liegen, in denen es billige Elektrizität gibt (hydroelektrische Stationen).

Zum Schluß geben wir noch eine vollständige Tabelle der stabilen Isotope mit einer Angabe ihrer relativen Häufigkeit.

Tabelle V. Isotope und ihre Verteilung.

(Die Tabelle wurde nach den Daten vom Oktober 1948 zusammengestellt)

Symbol	Ordnungszahl	Massenzahl	relative Häufigkeit
H	1	1	99,9844
D		2	0,0156
He	2	3	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$
		4	99,9999
Li	3	6	7,39
		7	92,61
Be	4	9	100
B	5	10	18,83
		11	81,17
C	6	12	98,9
		13	1,1
N	7	14	99,62
		15	0,38
O	8	16	99,757
		17	0,039
		18	0,204
F	9	19	100
Ne	10	20	90,51
		21	0,28
		22	9,21
Na	11	23	100
Mg	12	24	78,60
		25	10,11
		26	11,29
Al	13	27	100
Si	14	28	92,28
		29	4,67
		30	3,05
P	15	31	100
S	16	32	95,06
		33	0,74
		34	4,18
		36	0,016
Cl	17	35	75,4
		37	24,6
Ar	18	36	0,307
		38	0,060
		40	99,633
K	19	39	93,3
		40	0,011
		41	6,7
Ca	20	40	96,96
		42	0,64
		43	0,15
		44	2,06
Ca	20	46	0,0033
		48	0,19
Sc	21	45	100
Ti	22	46	7,95
		47	7,75
		48	73,45
		49	5,51
		50	5,34
V	23	51	100
Cr	24	50	4,49
		52	83,78
		53	9,43
		54	2,30
Mn	25	55	100
Fe	26	54	5,81
		56	91,64
		57	2,21
		58	0,34
Co	27	59	100
Ni	28	58	67,76
		60	26,16
		61	1,25
		62	3,66
		64	1,16
Cu	29	63	69,09
		65	30,91
Zn	30	64	48,89
		66	27,81
		67	4,07
		68	18,61
		70	0,620
Ga	31	69	60,2
		71	39,8
Ge	32	70	20,55
		72	27,37
		73	7,61
		74	36,74
		76	7,67
As	33	75	100
Se	34	74	0,87
		76	9,02
		77	7,58
		78	23,52
		80	49,82
		82	9,19

T

Ordnungs-zahl	Massen-zahl	relative Häufigkeit
35	79	50,5
	81	49,5
36	78	0,342
	80	2,223
	82	11,50
	83	11,48
	84	57,02
	86	17,43
37	85	72,8
	87	27,2
38	84	0,56
	86	9,86
	87	7,02
	88	82,56
39	89	100
40	90	51,46
	91	11,23
	92	17,11
	94	17,40
	96	2,80
41	93	100
42	92	15,86
	94	9,12
	95	15,7
	96	16,5
	97	9,45
	98	23,75
	100	9,62
44	96	5,68
	98	2,22
	99	12,81
	100	12,70
	101	16,98
	102	31,34
	104	18,27
45	103	100
46	102	0,8
	104	9,3
	105	22,6
	106	27,2
	108	26,8
	110	13,5
47	107	51,35
	109	48,65
48	106	1,215
	108	0,875
	110	12,39
	111	12,75
	112	24,07

Tabelle V (Fortsetzung)

Symbol	Ordnungszahl	Massenzahl	relative Häufigkeit	Symbol	Ordnungszahl	Massenzahl	relative Häufigkeit
Pr	59	141	100	Cp	71	176	2,5
Nd	60	142	27,13	Hf	72	174	0,18
		143	12,20			176	5,30
		144	23,87			177	18,47
		145	8,30			178	27,10
		146	17,18			179	13,84
		148	5,72			180	35,11
		150	5,60	Ta	73	181	100
Sm	62	144	3,16	W	74	180	0,122
		147	15,07			182	25,77
		148	11,27			183	14,24
		149	13,84			184	30,68
		150	7,47			186	29,17
		152	26,63	Re	75	185	37,07
		154	22,53			187	62,93
Eu	63	151	47,77	Os	76	184	0,018
		153	52,23			186	1,59
Gd	64	152	0,20			187	1,64
		154	2,15			188	13,3
		155	14,78			189	16,1
		156	20,59			190	26,4
		157	15,71			192	41,0
		158	24,78	Ir	77	191	38,5
		160	21,79			193	61,5
Tb	65	159	100	Pt	78	192	0,78
Dy	66	156	0,0524			194	32,8
		158	0,0902			195	33,7
		160	2,294			196	25,4
		161	18,88			198	7,23
		162	25,53	Au	79	197	100
		163	24,97	Hg	80	196	0,15
		164	28,18			198	10,1
Ho	67	165	100			199	17,0
Er	68	162	0,1			200	23,3
		164	1,5			201	13,2
		166	32,9			202	29,6
		167	24,4			204	6,7
		168	26,9	Tl	81	203	29,1
		170	14,2			205	70,9
Tm	69	169	100	Pb	82	204	1,5
Yb	70	168	0,06			206	23,6
		170	4,21			207	22,6
		171	14,26			208	52,3
		172	21,49	Bi	83	209	100
		173	17,02	Th	90	232	100
		174	29,58	U	92	234	0,0051
		176	13,38			235	0,71
Cp	71	175	97,5			238	99,28

III. DER AUFBAU DES ATOMKERNS

§ 24. Der Wirkungsquerschnitt bei der Streuung der Teilchen

Während wir bisher das Atom als Ganzes betrachteten, werden wir nunmehr die Tatsachen zusammenstellen, auf welche die modernen Vorstellungen vom Atom als einem System begründet sind, das aus dem schweren Kern und den ihn umkreisenden Elektronen gebildet ist.

Als eine der besten Methoden zur Erforschung der Atomstruktur erwies sich die „Sondierung“ durch schnelle Teilchen, Elektronen größter Geschwindigkeit oder α-Teilchen radioaktiver Elemente. Die Prozesse, die beim Durchgang eines Stromes schneller Teilchen durch die Materie stattfinden, sind vielfältig und verwickelt. Hier und in den nächstfolgenden Paragraphen wird uns nur die Streuung der Teilchen interessieren, d. h. Erscheinungen, die durch die Abweichung der Teilchen von ihrer anfänglichen Bahn bedingt sind. Die Betrachtung dieser Phänomene erlaubt uns eine Aussage über den Grad der Materieausfüllung des von einem Atom eingenommenen Raumes und ebenso über die Verteilung der positiven und negativen Elektrizität in diesem Raum. Vor allem werden wir einige allgemeine, mit der Streuung der Teilchen verknüpfte Fragen behandeln.

Wir betrachten ein Teilchen, das sich inmitten starrer, unregelmäßig verteilter Kugeln bewegt und mit ihnen Zusammenstöße erleiden kann. Der Zusammenstoß dieses Teilchens mit irgendeiner Kugel ist eine zufällige Erscheinung. Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeit, die Entfernung x *ohne Zusammenstoß* zu durchlaufen, eine Funktion $f(x)$ dieser Entfernung. Andererseits können wir auch annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes innerhalb des unendlich kleinen Abschnittes dx proportional dx, d. h. gleich adx ist; dann ist die Wahrscheinlichkeit, diesen Abschnitt ohne Zusammenstoß zu durchlaufen, gleich $1 - adx$. Die Wahrscheinlichkeit, ohne Zusammenstoß die Entfernung $x + dx$ zu durchlaufen, können wir jetzt auf zweifache Weise ausdrücken: einmal durch die Funktion $f(x + dx)$, das andere Mal, indem wir das Durchlaufen des Abschnittes $x + dx$ als einen aus den beiden Etappen des Durchganges durch die Entfernung x und durch die weitere Entfernung von x bis $x + dx$ zusammengesetzten Vorgang betrachten. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen zusammengesetzten Vorganges ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten beider Elementarvorgänge, d. h. gleich $f(x) \cdot (1 - adx)$. Wir erhalten somit

$$f(x + dx) = f(x)\,(1 - a\,dx)$$

oder mit der Genauigkeit bis zu unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung

$$f(x) + \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(x) - a\,f(x)\,dx\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{df}{f} = -a\,dx\,,$$

oder integriert

$$f = ce^{-ax}\,.$$

Die Integrationskonstante finden wir aus der einfachen Bedingung, daß die Wahrscheinlichkeit, den Weg $x = 0$ ohne Zusammenstoß zu durchlaufen, gleich 1 sein muß. Dies ergibt mit $c = 1$ schließlich

$$f(x) = e^{-ax}\,. \tag{24,1}$$

Somit wird also die Wahrscheinlichkeit des Durchganges durch eine Materieschicht ohne Zusammenstoß exponentiell mit der Vergrößerung der Schichtdicke abnehmen.

Erklären wir nun den physikalischen Sinn der Konstante a. Vermerken wir vor allem, daß diese Größe die Dimension einer reziproken Länge hat, da der Exponent ax eine dimensionslose Größe sein muß. Zur Darstellung des physikalischen Sinnes von a rechnen wir nach der Formel (24,1) die mittlere freie Weglänge eines Teilchens aus. Die Teilchen, die in dem Abschnitt zwischen x und $x + dx$ einen Zusammenstoß erleiden, durchliefen den Abschnitt x ohne Zusammenstoß. Die Wahrscheinlichkeit, den Weg x ohne Zusammenstoß zu durchlaufen, ist nach dem Vorherigen e^{-ax}, und die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes zwischen x und $x + dx$ ist gleich $a dx$. Also entspricht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die freie Weglänge gleich x ist, dem Produkt

$$ae^{-ax}\,dx\,.$$

Die mittlere freie Weglänge λ ist nach dem Mittelwertsatz[1]) gleich

$$\lambda = \bar{x} = \int_0^\infty xae^{-ax}\,dx = a\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx\,. \tag{24,2}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\lambda = a\left[\left(-\frac{1}{a}\,xe^{-ax}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\right] = \frac{1}{a}\,.$$

Auf diese Weise können wir die Konstante a als die reziproke mittlere freie Weglänge

$$a = \frac{1}{\lambda} \tag{24,3}$$

deuten, und die Formel (24,1) nimmt die Form

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \tag{24,4}$$

an. Wir können der Konstante a nun noch eine andere für uns interessante Deutung geben. Wie wir wissen, ist die Maßeinheit von a gleich cm^{-1}:

$$[a] = \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}^3} \equiv \mathrm{cm}^{-1}\,.$$

[1]) Siehe Anhang I am Ende des Buches.

Die Anzahl der sich in der Raumeinheit befindenden unbeweglichen, streuenden Teilchen sei n. Ersetzen wir jedes dieser Teilchen durch eine Kreisscheibe mit dem Radius r_0 und der Fläche σ, so können wir hierdurch ausdrücken, daß jedes bewegte Teilchen eine Ablenkung („Zusammenstoß") erleidet, das durch eine solche Scheibe hindurchgeht. Wir sehen, daß die Maßeinheit von $n\sigma$ gleich cm^{-1} ist:

$$[n\sigma] = \frac{1}{\mathrm{cm}^3} \cdot \mathrm{cm}^2 = \mathrm{cm}^{-1}\,.$$

Die Fläche σ heißt der „Wirkungsquerschnitt" der Streuung und entsprechend r_0 der Radius des Wirkungsquerschnittes. Das Produkt $n\sigma$ ist der makroskopische Querschnitt; er wird durch die Summe der Wirkungsquerschnitte in der Raumeinheit dargestellt. Da die Dimension a mit der Dimension $n\sigma$ übereinstimmt, so können wir a auch als Summe der Wirkungsquerschnitte in der Raumeinheit deuten und in der Form $n\sigma$ darstellen.

Der statistische Sinn des Wirkungsquerschnittes kann auf folgende Weise erklärt werden: die Stromdichte N_0 sich zerstreuender Teilchen ist gleich 1, d. h., sie entspricht dem Durchgang eines Teilchens durch 1 cm^2 je s. Die Anzahl der streuenden Zentren in der Raumeinheit n ist auch gleich 1. Dann kann die Wahrscheinlichkeit der Streuung durch das Verhältnis der Fläche des Wirkungsquerschnittes σ zum Querschnitt des Stromes, d. h. zu 1 cm^2, ausgedrückt werden. Somit ist σ die Wahrscheinlichkeit der Streuung beim Durchgang durch eine Schicht der Dicke von 1 cm, die gerade ein Teilchen enthält, und $n\sigma$ die Wahrscheinlichkeit der Streuung, wenn die Teilchendichte in der Schicht gleich n ist.

Betrachten wir jetzt die Schwächung des Teilchenstromes bei dem Durchgang durch eine Schicht beliebiger Dicke. Wir wollen dabei im Auge behalten, daß jedes Teilchen, das einen „Zusammenstoß" erleidet, d. h. durch eine Scheibe mit einem Durchmesser gleich dem Wirkungsquerschnitt σ hindurchgeht, aus dem parallelen Strom ausgeschieden und nicht von dem Auffänger des Gerätes registriert wird. Zerlegen wir die ganze Schicht in unendlich dünne Scheiben dx, so ist die Anzahl der streuenden Teilchen, die auf jeden cm^2 kommen, ndx; die Summe ihrer Wirkungsquerschnitte wird dann gleich σndx.

Fällt nun auf die vordere Oberfläche unserer unendlich dünnen Schicht dx ein paralleler Teilchenstrom der Dichte N, so wird die Schwächung des Stromes

$$-dN = N\sigma n dx \tag{24,5}$$

sein, woraus wir nach Integration

$$N = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-ax} = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

erhalten, mit N_0 als Dichte des Stromes der in die dicke Schicht eintretenden Teilchen.

§ 25. Untersuchung der Atome durch Elektronen

Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Elektronenstreuung zurückkehren. Beim Durchgang durch Materie wird ein Elektronenbündel geschwächt, indem sich die Anzahl der Elektronen in ihm aus zwei Gründen vermindert. Erstens können die Elektronen ihre Energie verlieren, indem sie diese auf verschiedene Prozesse verteilen, die beim Durchgang schneller Elektronen durch ein Atom auftreten (Ionisation und Anregung, siehe Abschnitt VII); zweitens können die Elektronen elastische Stöße erleiden, als deren Folge die Energie zwar nicht verlorengeht, aber das

Elektron in einem gegebenen Augenblick seine Richtung ändert und aus dem Bündel austritt. Die Schwächung der Elektronenbündel durch Streuung wurde schon Anfang der neunziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts von LENARD untersucht. Er konnte zeigen, daß sich beim Durchgang durch eine Materieschicht der Dicke x die Intensität des Elektronenstromes mit wachsendem x nach dem Exponentialgesetz

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\alpha x}$$

vermindert, wobei N_0 die Intensität des einfallenden Bündels und N die Intensität des durch die Schicht x hindurchgegangenen Bündels angibt und der Koeffizient α die Schwächung des Bündels durch Streuung auf einer Längeneinheit charakterisiert.

Es ist leicht zu sehen, daß der Koeffizient α denselben Sinn hat wie der Koeffizient a des vorangegangenen Paragraphen; wir können ihn als die Summe der Wirkungsquerschnitte der Atome des Materials bei der Elektronenstreuung deuten.

Die Untersuchung der Eigenschaften dieses Koeffizienten bei großer Variation der Versuchsbedingungen enthüllte die folgende bemerkenswerte Tatsache: Es zeigte sich, daß bei einer bestimmten Geschwindigkeit der Elektronen α weder von den individuellen Eigenschaften der streuenden Materie noch von ihrem Aggregatzustand abhängt, sondern allein von ihrer Dichte ϱ. Hierbei ist α mit der größten Genauigkeit ϱ proportional, so daß die Beziehung $\frac{\alpha}{\varrho}$ *bei gegebener Elektronengeschwindigkeit* konstant bleibt. Bei einer Änderung der Elektronengeschwindigkeit verändert sich $\frac{\alpha}{\varrho}$, *verkleinert* sich schnell bei Anwachsen der Elektronengeschwindigkeit und ist umgekehrt proportional der vierten Potenz der Geschwindigkeit.

In der Tabelle VI werden einige Zahlen angeführt, welche die zunehmende *Durchsichtigkeit* der Materie für Elektronen mit wachsender Geschwindigkeit zeigen.

Tabelle VI

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\varrho}$ (cm^2g^{-1})	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\varrho}$ (cm^2g^{-1})
0,90	6	0,40	$2{,}4 \cdot 10^3$
0,80	13	0,20	$360 \cdot 10^3$
0,70	29	0,10	$8 \cdot 10^5$
0,60	83	0,04	$58 \cdot 10^5$
0,50	$2{,}2 \cdot 10^2$		

Wenn wir die Tabelle VI benutzen, so können wir die Größe α für verschiedene Elektronengeschwindigkeiten berechnen. Für $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}04$, d. h. für $v = \beta c = 1{,}2 \cdot 10^9$ cm/s, finden wir aus der Tabelle $\frac{\alpha}{\varrho} = 58 \cdot 10^5$. Da nun diese Beziehung nicht von der Natur der absorbierenden Materie abhängt, können wir aus der Größe $\frac{\alpha}{\varrho}$ die Summe der Wirkungsquerschnitte des Luftmoleküls bei normalen Bedingungen (0° C und 760 mm Hg) berechnen. In diesem Falle ist $\varrho = 0{,}00129$ gcm^{-3} und folglich

$$\alpha = n\sigma = 58 \cdot 10^5 \cdot 1{,}29 \cdot 10^{-3} = 7{,}5 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{cm}^3 .$$

Diese Größe entspricht etwa der Querschnittssumme der Gasmoleküle in einem Kubikzentimeter eines Gases bei Normalbedingungen, wie sie aus den Daten der kinetischen Gastheorie (Diffusion, Wärmeleitfähigkeit) berechnet wurde. Tatsächlich ist die Anzahl der Gasmoleküle in einem Kubikzentimeter bei normalen Bedingungen gleich $2{,}7 \cdot 10^{19}$. Bei $r_0 = 10^{-8}$ cm finden wir

$$n\sigma = 2{,}7 \cdot 10^{19} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-16} = 8{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{cm}^3 .$$

Bei großen Elektronengeschwindigkeiten fällt $\frac{\alpha}{\varrho}$ steil ab; so ist beispielsweise für $\frac{v}{c} = 0{,}9$ oder für $v = 2{,}7 \cdot 10^{10}$ cm/s, $\frac{\alpha}{\varrho} = 6\ \mathrm{cm}^2\mathrm{g}^{-1}$, woraus sich $\alpha = 6 \cdot 1{,}29 \cdot 10^{-3} = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$ ergibt, was angenähert 10^6mal kleiner als in dem früher betrachteten Falle ist.

Dies zeigt, daß der wahre von der *Materie*, d. h. den Elektronen und den positiv geladenen Teilchen, eingenommene Raum innerhalb des Gebietes mit dem Radius $r_0 = 10^{-8}$ cm verschwindend klein ist.

Am Anfang dieses Paragraphen wurde gezeigt, daß die betrachteten Resultate nur bei nicht allzu schnellen und nicht allzu langsamen Elektronen auftreten. Bei diesen Grenzfällen zeigt sich eine ganze Reihe von Faktoren, die das angenommene Bild des Elektronendurchganges durch Materie wesentlich ändern. Im Falle sehr langsamer Elektronen, bei denen die Energie Bruchteile eines Elektronenvolts beträgt, treten Erscheinungen auf, die auf den Welleneigenschaften des Elektrons beruhen und mit denen wir uns im Abschnitt X beschäftigen werden, insbesondere mit dem sogenannten Ramsauer-Effekt, der in der Vergrößerung der *Durchsichtigkeit* des Atoms für langsame Elektronen besteht. Im Gegensatz hierzu wird im Falle sehr schneller Elektronen mit einer Energie in der Größenordnung von 10^7 bis 10^{10} eV eine ganze Reihe höchst verwickelter Vorgänge eine vorherrschende Bedeutung einnehmen, die mit großen Energieverlusten der Elektronen beim Durchgang durch Materie verknüpft sind. Mit ihnen werden wir uns im Band II, Abschnitt XXIV bekannt machen.

§ 26. Die Eigenschaften der α-Teilchen

Noch genauere Ergebnisse über die Rolle der positiven Elektrizität im Atom wurden bei der „Sondierung" der Atome durch α-Teilchen erhalten. Die Eigenschaften der α-Teilchen werden im Band II, Abschnitt XXI betrachtet, hier folgen nur einige grundlegende, ihre Natur betreffende Aussagen.

α-Teilchen werden von vielen radioaktiven Elementen ausgesandt. Sie stellen sich als ein *Teilchenstrom* dar, der unmittelbar durch die photographische Aufnahme ihrer Wege in der Wilson-Kammer sichtbar gemacht werden kann, wie das die Abb. 51 zeigt. Die Ablenkung der α-Teilchen durch elektrische und magnetische Felder zeigt, daß sie eine elektrische Ladung tragen. Die Richtung, in der die Ablenkung stattfindet, weist darauf hin, daß diese Ladung *positiv* ist. Da die Felder, die eine merkliche Ablenkung der Elektronen hervorrufen, auf die Flugbahnen der α-Teilchen noch keinen Einfluß zeigen, läßt sich folgern, daß sie im Vergleich zu den Elektronen eine größere Masse besitzen. Um die von einem Magnetfeld gekrümmte Flugbahn eines α-Teilchens photographieren zu können, ist es notwen-

dig, die WILSON-Kammer in ein sehr kräftiges Magnetfeld zu setzen. Als erstem gelang dies P. L. KAPITZA; eine seiner mit einem Magnetfeld von 43000 Oersted erhaltenen Aufnahmen ist in der Abb. 52 wiedergegeben.

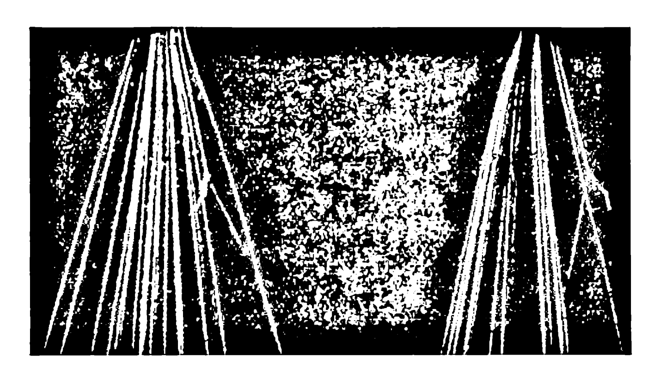


Abb. 51. Bahnen von α-Teilchen in der WILSON-Kammer

Die Anzahl der von den radioaktiven Elementen ausgesandten α-Teilchen wurde durch unmittelbare Zählung der Blitze auf dem Fluoreszenzschirm (Szintillation), die von einem Bündel α-Teilchen mit sehr kleinem Raumwinkel hervorgerufen wurden, gemessen. Die Gesamtzahl der α-Teilchen, die von einem Gramm Radium in einer Sekunde ausgesandt werden, ergab sich zu $Q = 3{,}7 \cdot 10^{10}$. Die Ladung, die von einem α-Teilchen übertragen werden kann, wurde nach derselben unmittelbaren Methode gemessen: die α-Teilchen eines Präparates bestimmter Stärke fallen in einen Metallkollektor (FARADAY-Becher), dessen Aufladung mit Hilfe eines Elektrometers gemessen wird. Die Anzahl der α-Teilchen kann bestimmt werden, sofern Q und die Geometrie der Versuchsanordnung bekannt sind (Entfernung zwischen der Quelle und dem kreisförmigen Diaphragma, das vor dem Kollektor angeordnet ist, und die Maße des Diaphragma). Diese Versuche zeigten, daß *die Ladung, die von einem α-Teilchen übertragen wird, gleich* $+2e$ ist, d. h. gleich der doppelten absoluten Ladung eines Elektrons. Schließlich können auch die Masse und die Geschwindigkeit der α-Teilchen aus der magnetischen Ablenkung, die ε/mv proportional ist, und aus der elektrischen Ablenkung, die ε/mv^2 proportional ist (ε-Ladung des α-Teilchens), bestimmt werden.

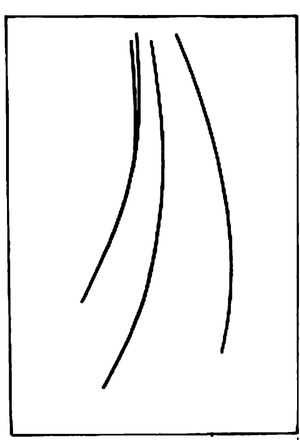


Abb. 52. Spuren von α-Teilchen in einer WILSON-Kammer

Für die Geschwindigkeit der α-Teilchen von Radium C ergab sich hierbei:

$$v = 1{,}992 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$$

und für ε/m_α

$$\frac{\varepsilon}{m_\alpha} = 1{,}446 \cdot 10^{14}\,\text{CGSE} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Vergleichen wir diese Größe mit der Beziehung $\frac{F}{M_H}$, d. h. mit dem Verhältnis der FARADAYschen Zahl zur Masse eines Grammatoms Wasserstoff:

$$\frac{F}{M_H} = 2{,}88 \cdot 10^{14}\,\mathrm{CGSE} \cdot \mathrm{g}^{-1}\,.$$

Beachten wir, daß andererseits $\varepsilon = 2e$ ist, und multiplizieren wir den Zähler und den Nenner der Beziehung $2e/m_\alpha$ mit der LOSCHMIDTschen Zahl N_0, dann erhalten wir:

$$\frac{\varepsilon}{m_\alpha} = \frac{2e}{m_\alpha} = \frac{2F}{M_\alpha} = 1{,}44 \cdot 10^{14}\,\mathrm{CGSE} \cdot \mathrm{g}^{-1}\,,$$

worin $M_\alpha = m_\alpha \cdot N_0$ die Masse eines Grammatoms α-Teilchen ist. Da nun

$$\frac{F}{M_H} : \frac{2F}{M_\alpha} = \frac{M_\alpha}{2M_H} = \frac{2{,}88 \cdot 10^{14}}{1{,}44 \cdot 10^{14}} = 2\,,$$

so folgt

$$\frac{M_\alpha}{M_H} = 4\,,$$

das α-Teilchen hat also die Masse des Heliumatoms.

Die Tatsache, daß das α-Teilchen seiner Natur gemäß mit dem Helium-Atomkern identisch ist, wurde auch durch den folgenden Versuch von RUTHERFORD und ROYDS gezeigt (Abb. 53).

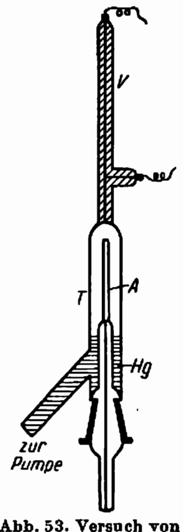


Abb. 53. Versuch von RUTHERFORD

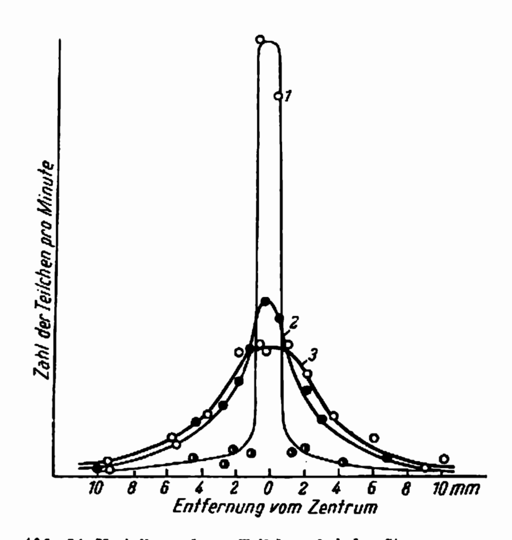
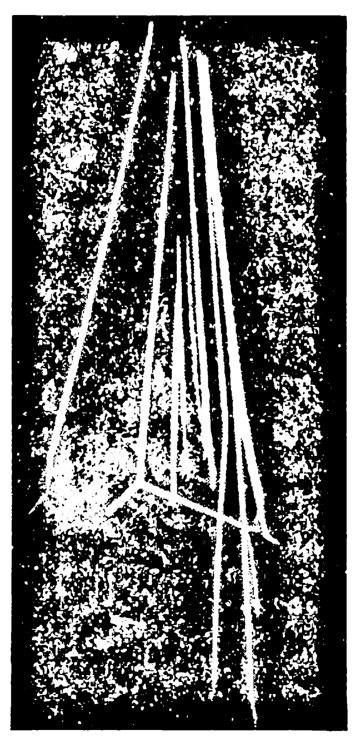


Abb. 54. Verteilung der α-Teilchen bei der Streuung um kleine Winkel. Zur Charakterisierung der Streuung dient die Anzahl der Teilchen, die in verschiedene Punkte des Fluoreszenzschirmes fallen: 1. Streuung von α-Teilchen in Luft; 2. Streuung von α-Teilchen in einer dünnen Goldfolie; 3. Streuung in zwei Goldfolien.

Eine größere Menge des radioaktiven Gases Radon wurde in ein dünnwandiges Glasrohr A eingeleitet, dessen Wandstärke so gering war, daß die Mehrzahl der α-Teilchen durch sie hindurchgehen konnte. Dieses Rohr wurde von einem weiteren Rohr T umgeben, das mit dem Entladungsrohr V mit eingeschmolzenen Elektroden verbunden war. Das Rohr T wurde vor Beginn des Versuches sorgfältig eva-

kuiert. Die sich in T ansammelnden α-Teilchen bildeten ein Gas, das durch das Anheben eines Quecksilberniveaus komprimiert und in die Kapillare V überführt wurde. Zwei Tage nach Beginn des Versuches konnte man bei der Entladung in V in dem ausgesandten Licht die gelbe Heliumlinie entdecken und nach sechs Tagen bereits das gesamte Heliumspektrum.

Ein paralleles Bündel von α-Teilchen, das eine Materieschicht durchdringt, wird gestreut; die α-Teilchen verändern etwas ihre Richtung. Die Untersuchung der Streuung mittels dünner Metallfolien zeigte, daß sehr oft eine Ablenkung um kleine Winkel, im Mittel um die Winkel von 2° bis 3°, auftritt. Die Verteilung der α-Teilchen in bezug auf die Winkel folgt genau der statistischen Kurve der Zufallserscheinungen (Abb. 54)[1]). Neben solchen Streuungen um kleine Winkel beobachteten die Mitarbeiter Rutherfords, Geiger und Marsden, daß eine gewisse Anzahl von α-Teilchen (angenähert 1 auf 8000) um sehr große Winkel gestreut werden, die bisweilen 90° übersteigen und in einigen Fällen fast 180° erreichen. Diese großen Streuwinkel durch eine Anhäufung zufälliger kleiner Ablenkungen zu erklären, erwies sich als unmöglich. Aus der statistischen Streukurve folgt nämlich, daß die Anzahl der Teilchen, die derart bedeutend abgelenkt werden können, wesentlich geringer als 1 auf 8000 sein müßte.


Abb. 55. Streuung von α-Teilchen in Stickstoff

Die großen Streuwinkel können sowohl beim Durchgang von α-Teilchen durch metallische Folien wie auch in Gasen beobachtet werden, sie sind selbst in Wilson-Photographien zu entdecken. Eine solche Photographie ist in Abb. 55 gegeben, wo die Spur eines α-Teilchens in Stickstoff dargestellt ist; hier gehört die kurze Spur dem Stickstoffatom, das in schnelle Bewegung versetzt wurde, während die längere Spur dem α-Teilchen gehört, das von der Anfangsrichtung um einen Winkel von etwa 90° abgelenkt wurde. Diese Photographie zeigt ganz klar, daß die großen Ablenkungswinkel nicht infolge einer Häufung vieler kleiner Ablenkungen erhalten werden, sondern als Resultat eines einzigen Zusammenstoßes.

Rutherford wies darauf hin, daß diese große Ablenkung nur dann möglich ist, wenn im Innern des Atoms ein überaus starkes elektrisches Feld existiert, das von einer positiven Ladung mit einer großen Masse herrührt und auf sehr kleinem Raum (mit dem Radius der Größenordnung von 10^{-13}) konzentriert sein muß. Hieraus entstand das „Kernmodell" des Atoms, nach dem das Atom ähnlich dem Planetensystem aufgebaut ist: ein kleiner, positiv geladener Kern, in welchem fast die gesamte Masse des Atoms konzentriert ist, und die negativen Elektronen, die in geschlossenen Bahnen um diesen Kern kreisen.

[1]) Anm. der Redaktion: Gausssche Glockenkurve.

§ 27. Die Theorie der Streuung von α-Teilchen

Auf der Grundlage dieser Vorstellungen entwickelte RUTHERFORD die quantitative Theorie der Streuung von α-Teilchen.

In O (Abb. 56) befindet sich der streuende Kern. Es ist offensichtlich, daß seine Ladung in bezug auf die absolute Größe ein ganzes Vielfaches einer Elektronenladung sein muß, da in einem neutralen Atom die positive Kernladung genau die Summe der negativen Elektronenladungen kompensieren muß.

Bezeichnen wir die in O angeordnete Kernladung mit $+Ze$, wobei Z eine ganze Zahl ist, und nehmen wir an, daß die Kernmasse so viel größer ist als die Masse eines α-Teilchens, daß der Kern bei der Wechselwirkung mit dem α-Teilchen als unbeweglich angenommen werden kann. Wir nehmen ferner an, daß die Wechselwirkungskräfte zwischen dem Kern und dem α-Teilchen dem COULOMBschen Gesetz gehorchen, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen beiden Teilchen sind. Diese letzte Vorstellung war in der ersten Zeit nur eine Hypothese und rechtfertigte sich erst durch die spätere Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment. In der Tat war keinerlei Grund zu der Annahme, daß die Wechselwirkung sehr kleiner Körper, die sich auf verschwindend kleine Entfernung nähern, einem Gesetz entsprechen muß, dessen Richtigkeit nur für makroskopische Körper einwandfrei festgestellt wurde.

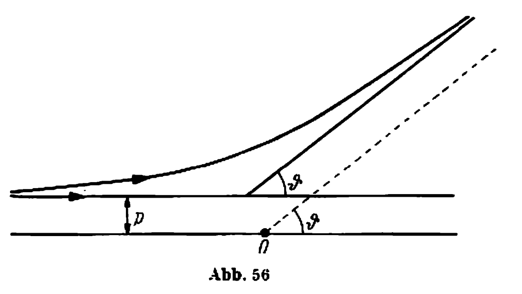


Abb. 56

Die klassische Mechanik zeigt, daß bei allen diesen Annahmen das α-Teilchen in bezug auf den Kern O eine Hyperbel beschreiben muß. Wir bezeichnen die Masse des α-Teilchens mit m_α, seine Geschwindigkeit in großer Entfernung von dem streuenden Kern mit v. Stände das α-Teilchen mit dem Kern nicht in Wechselwirkung, so würde es in der Entfernung p vom Kern (Abb. 56), der sogenannten „Zielentfernung"[1]), vorübergehen. Die im § 50 abgeleitete Ausrechnung zeigt, daß der Ablenkungswinkel des vom Kern nach dem COULOMBschen Gesetz abgestoßenen α-Teilchens durch die angegebenen Parameter auf die folgende Weise ausgedrückt wird:

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_\alpha v^2 p}{2Ze^2}. \qquad (27,1)$$

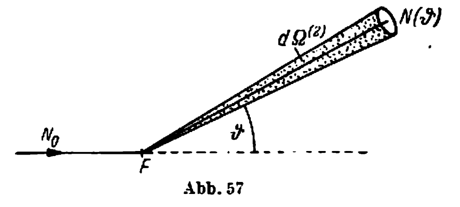


Abb. 57

Der Versuch, diese Formel durch ein unmittelbares Experiment zu beweisen, wäre nutzlos, weil die der Messung unzugängliche Zielentfernung p eingeht.

Wir können jedoch die Formel (27,1) der statistischen Theorie zugrunde legen, die uns den Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der Streuung in Abhängigkeit von den der experimentellen Bestimmung zugänglichen Parametern angibt.

[1]) Identisch mit der Bezeichnung Stoßparameter.

Stellen wir uns das Gebiet vor, in dessen Zentrum sich das streuende Scheibchen F befindet (Abb. 57). Auf dieses Scheibchen fallen in der Zeiteinheit N_0 α-Teilchen. Bei der Untersuchung der Streuung wird die mittlere Anzahl der Teilchen $N(\vartheta)$ bestimmt, die in den Grenzen des Raumwinkels $d\Omega^{(2)}$ in der durch die Winkel ϑ und φ charakterisierten Richtung gestreut werden. Die Größe des Raumwinkels $d\Omega^{(2)}$ ist gleich dem Verhältnis des Oberflächenelementes des Gebietes zum Quadrat des Radius:

$$d\Omega^{(2)} = \frac{R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{R^2} = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,. \tag{27,2}$$

In den Versuchen von RUTHERFORD und seinen Mitarbeitern wurde oftmals die mittlere Anzahl der Teilchen untersucht, die innerhalb der Grenzen eines Gebietes gestreut werden, das zwischen den beiden durch die Öffnungen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ charakterisierbaren Raumwinkel gelegen ist (Abb. 58). Offensichtlich wird der entsprechende Raumwinkel $d\Omega^{(1)}$ (oder einfach $d\Omega$) durch Integration von (27,2) nach φ in den Grenzen von 0 bis 2π erhalten:

$$d\Omega = d\Omega^{(1)} = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{27,3}$$

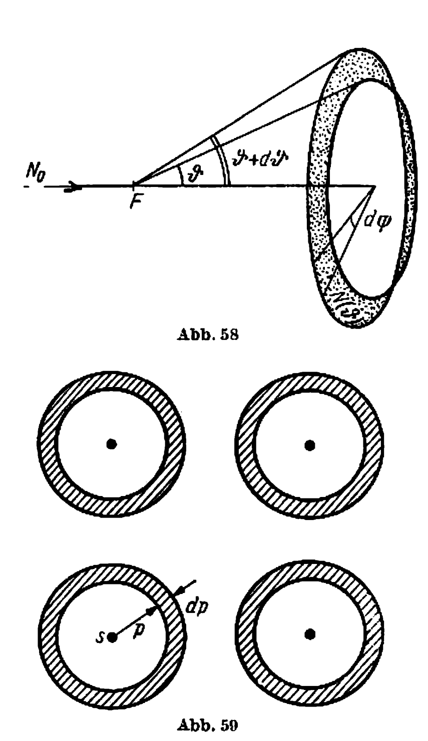


Abb. 58

Abb. 59

Um den Wirkungsquerschnitt der Streuung innerhalb der Grenzen von $d\Omega$ auszurechnen, nehmen wir an, daß die α-Teilchen bis zur Streuung in einem parallelen Strom fliegen. Da bei einfachen gleichen Bedingungen der Ablenkungswinkel der α-Teilchen nach der Formel (27,1) durch die Zielentfernung p bestimmt ist, so werden offensichtlich in dem zwischen den Grenzen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegenden Winkel die α-Teilchen abgelenkt, bei denen die Zielentfernung zwischen p und $p + dp$ liegt. Das sind die α-Teilchen, die durch den Ring innerhalb der Kreise hindurchgehen, deren Radien von p und $p + dp$ eingeschlossen und um jedes der streuenden Zentren gelegt sind (Abb. 59). Die Fläche eines jeden solchen Ringes ist gleich $2\pi p dp$, und wir können jetzt behaupten, daß die mittlere Zahl der α-Teilchen, die innerhalb des Winkels zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ abgelenkt werden und nach der Streuung innerhalb des Raumwinkels $d\Omega$ fliegen, proportional $2\pi p dp$ ist.

Somit wird der Wirkungsquerschnitt des Kerns $d\sigma$ für die Streuung der α-Teilchen gleich

$$d\sigma = 2\pi p dp\,. \tag{27,4}$$

Wenn wir jetzt aus Gleichung (27,1) p finden und ins Quadrat erheben, so erhalten wir

$$p^2 = \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2}\,.$$

Durch Differentiation folgt der Ausdruck:

$$p\,dp = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\,Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

und nach dem Einsetzen in (27,4)[1]

$$d\sigma = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2\,Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\,.$$

Führen wir noch den Raumwinkel $d\Omega$ aus Formel (27,3) ein, so wird

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{27,5}$$

Dies ist die Rutherfordsche Formel für die Streuung der α-Teilchen.

Zum Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen muß der makroskopische Querschnitt Σ gefunden werden, der sich aus der Summe der Querschnitte aller in 1 cm³ streuenden Kerne zusammensetzt. Nehmen wir an, daß alle Kerne in dem Scheibchen gleichmäßig angeordnet sind und sich nicht überdecken, dann ist offensichtlich

$$\Sigma = n\,d\sigma\,,$$

worin n die Anzahl der streuenden Kerne in 1 cm³ ist. Benutzen wir (27,5), dann ergibt sich

$$\Sigma = n\left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{27,6}$$

Bezeichnen wir jetzt die Anzahl der in 1 auf die Oberfläche des streuenden Scheibchens auffallenden α-Teilchen mit N, so wird die mittlere Zahl der α-Teilchen, die um den Winkel ϑ in den Grenzen des Raumwinkels $d\Omega$ gestreut werden, offensichtlich gleich

$$dN = N\Sigma = nN\left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{27,7}$$

Wie wir sehen, ist die Anzahl der gestreuten α-Teilchen sehr stark von dem Winkel ϑ abhängig und wächst schnell mit kleiner werdendem ϑ an.

---

[1] Das Minuszeichen hat keine wesentliche Bedeutung. Es deutet nur darauf hin, daß mit der Vergrößerung der Zielentfernung p der Winkel ϑ kleiner wird (und umgekehrt). Deshalb wird im folgenden nur der absolute Wert $p\,dp$ verwandt.

§ 28. Die experimentelle Prüfung der RUTHERFORDschen Formel

Die RUTHERFORDsche Formel wurde einer sorgfältigen experimentellen Prüfung unterzogen. Aus (27,7) folgt

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = nN \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 d\Omega .$$

Ändert sich nur der Winkel ϑ und bleiben alle übrigen Bedingungen unverändert erhalten, so muß $dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = \text{const}$ sein.

Diese Folgerung wurde experimentell geprüft und zu diesem Zwecke die in der Abb. 60 dargestellte Einrichtung benutzt. Das zylindrische Metallgefäß B ist auf der mit einer Teilung versehenen Kreisscheibe A befestigt. Der Zylinder B kann mit der Kreisscheibe zusammen auf dem Schliff C gedreht werden. Das radioaktive Präparat R und die streuende Scheibe F sind auf dem besonderen, von dem Gefäß unabhängigen Rohr T angebracht. Hierdurch wird eine gleichbleibende Stellung von R und F bei Drehungen des übrigen Systems erreicht. Der durchsichtige Schirm S liegt vor dem Mikroskop M, das fest mit dem Gefäß B verbunden ist. Durch Drehung der Kreisscheibe A können wir das Mikroskop zur Messung der Anzahl gestreuter α-Teilchen unter beliebigem Streuwinkel einstellen. Das Gefäß wird oben durch eine Glasplatte P verschlossen und durch das Rohr T evakuiert, um eine zusätzliche Streuung an Luft zu vermeiden. Im Verlaufe der gesamten Untersuchung wurden mehr als 100000 Szintillationen gezählt.

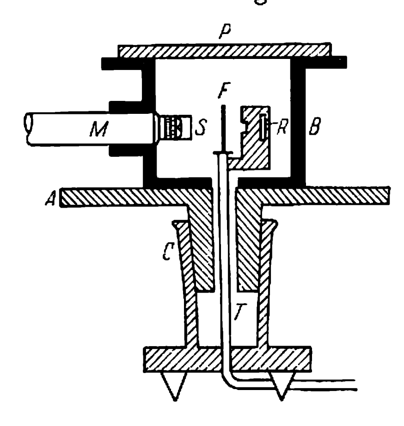


Abb. 60. Gerät zur Untersuchung der Abhängigkeit der Zahl der gestreuten α-Teilchen vom Streuwinkel

Die für die Streuung in Gold erhaltenen Ergebnisse sind in der Tabelle VII angeführt. Es ist ersichtlich, daß trotz der in weiten Grenzen liegenden Änderungen der Größe $1/\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ und der Anzahl der Szintillationen das Produkt $dN \sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ nach der Forderung der Theorie konstant bleibt.[1])

Tabelle VII. Streuung von α-Teilchen an Goldfolien.

Ablenkungswinkel in °	$\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$	Zahl der Szintillationen	$dN \sin^4 \frac{\vartheta}{2}$
150	1,15	33,1	28,8
135	1,38	43,0	31,2
120	1,79	51,9	29,0
105	2,53	69,5	27,5
75	7,25	211	29,1
60	16,0	477	29,8
45	46,6	1435	30,8
30	223	7800	35,0
15	3445	132000	38,4

[1]) Die Tabelle zeigt, daß sich $dN \sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ gleichzeitig um beispielsweise das 3500fache verändert.

Auf analoge Weise wurde die Abhängigkeit der Streuung von der Dicke der Folie und von der Geschwindigkeit der α-Teilchen untersucht. In allen Fällen wurde für die Streuung in Folien aus schweren Metallen eine gute Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den Forderungen der Theorie erzielt. Diese Übereinstimmung ist gleichzeitig ein Beweis für die Anwendbarkeit des COULOMBschen Gesetzes auf die Wechselwirkung zwischen α-Teilchen und streuenden Kernen unter solchen Bedingungen, wie sie bei den Versuchen gegeben waren, d. h. für schwere Kerne und nicht allzu schnelle α-Teilchen.

Eine besonders für den Fall der Streuung in Gasen gedachte andere Methode der experimentellen Nachprüfung besteht darin, eine große Anzahl von WILSON-Aufnahmen von den Bahnen der α-Teilchen herzustellen, die Ablenkungswinkel zu messen und auszuzählen, wie oft bestimmte Streuwinkel angetroffen werden. Eine solche Methode wurde von BLACKETT hauptsächlich mit dem Ziel angewandt, die Grenzen der Anwendbarkeit des COULOMBschen Gesetzes zu untersuchen. Er konnte zeigen, daß das COULOMBsche Gesetz innerhalb einer Entfernung zwischen den Kernzentren und dem α-Teilchen von $7 \cdot 10^{-12}$ bis 10^{-9} cm für Argon und für Luft innerhalb der Grenzen von $3 \cdot 10^{-12}$ bis $5 \cdot 10^{-10}$ cm gilt.

Hieraus ist jedoch keineswegs der Schluß einer universellen Anwendbarkeit des COULOMBschen Gesetzes bei Kernwechselwirkungen zu ziehen. Im Gegenteil zeigte die Untersuchung der Streuung von α-Teilchen an leichten Kernen, daß eine starke Abweichung vom COULOMBschen Gesetz beobachtet wird, wenn sich die Entfernung zwischen den in Wechselwirkung stehenden Teilchen bis zu 10^{-12} cm verringert, und daß bei Entfernungen, die geringer als 10^{-12} cm sind, die Wirkung der schnell mit der Entfernung abnehmenden *Anziehungskräfte* auftritt, welche die COULOMBschen Abstoßungskräfte zwischen gleichgeladenen Teilchen überdeckt. Diese Frage wird ausführlicher im zweiten Band behandelt werden (z. B. Abschnitt XVIII).

§ 29. Die Bestimmung der Kernladung

Die RUTHERFORDsche Formel erlaubt, auf experimentellem Wege die Zahl Z der positiven elementaren Kernladungen zu bestimmen. Zählen wir auf dem Fluoreszenzschirm die Anzahl N der von den auffallenden α-Teilchen hervorgerufenen Szintillationen und die Anzahl dN der Szintillationen aus, die von den unter dem Winkel gestreuten α-Teilchen hervorgerufen wurden, dann kennen wir die Größe $d\sigma = dN/N$. Auf der rechten Seite der RUTHERFORDschen Formel gehen außer der gesuchten Größe Z entweder bekannte Größen ein (n, e) oder solche, die der experimentellen Bestimmung zugänglich sind (Mv^2, ϑ). Zur Auffindung von Z muß also eine Auszählung der N und dN Szintillationen durchgeführt werden. Die Hauptschwierigkeit des Experimentes liegt nun darin, daß sich diese Zahlen sehr stark voneinander unterscheiden. In den ersten Versuchen wurden die Zahlen N und dN mit verschiedenen Geräten, d. h. unter verschiedenen Bedingungen, gemessen, was eine bedeutende Fehlerquelle war.

CHADWICK benutzte eine Versuchsanordnung, bei der sowohl N als auch dN in ein und demselben Gerät gemessen werden konnten, wodurch ihm eine Bestimmung von Z mit großer Genauigkeit gelang. Der Gedanke des Versuches von CHADWICK besteht in folgendem: Die streuende Folie hat die Gestalt eines Ringes AA' (Abb. 61); das Präparat R und der Schirm S aus ZnS sind in der gleichen

Entfernung r von AA' angeordnet. Es wird nun die Anzahl der α-Teilchen ausgezählt, die um einen bestimmten Winkel ϑ gestreut werden. Zur Vereinfachung der Zählung wurde ϑ doppelt so groß wie der Winkel zwischen der Achse RS und der Richtung des von R zur Folie gehenden Strahles (Abb. 61) gewählt. Wird im Innern des Ringes zwischen R und S ein für die α-Teilchen undurchlässiger Schirm angeordnet, so ist es möglich, nur die gestreuten α-Teilchen zu zählen. Wird umgekehrt der Ring AA' durch einen Schirm geschlossen, so können wir die Teilchenzahl N im auffallenden Bündel auszählen. Da diese Zahl viel zu groß ist, um durch eine unmittelbare Auszählung der Szintillationen auf dem Schirm festgestellt zu werden (30 Szintillationen gestreuter α-Teilchen in der Minute entsprächen $N = 20000$), wurde vor S eine rotierende Scheibe mit einem engen Schlitz angeordnet, mit deren Hilfe die Anzahl der Szintillationen willkürlich auf einen beliebigen Bruchteil vermindert werden konnte.

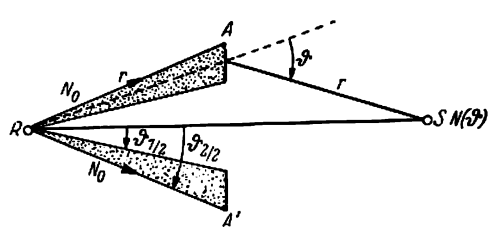


Abb. 61. Schema des Versuches von CHADWICK

Auf diesem Wege fand CHADWICK für Platin, Silber und Kupfer die folgenden Werte für Z: Pt (78) — 77,4; Ag (47) — 46,3; Cu (29) — 29,3. Die in Klammern hinter dem chemischen Symbol der Elemente stehende Zahl bezeichnet den Platz des entsprechenden Elementes im MENDELEJEWschen Periodischen System (Ordnungszahl). Hiermit zeigten die Versuche CHADWICKS, daß die Anzahl der positiven Elementarladungen des Kernes gleich der Ordnungszahl des entsprechenden Elementes ist. Diese von anderen Forschern für eine ganze Reihe von Elementen bestätigte Regel führt die Aufgabe der Kernladungsbestimmung auf die genaue Festlegung der Ordnungszahlen aller Elemente zurück. Hierzu dienen uns die Röntgenspektren, mit denen wir uns im nächsten Abschnitt bekannt machen werden.

IV. DIE RÖNTGENSTRAHLEN UND IHRE ANWENDUNG ZUR BESTIMMUNG DER ATOMKONSTANTEN

Die Röntgenstrahlen spielen bei der Erforschung des Atoms eine wichtige Rolle. Im § 29 wurde schon erwähnt, daß die Spektren der Röntgenstrahlen die genaue Festlegung der Ordnungszahlen aller Elemente und somit die Bestimmung ihrer Kernladungen erlauben. Außerdem wurden in den letzten Jahren die Methoden der Röntgenspektroskopie mit großem Erfolg bei der genauen Bestimmung der LOSCHMIDTschen Zahl, der Ladung e des Elektrons und auch der spezifischen Ladung e/m des Elektrons angewandt. In den weiteren Abschnitten werden wir des öfteren zur Betrachtung verschiedener mit den Röntgenstrahlen verbundener Erscheinungen kommen und uns deshalb mit ihrer Natur und ihren Eigenschaften bekannt machen müssen.

§ 30. Die Röntgenstrahlen

Die Röntgenstrahlen entstehen durch die Wirkung schneller Elektronen. In den sogenannten Röntgenröhren befindet sich der Kathode gegenüber eine metallische Scheibe, die Antikathode, an der die auffallenden Kathodenstrahlen gebremst werden, wobei die Röntgenstrahlen entstehen. In Röhren, die für medizinische Zwecke und für technische Durchstrahlungen benutzt werden, besteht die Antikathode aus Wolfram. Die Energie der anregenden Elektronen liegt bei normalen technischen Geräten in der Größenordnung von 100000 eV. Es gibt jedoch auch Geräte, die Röntgenstrahlen bei einer Elektronenenergie von einer Million Elektronenvolt erzeugen, und für die Zwecke der Kernphysik sind in den letzten Jahren besondere Elektronenbeschleuniger (Betatron und Synchrotron, siehe Band II, Abschnitt XIX) gebaut worden, welche die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch Bremsung von Elektronen mit Energien bis zu 100 Millionen Elektronenvolt gestatten.

Die für das Auge unsichtbaren Röntgenstrahlen erzeugen eine gut sichtbare Fluoreszenz in einigen natürlichen kristallinen Materialien und in künstlich bereiteten Pulvern (Luminophoren). Sie schwärzen photographische Platten und rufen eine Ionisation in Gasen hervor. Alle diese Erscheinungen werden zum Nachweis und zur Erforschung der Röntgenstrahlen benutzt.

Die Röntgenstrahlen sind ihrer Natur nach dem Licht ähnlich, sie unterscheiden sich von ihm nur durch ihre kürzere Wellenlänge. Wie das Licht besitzen auch die Röntgenstrahlen Welleneigenschaften, die durch Interferenz und Beugung zutage treten. Der erste, dem FRESNELschen Spiegelversuch analoge Interferenzversuch mit Röntgenstrahlen wurde von dem sowjetischen Physiker W. P. LINNIK

durchgeführt. Die Abb. 62 ist die Photographie eines Beugungsbildes, das bei dem Durchgang von Röntgenstrahlen durch einen engen Spalt erhalten wurde. Diese Versuche sind experimentell sehr schwierig, da der Spalt der kleinen Wellenlänge wegen sehr schmal sein muß. Die Photographie wird dann vergrößert, um die hellen und dunklen Streifen auswertbar zu machen. Die in der Abb. 62 angeführte Photographie wurde mit einem Spalt von 6 μ Breite erhalten und 26fach vergrößert. Kennt man die geometrischen Versuchsbedingungen (die Entfernung vom Spalt bis zur Photoschicht) und mißt die Entfernung zwischen den einander folgenden hellen Streifen aus, so kann man nun die Wellenlänge der Röntgenstrahlen in der aus der Optik bekannten Weise ausrechnen.[1]) Aus der in der Abb. 62 angeführten Photographie wurde für die Wellenlänge der Wert 8,33 Å mit einer Genauigkeit von 0,5% erhalten (wobei zu bedenken ist, daß die Wellenlänge der kürzesten, dem Auge noch sichtbaren violetten Strahlen 4000 Å beträgt). Im Gegensatz zu dieser langwelligen Röntgenstrahlung liegt die Wellenlänge der für medizinische Durchleuchtungen benutzten Röntgenstrahlen in der Größenordnung 1 Å.

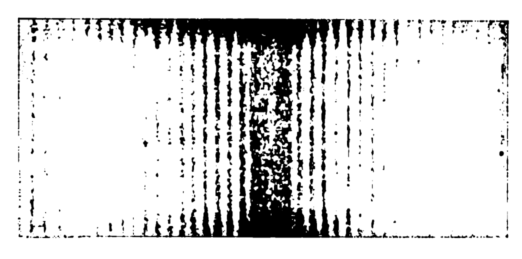


Abb. 62. Beugung von Röntgenstrahlen beim Durchgang durch einen schmalen Spalt, Breite des Spaltes 0,006 mm; Vergrößerung 26fach

Es werden zwei Arten von Röntgenstrahlen unterschieden. Übersteigt die Energie der an der Antikathode gebremsten Elektronen nicht eine bestimmte, für das Material der Antikathode charakteristische Größe, so heißt die entstehende Strahlung *Bremsstrahlung*. Sie bildet ein kontinuierliches, dem weißen Licht ähnliches Spektrum, weshalb die Bremsstrahlung auch „weiße" Röntgenstrahlung genannt wird. Das kontinuierliche Spektrum der Bremsstrahlung hat folgende charakteristische Besonderheiten: Die Verteilung der Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge stellt sich in diesem Spektrum in einer Kurve dar, die bei einer bestimmten Wellenlänge ein Maximum besitzt (siehe Abb. 158 auf Seite 290). Der Abfall der Intensität von diesem Maximum ist nach langen Wellen hin verschieden von dem nach kurzen Wellen hin; auf der Seite der langen Wellen ist die Abfallkurve konkav und nähert sich asymptotisch null mit anwachsender Wellenlänge; im Gegensatz hierzu ist der Abfall auf der Seite der kurzen Wellen steil, und das Spektrum bricht bei einer bestimmten Wellenlänge schroff ab. Diese kritische Wellenlänge ist die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums und hängt von dem Beschleunigungspotential der Elektronen ab. Beträgt dieses Potential V kV, so ist die in Å ausgedrückte Wellenlänge dieser Grenze gleich

$$\lambda = \frac{12{,}345}{V}\,\text{Å}. \tag{30,1}$$

So beträgt z. B. bei $V = 100$ kV die kürzeste Wellenlänge des kontinuierlichen Spektrums 0,123 Å. Die Beziehung (30,1) hat eine wichtige theoretische Deutung,

[1]) Siehe z. B. LANDSBERG, „Optik" § 11, Moskau 1947, bzw. FRISCH-TIMOREWA, „Lehrgang der allgemeinen Physik", Bd. III, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

die im § 112 betrachtet werden wird. Hier ist jetzt nur wesentlich, daß der Charakter des kontinuierlichen Spektrums nicht von der Natur der Antikathode abhängt, sondern allein durch das Beschleunigungspotential bestimmt wird.

Ist nun die Elektronenenergie gleich oder größer als die oben erwähnte kritische Größe, dann entsteht die „*charakteristische*“ Strahlung, die das Material der Antikathode in der Weise charakterisiert wie jedes optische Spektrum die Ausstrahlung eines Gases oder Dampfes. Das Spektrum der charakteristischen Strahlung ist ein Linienspektrum. Bemerkenswert hierbei ist, daß ein jedes Element ein bestimmtes, spezifisches Spektrum besitzt, das vollkommen davon unabhängig ist, ob dieses Element in freiem Zustand oder in einer chemischen Verbindung zur Röntgenstrahlung angeregt wird. Hierdurch unterscheiden sich die Röntgenstrahlen wesentlich von den optischen, weil ein Element in Atom- und in Molekularzuständen verschiedene optische Spektren liefert. So sind beispielsweise die optischen Spektren des O-Atoms, des Moleküls O_2 und des H_2O-Moleküls vollkommen verschieden und setzen sich nicht additiv aus den Spektren der in den Molekülverband eingehenden Atome zusammen.

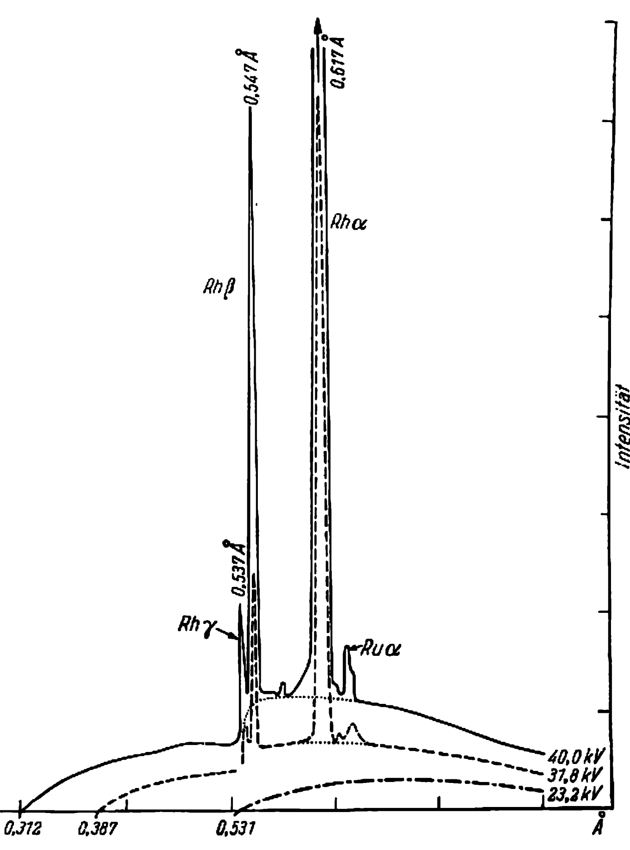


Abb. 63. Entstehung der K-Serie der charakteristischen Strahlung einer Rhodiumantikathode. Auf der Abszisse sind die Wellenlänge der Röntgenstrahlung und die Wellenlänge der kurzwelligen Grenze eines jeden Spektrums angegeben. (Die Linie *Ruα* gehört zu Ruthenium, das in dem Rhodiumstück als Beimengung enthalten war.)

In der Abb. 63 ist ein interessantes Beispiel für die Veränderung des Röntgenspektrums bei der Entstehung der charakteristischen Strahlung angeführt. Auf der Abszisse ist die Wellenlänge und auf der Ordinate die Intensität aufgetragen; die verschiedenen Kurven sind bei verschiedenen Energien der anregenden Elektronen aufgenommen. Bei 23,2 kV ist das Spektrum noch kontinuierlich, bei 31,8 kV wird dem kontinuierlichen Spektrum ein aus scharf ausgeprägten Linien bestehendes Linienspektrum überlagert; bei 40,0 kV bleibt der Charakter des Spektrums erhalten, aber die Intensität der Linien wächst so stark an, daß die stärkste

von ihnen bei dem benutzten Maßstab nicht mehr auf die Zeichnung gebracht werden konnte.

Dieses Linienspektrum gehört zur charakteristischen Strahlung des Antikathodenmaterials, in diesem Falle zum Rhodium.

Die Spektren der charakteristischen Strahlung enthalten zusammengehörige gesetzmäßige Linienfolgen oder Serien, die verschiedenen Teilen des Röntgenspektrums angehören. Diese Serien werden aus historischen Gründen mit den Buchstaben K, L, M, N bezeichnet. Die K-Serie ist die kürzestwellige, die in Richtung langer Wellen folgende Serie ist die L-Serie, der dann die nur bei schweren Elementen beobachtbaren Serien M und N folgen. Diese Serien werden ausführlich im § 36 betrachtet werden.

§ 31. Die Absorption der Röntgenstrahlen

Eine der bemerkenswerten Eigenschaften der Röntgenstrahlen ist ihr Absorptionsgesetz. Es zeigte sich vor allem, daß die Absorption der Röntgenstrahlen durch Materie in keiner Weise von ihren optischen Eigenschaften abhängt. So absorbiert beispielsweise das farblose und für Licht durchlässige Bleiglas die Röntgenstrahlung praktisch vollständig, es wird daher zum Schutz für das mit den Röntgenapparaturen beschäftigte Personal benutzt. Im Gegensatz hierzu werden die Röntgenstrahlen von einer dünnen, für Licht undurchlässigen Aluminiumfolie sehr wenig absorbiert, die Folie ist für die Strahlung der technischen Röntgenröhren mit Spannungen in der Größenordnung von 100 kV fast vollständig durchsichtig.

Die Anwendung der Röntgenstrahlen für medizinische und technische Durchleuchtungen ist auf den Gesetzen ihrer Absorption begründet, die im folgenden erläutert werden. – Geht ein paralleles Bündel von Röntgenstrahlen durch eine Materieschicht, so erleidet das Bündel eine Schwächung und die Intensität verringert sich. Diese Schwächung erscheint als das Ergebnis zweier Vorgänge: 1. der Streuung und 2. der Absorption. Diese beiden Vorgänge sind wesentlich voneinander verschieden.

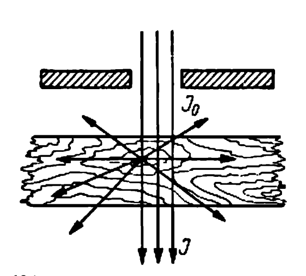


Abb. 64. Streuung eines Röntgenstrahles bei Durchgang durch Materie

1. Die Schwächung infolge Streuung wird bewirkt, indem ein Teil der Strahlung zur Seite abgelenkt wird und aus dem parallelen Strahlenbündel austritt (Abb. 64). Diese Erscheinung ist vollkommen der Streuung analog, die das Licht beim Durchgang durch ein trübes Medium erleidet. Ein Unterschied besteht nur darin, daß die Trübheit des Mediums beim Lichtdurchgang auf beigemischte, hinreichend große Teilchen mit einem vom Brechungskoeffizienten des Mediums verschiedenen Brechungskoeffizienten zurückzuführen ist, während für die Röntgenstrahlung wegen ihrer kleinen Wellenlänge bereits ein beliebiges für Licht durchsichtiges Medium als „trübe" erscheint. In diesem Falle wirken die Atome oder Moleküle des Materials selbst als streuende Zentren. Eine molekulare, analoge Streuung wird auch für Licht beobachtet, tritt aber im Falle des Lichtes als ein sehr schwacher Effekt auf. Zum Vergleich führen wir die folgenden Werte an: ein paralleles

Lichtbündel wird beim Durchgang durch eine Schicht reinen Wassers von 1 km Dicke auf den e-($\approx$ 2,7)ten Teil abgeschwächt, während die Röntgenstrahlung um denselben Betrag bereits beim Durchgang durch eine Wasserschicht von 5 cm Stärke geschwächt wird.

Um die Molekularstreuung des Lichtes beobachten zu können, ist es notwendig, daß in dem Material eine große Anzahl örtlicher Verdichtungen und Verdünnungen entstehen (Dichteschwankungen), wie dies beispielsweise für jedes Material nahe seiner kritischen Temperatur (der sogenannten ,,kritischen Opaleszenz) stattfindet.

2. Die Schwächung infolge Absorption beruht darauf, daß ein Teil der Energie der Röntgenstrahlung im Material eine wirkliche Absorption erleidet.

Ist ein paralleles Bündel von Röntgenstrahlen monochromatisch, d. h. besteht es aus Strahlen nur einer bestimmten Wellenlänge, so wird seine Schwächung durch eine unendlich dünne Materieschicht der Dicke dx dem einfachen Gesetz

$$-dJ = J\mu\, dx$$

gehorchen, worin J die Intensität des auf die Schicht auffallenden Bündels und μ der Schwächungskoeffizient ist. Nach Integration dieser Gleichung (analog der Gleichung im § 24) erhält man das Gesetz der Schwächung von Röntgenstrahlung durch eine Schicht der endlichen Dicke d:

$$J = J_0\, e^{-\mu d}, \tag{31,1}$$

in dem J_0 die Intensität des parallelen Bündels bei $d = 0$ ist. Die Maßeinheit des Absorptionskoeffizienten μ ist cm^{-1}, da der Exponent μd eine dimensionslose Größe sein muß.

Insofern beruht also die Schwächung des Strahlenbündels auf einer wirklichen Absorption und auf einer Streuung, und der Schwächungskoeffizient μ erscheint als Summe zweier Koeffizienten, des Koeffizienten der wirklichen Absorption τ und des Streuungskoeffizienten σ:

$$\mu = \tau + \sigma. \tag{31,2}$$

Beide Koeffizienten τ und σ, und damit auch μ, sind der Masse des Materials proportional. Deshalb ist es bequemer, die sogenannten Massenkoeffizienten zu benutzen, die durch die Beziehungen μ/ϱ, τ/ϱ und σ/ϱ gegeben sind, worin ϱ die Dichte des Materials ist. Offensichtlich kann dann die Formel (31,1) in die Form

$$J = J_0\, e^{-\frac{\mu}{\varrho}\varrho d} \tag{31,3}$$

umgeschrieben werden. Das Produkt ϱd ist die Masse des Materials in einer Säule mit dem Querschnitt von 1 cm² und der Dicke d; μ/ϱ hat die Maßeinheit [$cm^2 \cdot g^{-1}$].

Ist $\varrho d = 1\, g\, cm^{-2}$, so ist $J = J_0\, e^{-\frac{\mu}{\varrho}}$, woraus folgt, daß μ/ϱ die Schwächung der Röntgenstrahlung durch eine Schicht charakterisiert, die 1 g Material pro Quadratzentimeter enthält.

Für die (theoretische) Rechnung ist die Benutzung der sogenannten atomaren Schwächungs-, Absorptions- und Streuungskoeffizienten μ_α, τ_α, σ_α, welche aus den Werten μ/ϱ, τ/ϱ, σ/ϱ für ein bestimmtes Element durch Multiplikation mit der

absoluten Atommasse, d. h. mit dem Verhältnis eines Grammatoms A des gegebenen Elementes zur LOSCHMIDTschen Zahl N, erhalten werden, noch bequemer:

$$\mu_a = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}, \qquad \tau_a = \frac{\tau}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}, \qquad \sigma_a = \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}. \tag{31,4}$$

Auf diese Weise charakterisiert beispielsweise μ_a die Schwächung in einer ein Atom pro Quadratzentimeter enthaltenden Schicht. Es ist noch zu bemerken, daß die Maßeinheit der atomaren Koeffizienten μ_α, τ_α und σ_α [cm²] ist. Aus diesem Grunde kann man sie als die Wirkungsquerschnitte des Atoms in bezug auf die Schwächung, Absorption und Streuung deuten.

Befriedigend genau wird die empirisch aufgestellte Beziehung

$$\tau_\alpha = C Z^4 \lambda^3 \tag{31,5}$$

befolgt, in der C eine Konstante, Z die Atomnummer des Materials und λ die Wellenlänge sind. Mit Hilfe der Definition (31,4) für den Massenkoeffizienten der Absorption erhält man

$$\frac{\tau}{\varrho} = \frac{\tau_\alpha N}{A} = \frac{CN}{A} Z^4 \lambda^3 \tag{31,6}$$

oder

$$\frac{\tau}{\varrho} = \frac{C'}{A} Z^4 \lambda^3 \qquad (C' = CN). \tag{31,6'}$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, daß die Absorption der Strahlen bestimmter Wellenlänge sehr schnell mit der Vergrößerung der Ordnungszahl anwächst (proportional der vierten Potenz von Z).

Die zweite bemerkenswerte Besonderheit der Absorption der Röntgenstrahlung besteht darin, daß sie als reine Atomeigenschaft erscheint: es setzt sich der *Molekularkoeffizient* der Absorption additiv aus den Atomkoeffizienten der einzelnen zum Molekül gehörenden Elemente zusammen. Daher genügt für die Berechnung der Molekularkoeffizienten der Vielzahl der chemischen Verbindungen die Kenntnis der Atomkoeffizienten der Absorption der Elemente.

Die Formeln (31,6) und (31,6′) und die Additivität der Absorption der Röntgenstrahlung liegen ihrer Anwendung für die Durchleuchtung zugrunde. Vergleichen wir beispielsweise die Absorptionskoeffizienten der Knochen und des Gewebes des menschlichen Körpers. Das Material der Knochen ist zum großen Teil Calciumphosphat $Ca_3(PO_4)_2$; die Absorption des Gewebes wird größtenteils durch das darin enthaltene Wasser (H_2O) bedingt. Da die Ordnungszahlen von Ca = 20, P = 15, O = 8 und H = 1 sind, so ergibt sich für das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten beider Materialien

$$\frac{3 \cdot 20^4 + 2 \cdot 15^4 + 8 \cdot 8^4}{2 + 8^4} \approx 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^4 + 8 .$$

Diese Beziehung zeigt, daß der Absorptionskoeffizient von $Ca_2(PO_4)_2$ beispielsweise 150mal größer als der Absorptionskoeffizient des Wassers und somit auch des Gewebes ist. Für praktische Zwecke ist jedoch die Beziehung der Massenkoeffizienten wichtiger. Wenden wir auf den angegebenen Fall die Formel (31,6) an, dann erhalten wir für diese Beziehung den Wert 68, der bereits erklärt, weshalb auf den Röntgenogrammen die Schatten der Knochen so scharf hervortreten.

Die Formeln (31,5) und (31,6) zeigen auch, daß die Absorption der Röntgenstrahlung schnell mit der Vergrößerung der Wellenlänge anwächst. Umgekehrt sind die Durchdringungsfähigkeit der Röntgenstrahlen und ihre Härte um so größer, je kleiner ihre Wellenlänge ist. Werden auf der Abszisse die Wellenlänge und auf der Ordinate $\sqrt[3]{\frac{\tau}{\varrho}}$ aufgetragen, so wird nach den Formeln (31,5) und (31,6) für ein gegebenes Element der Absorptionsverlauf in Abhängigkeit von λ durch eine Gerade dargestellt (Abb. 65). Jedoch erleidet die Absorption bei einer be-

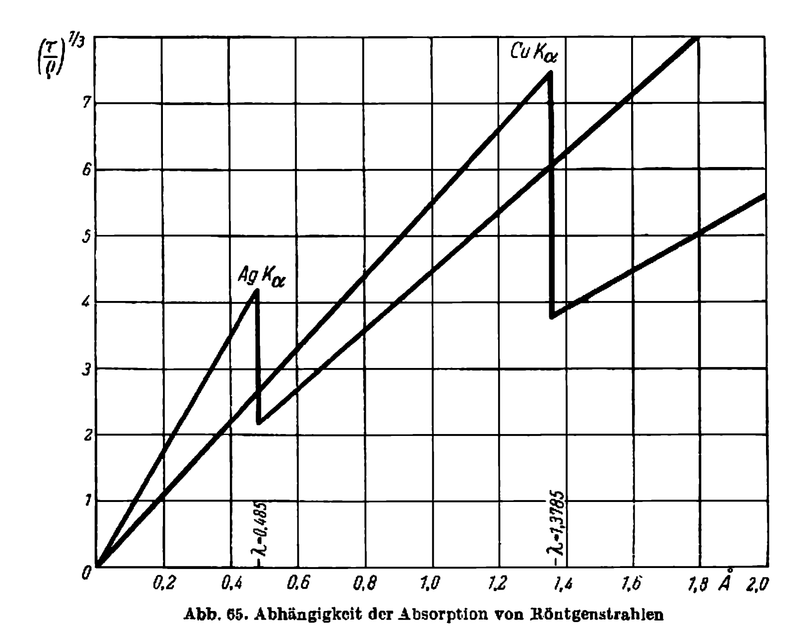


Abb. 65. Abhängigkeit der Absorption von Röntgenstrahlen

stimmten Wellenlänge einen scharfen Sprung und verläuft dann von neuem wieder linear. Wie aus der Abb. 65 ersichtlich ist, wird bei $\lambda = 1{,}3785$ Å für Kupfer ein solcher Sprung beobachtet, für Silber bei $\lambda = 0{,}485$ Å. Diese kritischen Wellenlängen haben die folgende Bedeutung: Wird irgendein Element, beispielsweise Cu oder Ag, mit monochromatischen Röntgenstrahlen abnehmender Wellenlänge bestrahlt, so wird das Element bei einer ganz bestimmten Wellenlänge der anregenden Röntgenstrahlen beginnen, seine eigene, charakteristische Ausstrahlung in Form der *Fluoreszenzstrahlung* auszusenden. Die kritischen Wellenlängen, bei denen dieser Sprung der Absorption beobachtet wird, stimmen mit den kritischen Wellenlängen für die Anregung der charakteristischen Fluoreszenzstrahlung gegebener Wellenlänge überein. Die Entstehung des Absorptionssprunges wird in den Formeln (31,5) und (31,6) dadurch berücksichtigt, daß der Koeffizient C verschiedene Werte auf der einen und der anderen Seite der kritischen Wellenlänge annimmt.

Übung: 1. Die Schwächung der Röntgenstrahlen beim Durchgang durch Materie wird oft durch die Angabe derjenigen Schichtdicke charakterisiert, bei der die Röntgenstrahlen um die Hälfte geschwächt werden (Dicke der halben Absorption, $d_{1/2}$). Es ist zu zeigen, daß $d_{1/2}$ durch $\frac{\mu}{\varrho}$ mit Hilfe der Formel $d_{1/2} = \frac{0{,}693}{\frac{\mu}{\varrho}\,\varrho}$ berechnet werden kann.

λ (Å)	μ/ϱ		
	Al	Ag	Pb
0,1	0,16	1,4	3,8
0,5	2,0	11	54
1,0	15	73	—

2. Die Massenkoeffizienten der Absorption von Aluminium, Silber und Blei sind für einige Wellenlängen in der Tabelle gegeben. Es sind die Wirkungsquerschnitte der Atome für die Absorption der angegebenen Wellenlängen und die Schichtdicke der halben Absorption auszurechnen.

§ 32. Die Streuung der Röntgenstrahlung

Die Streuung der Röntgenstrahlen zeigt Gesetzmäßigkeiten, die von den Gesetzmäßigkeiten der Lichtstreuung in dem optischen Gebiet des Spektrums, d. h. in dem Gebiet der sichtbaren und ultravioletten Strahlen, sehr verschieden sind. In dem optischen Gebiet des Spektrums, in dem die Wellenlängen von der Größenordnung 10^{-5} cm und somit bedeutend größer als die Atomabmessungen (in der Größenordnung 1 Å $= 10^{-8}$ cm) sind, ist die Streuung der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional (RAYLEIGHsches Gesetz).

Im Gebiet der Röntgenstrahlen dagegen ist die Wellenlänge von derselben Größenordnung wie der Atomdurchmesser. Dementsprechend lautet auch das Gesetz der Streuung hier anders. *Die Streuung der Röntgenstrahlen hängt nicht von der Wellenlänge ab.* J. J. THOMSON betrachtete die Streuung von Röntgenstrahlen als Ergebnis der erzwungenen Schwingungen, die von dem elektromagnetischen Feld der einfallenden Röntgenwelle herrühren, und leitete bereits in der Anfangsperiode der Röntgenstrahlenforschung die folgende Formel für den atomaren Streuungskoeffizienten ab:

$$\sigma_\alpha = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2c^4} Z, \tag{32,1}$$

in der e und m die Ladung und die Masse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit sind. Die in diese Formel eingehende Ordnungszahl Z des Elementes ist gleich der Anzahl der Elektronen im neutralen Atom. Wie bereits gezeigt, hat σ_α die Dimension einer Fläche. Auf diese Weise können wir $\frac{\sigma_\alpha}{Z} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2c^4}$ als den Wirkungsquerschnitt eines Elektrons für die Streuung der Röntgenstrahlen bezeichnen. Setzen wir hier die bekannten Werte

$$e = 4{,}80 \cdot 10^{-10}\ \text{CGSE}, \quad \frac{e}{mc} = 1{,}760 \cdot 10^{7}\ \text{CGSMg}^{-1}, \quad c = 2{,}997 \cdot 10^{10}\ \text{cm s}^{-1}$$

ein, dann erhalten wir

$$\sigma_\alpha = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2c^4} = 6{,}57 \cdot 10^{-25}\ \text{cm}^2. \tag{32,2}$$

Der Radius dieses Wirkungsquerschnittes ist dann gleich

$$r_0 = 4{,}57 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}. \tag{32,3}$$

Diese Größe ist von derselben Größenordnung wie der sogenannte „klassische Elektronenradius" (siehe § 11).

Die Formel (32,1) wurde von THOMSON auf die folgende interessante Weise zur Bestimmung der Elektronenanzahl im Atom, die gleich der Kernladung Z ist, benutzt:

Da nach der Bestimmung der Atomkoeffizienten

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \frac{A}{N}$$

ist, so ergibt die Formel (32,1) für den Massenkoeffizienten der Streuung

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2c^4} \cdot \frac{NZ}{A}; \tag{32,4}$$

benutzen wir noch das Resultat der Rechnung (32,2), dann haben wir

$$\frac{\sigma}{\varrho} = 6{,}57 \cdot 10^{-25} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{Z}{A} \approx 0{,}40 \cdot \frac{Z}{A}. \tag{32,5}$$

Die experimentelle Prüfung der THOMSON-Formel zeigte, daß sie für leichte Elemente ziemlich gut erfüllt wird. Die aus Versuchen gefundene Größe $\frac{\sigma}{\varrho}$ erwies sich als unabhängig von der Wellenlänge und gleich 0,20. Setzen wir diesen Wert in (32,5) ein, dann erhalten wir

$$0{,}20 = 0{,}40 \cdot \frac{Z}{A}$$

oder

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}. \tag{32,6}$$

Diese Formel besagt, daß mit Ausnahme von Wasserstoff bei leichten Elementen die Ordnungszahl gleich der Hälfte des Atomgewichtes sein muß. Diese Beziehung wird tatsächlich am Anfang des Periodensystems angenähert erfüllt [He ($Z=2$, $A=4$), Li ($Z=3$, $A=7$), C ($Z=6$, $A=12$), usw.]. Die zu der Beziehung (32,6) führenden physikalischen Ursachen sind mit der Natur der Kernkräfte verbunden (siehe Bd. II, Abschnitt XVIII). Zur Betrachtung der interessanten und wichtigen Eigenschaften der gestreuten Röntgenstrahlung kommen wir noch in den §§ 116 und 117.

Übung. Unter Benutzung der Formel (32,1) und des experimentellen Wertes von σ/ϱ ist die Anzahl der Elektronen in einem Grammatom zu berechnen. Mit Hilfe dieser Zahl ist weiterhin die Anzahl der Elektronen in einem Atom Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenstoff zu bestimmen.

§ 33. Beugung der Röntgenstrahlen am Kristallgitter

Im § 30 sahen wir, daß bei den Röntgenstrahlen dieselben Beugungserscheinungen wie bei Licht auftreten. Die einfachste und praktisch wichtigste Art, eine Beugung der Röntgenstrahlen zu erzielen, ist die Verwendung eines *Kristalls* als

Beugungsgitter. Der Grund für die leichte Darstellung der Beugung der Röntgenstrahlen mit Hilfe von Kristallen liegt darin, daß die Atomabstände im Kristall von derselben Größenordnung sind wie die Wellenlänge der Röntgenstrahlen (1 Å). Bekanntlich wurde gerade beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle zum ersten Male die Beugung der Röntgenstrahlen von v. LAUE im Jahre 1912 beobachtet und die Identität ihrer Natur mit der des Lichtes bewiesen.

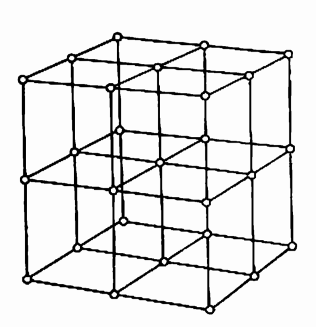


Abb. 66. Kubisches Gitter

Ein Kristall stellt eine Vereinigung gesetzmäßig im Raum verteilter Atome, Atomgruppen oder Ionen dar. Als „Raumgitter" ist in Abb. 66 ein einfaches Kristallgitter dargestellt. Um die Bedingungen für die Beugung an solchen regelmäßigen dreidimensionalen Strukturen zu finden, betrachten wir nacheinander ein eindimensionales (lineares), ein zweidimensionales und ein dreidimensionales Gitter.

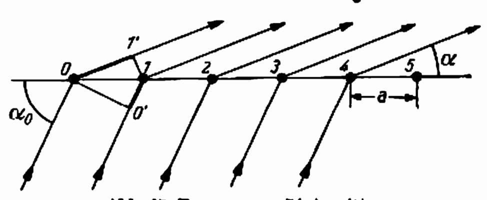


Abb. 67. Beugung am Liniengitter

Wir mögen eine Reihe streuender Zentren *0, 1, 2, 3, 4, 5* (Atome) haben, die auf einer Geraden liegen mögen (Abb. 67), und auf dieses lineare Gitter soll unter dem Winkel α_0 eine ebene Welle fallen. Jedes dieser streuenden Zentren *0, 1, 2, 3* erscheint als Quelle einer neuen sphärischen Welle, wobei sich diese kohärenten, sphärischen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten. Betrachten wir nun irgendeine willkürliche, durch den Winkel α charakterisierbare Richtung. Der Gangunterschied zweier Strahlen, die durch je ein Paar benachbarter Atome hindurchgehen (0,1; 1,2;), ist gleich $a(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$, wie leicht aus der Abb. 67 ersichtlich ist. Um das Beugungsmaximum in Richtung α zu erhalten, muß die Bedingung

$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = n\lambda \tag{33,1}$$

erfüllt sein, in der n eine ganze Zahl ist. Aus (33,1) folgt

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 + n\cdot\frac{\lambda}{a}. \tag{33,2}$$

Diese Formel zeigt, daß ein lineares Gitter wie ein Spektralgerät wirkt, da jeder Wellenlänge λ ein bestimmter Wert des Winkels α entspricht. Bei $n = 1$ entsteht das Spektrum erster Ordnung, bei $n = 2$ das Spektrum zweiter Ordnung usw. In den symmetrischen Richtungen entstehen bei $n = -1, -2, \ldots$ ebenfalls die Spektren erster, zweiter ... Ordnung, so daß ihre Gesamtheit eine eindimensionale Mannigfaltigkeit bildet.

Bedenken wir noch, daß jedes streuende Zentrum als Quelle einer *sphärischen* Welle erscheint, dann werden bei einer gegebenen Wellenlänge die dem Maximum der Interferenz einer bestimmten Ordnung entsprechenden Richtungen *im Raum* auf der Oberfläche eines Konus mit dem Scheitelwinkel α liegen. In der Abb. 68 ist durch den Buchstaben L das lineare Gitter gekennzeichnet. Wird ein Fluores-

zenzschirm oder eine Photoschicht in einiger Entfernung von dem Gitter angeordnet, so werden die Spuren der Interferenzkegel auf diesem Schirm Hyperbeln ergeben, auf denen für eine bestimmte Wellenlänge die Interferenzmaxima liegen.

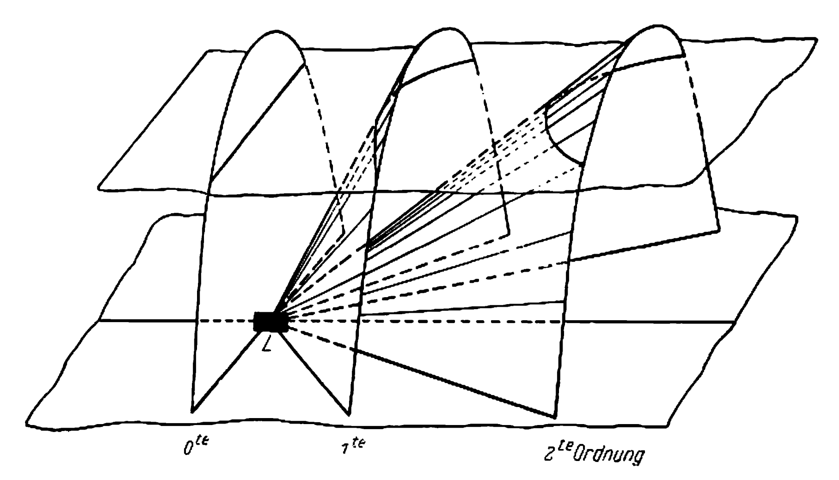


Abb. 68. Interferenzstreifen eines Liniengitters

Betrachten wir jetzt ein ebenes, d. h. zweidimensionales Gitter (Abb. 69). Es ist klar, daß dieses Gitter als eine zweifache Mannigfaltigkeit linearer, parallel zu den x- und y-Achsen befindlicher Gitter angesehen werden kann. Auf dieses Gitter soll nun eine ebene Welle fallen, deren Normale mit den x- und y-Achsen die Winkel α_0 und β_0 bildet. Betrachten wir wie früher jedes Gitterzentrum als Quelle einer sphärischen Welle, so sehen wir, daß die Richtungen, in denen die Interferenzmaxima liegen, durch die Winkel α und β charakterisiert werden. Diese befriedigen beide Bedingungen

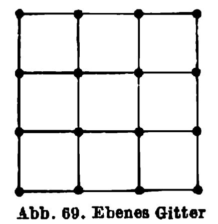


Abb. 69. Ebenes Gitter

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= n_1\lambda, \\ a(\cos\beta - \cos\beta_0) &= n_2\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{33,3}$$

in denen wieder n_1 und n_2 ganze Zahlen sind. Die erste dieser Bedingungen ist offensichtlich die Bedingung des Interferenzmaximums für lineare Gitter, die zur x-Achse parallel liegen; die zweite ist dieselbe Bedingung für Gitter, die zur y-Achse parallel sind. Bringt man nun in einiger Entfernung von dem ebenen Gitter einen Fluoreszenzschirm an, so wird jedes der linearen Gitter, in welche wir das ebene Gitter zerlegten, auf dem Schirm sein eigenes Hyperbelsystem geben, und die beiden Bedingungen (33,3) werden offensichtlich für die Punkte befriedigt werden, die auf dem Schnittpunkt der Hyperbeln liegen (Abb. 70). Bestimmen wir aus (33,3) cos α und cos β, dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\alpha_0 + n_1 \cdot \frac{\lambda}{a}, \\ \cos\beta &= \cos\beta_0 + n_2 \cdot \frac{\lambda}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{33,4}$$

Hieraus folgt, daß zu jeder Wellenlänge bestimmte Werte α und β gehören, d. h., auch das ebene Gitter zerlegt die Strahlung in ein Spektrum. Im Gegensatz zu dem linearen Gitter wird hier nicht eine einfache, sondern eine *zweifache* Mannigfaltigkeit von Spektren erhalten. Tatsächlich wird ein bestimmtes Spektrum durch ein Zahlenpaar (n_1, n_2) charakterisiert und auf diese Weise die Spektren der Ordnungen $(+1, +1)$, $(+1, +2)$, . . . und ebenso der Ordnungen $(+1, -1)$, $(+1, -2)$, . . . erhalten, wie aus der Abb. 70 ersichtlich ist.

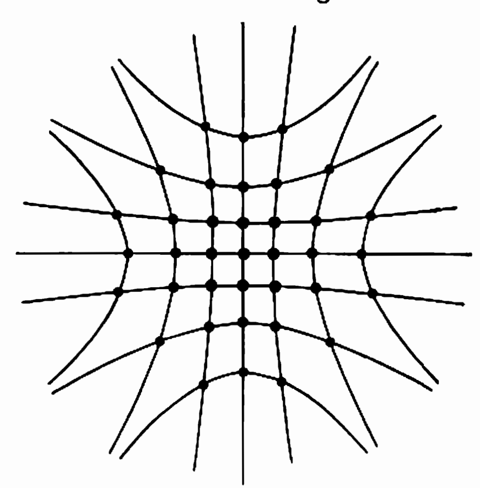


Abb. 70. Hyperbelscharen bei der Beugung an einem ebenen Gitter

Betrachten wir nun ein *räumliches* Gitter, das wir in drei Systeme linearer Gitter zerlegen können, die zu den drei Koordinatenachsen x, y, z parallel liegen. In diesem Falle werden die Interferenzmaxima in den Richtungen liegen, die durch die Winkel α, β, γ charakterisiert werden und die gleichzeitig die drei Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= n_1\lambda, \\ a(\cos\beta - \cos\beta_0) &= n_2\lambda, \\ a(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= n_3\lambda \end{aligned}\right\} \tag{33,5}$$

erfüllen müssen. Aus diesen Bedingungen bestimmen wir die Richtungskosinusse für die Interferenzmaxima

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\alpha_0 + n_1\frac{\lambda}{a}, \\ \cos\beta &= \cos\beta_0 + n_2\frac{\lambda}{a}, \\ \cos\gamma &= \cos\gamma_0 + n_3\frac{\lambda}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{33,6}$$

Wie ersichtlich, wird die Ordnung der Interferenz hier schon durch die drei Zahlen (n_1, n_2, n_3) bestimmt. Außerdem wird auch der neue Umstand festgestellt, daß die Interferenzmaxima nicht für beliebige Wellenlängen, sondern nur für einige genau bestimmte möglich sind. Tatsächlich werden neben den Bedingungen (33,5) für eine *beliebige* Richtung im Raum noch die Bedingungen

$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{33,7}$$

automatisch erfüllt. Daher werden aus (33,5) nicht nur die Richtungskosinusse des Interferenzmaximums bestimmt, sondern auch die *Wellenlänge*, für welche diese Interferenz auftritt. Quadrieren wir die Gleichungen (33,6), addieren sie und beachten die Formel (33,7), dann finden wir

$$1 = 1 + \frac{\lambda^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + 2\cdot\frac{\lambda}{a}(n_1\cos\alpha_0 + n_2\cos\beta_0 + n_3\cos\gamma_0),$$

woraus

$$\lambda = -2a \cdot \frac{n_1 \cos \alpha_0 + n_2 \cos \beta_0 + n_3 \cos \gamma_0}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \tag{33,8}$$

folgt. Diese Formel zeigt, daß bei gegebener Richtung der einfallenden ebenen Welle (α_0, β_0, γ_0) ein Interferenzmaximum bestimmter Ordnung (n_1, n_2, n_3) *nur* für eine Wellenlänge erhalten wird, die die Gleichung (33,8) befriedigt.

Die geometrische Veranschaulichung, die wir bei der Betrachtung des linearen und des ebenen Gitters benutzten, läßt uns leicht den Grund dieser Beschränkung verstehen. Nehmen wir zur Vereinfachung an, daß die Normale zur einfallenden ebenen Welle in der z-Achse liegt und daß auch der Schirm normal zur z-Achse gelegen ist. Dann werden die Richtungen der Interferenzmaxima für lineare, parallel zur z-Achse gelegene Gitter auf der Oberfläche von Konussen angeordnet sein, welche auf dem Schirm ein System von Kreisen geben[1]) (Abb. 71). Dabei entspricht jeder Kreis einer bestimmten Wellenlänge λ und einer bestimmten Interferenzordnung $n_3 =$ const. Andererseits gibt jedes der ebenen, parallel zur xy-Ebene liegenden Gitter bei einer gegebenen Wellenlänge eine Gesamtheit von Interferenzmaxima, die auf den Schnittpunkten zweier Hyperbelsysteme liegen (siehe Abb. 70). Damit bei $\lambda =$ const alle drei Bedingungen (33,6) erfüllt werden, ist es notwendig, daß die Kreise der Abb. 71 durch die Hyperbelschnittpunkte gehen, was bei einer bestimmten Wellenlänge sehr unwahrscheinlich ist. Deshalb wird bei Bestrahlung eines räumlichen Gitters mit monochromatischer Strahlung oder mit den Strahlen eines linearen Spektrums eine Interferenz selten auftreten. Im Gegensatz hierzu wird bei der Bestrahlung eines Gitters mit einem kontinuierlichen Spektrum immer eine passende Wellenlänge vorhanden sein, die alle Interferenzbedingungen befriedigt. Auf diese Weise wird eine Welle mit einem kontinuierlichen Spektrum nach dem Durchgang durch ein Raumgitter in ein System monochromatischer Interferenzstrahlen zerlegt, die auf dem Schirm (Photoschicht) eine Gesamtheit symmetrisch angeordneter Interferenzflecke ergeben und die sich uns als verschieden gefärbt darstellen würden, wenn sie dem Auge unmittelbar wahrnehmbar wären.

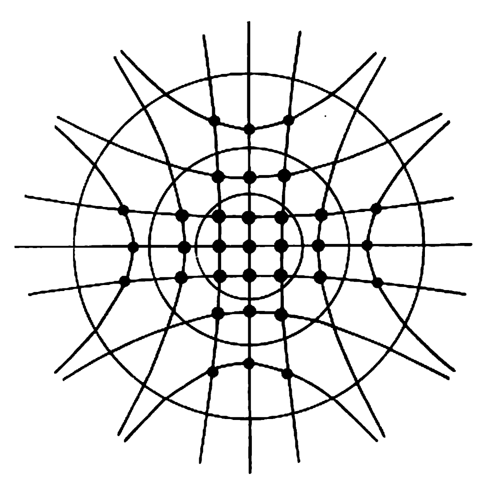


Abb. 71. Geometrische Veranschaulichung der Interferenzbedingung

Zum Schluß müssen wir bemerken, daß die vorhergegangenen Betrachtungen mit der folgenden Beschränkung auf eine beliebige Wellenlänge und auf ein Gitter mit beliebiger Entfernung zwischen den Zentren angewandt wurden: die Wellenlänge λ

[1]) Fiele die Richtung der Gitter nicht mit der z-Achse zusammen oder wäre die Anordnung unter einem beliebigen Winkel zu dieser Achse geneigt, so würden an Stelle der Kreise Ellipsen erhalten werden.

muß kleiner als die Gitterkonstante a sein, weil bei $\lambda \geqq a$ entsprechend $n\frac{\lambda}{a} > 1$ ist und die Bedingungen (33,2), (33,7) und (33,6) von keiner Wellenlänge befriedigt werden können (der Kosinus kann nicht größer 1 werden). Ist andererseits $\lambda \gg a$, dann können zwar die Interferenzbedingungen befriedigt werden, aber die Winkel α, β, γ erweisen sich als so klein, daß eine Beobachtung der Interferenz schwierig wird. Deshalb ist es für die Interferenz der Röntgenstrahlen an Kristallen besonders günstig, daß die Wellenlänge der Röntgenstrahlen von derselben Größenordnung ist wie die Atomabstände im Kristall.

Zur Schaffung eines Raumgitters mit der Konstante a, die für die Beugung sichtbaren Lichtes paßt, kann der Ultraschall benutzt werden. Die Wellenlängen des Ultraschalls in Flüssigkeiten und in festen Körpern sind von der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} cm und liegen nahe den Wellenlängen des sichtbaren Lichtes ($7 \cdot 10^{-5}$ bis $4 \cdot 10^{-5}$). Erzeugen wir deshalb in einer Flüssigkeit oder einem festen Körper stehende, ebene Ultraschallwellen, so wird das entstehende System von Verdichtungen und Verdünnungen ein gutes Beugungsgitter für Licht abgeben. Es ist natürlich zu erwarten, daß drei Ultraschallwellen, die zueinander senkrecht oder unter beliebig anderen Winkeln gerichtet sind, ein Raumgitter mit einer Konstante



Abb. 72. Beugung von Licht in einem Raumgitter, das in Xylol durch drei Ultraschallwellen gebildet wird, die im Winkel von 90° zueinander stehen

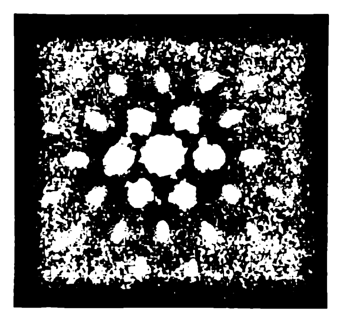


Abb. 73. Dasselbe, wobei die Ultraschallwellen im Winkel von 120° gerichtet sind

ergeben, die für die Beugung sichtbaren Lichtes paßt. Diese Erwartung wird tatsächlich bestätigt. In den Abb. 72 und 73 sind zwei Photographien gezeigt, die bei dem Durchgang von Licht durch eine Flüssigkeit erhalten wurden (*Xylol*), in der drei Ultraschallwellen gleicher Periode erregt wurden. Die Beugungsflecke sind sehr gut sichtbar. Ein Vergleich mit der Abb. 75, dem sogenannten LAUEschen Beugungsbild, das beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch einen Quarzkristall erhalten wird, zeigt, daß die Beugung des Lichtes an einem künstlichen Kristallraumgitter (a von der Größenordnung 10^{-8} cm, d. h. von der Größenordnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen) vollkommen analoge Bilder gibt.

§ 34. Die experimentelle Durchführung der Röntgenstrahlenbeugung

In dem vorangegangenen Paragraphen betrachteten wir die Beugung d Röntgenstrahlen mit Hilfe der LAUEschen Methode. Die experimentelle Einric tung für die Beobachtung der Beugung nach dieser Methode ist sehr einfach. E schmales Bündel von Röntgenstrahlen, das von dem kreisförmigen Loch ein dicken Bleischirmes *B* (Abb. 74) ausgeblendet wird, dringt in den Kristall *K* ei Die hierbei entstehenden gebeugten Bündel werden in Gestalt von Flecken auf der senkrecht zu dem Strahlenbündel gestellten Photoplatte *P* festgestellt. Als Beispiel einer solchen nach dieser Methode erhaltenen Photographie ist in Abb. 75 das Beugungsbild an einem Quarzkristall dargestellt. Nach dem, was in dem vorigen Paragraphen über die Beugung nach der LAUEschen Methode gesagt wurde, muß eine Bremsstrahlung benutzt werden, da sie ein kontinuierliches Spektrum besitzt.

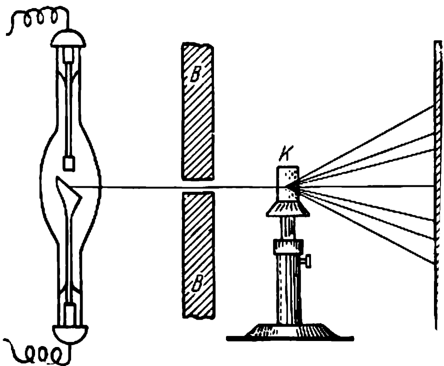
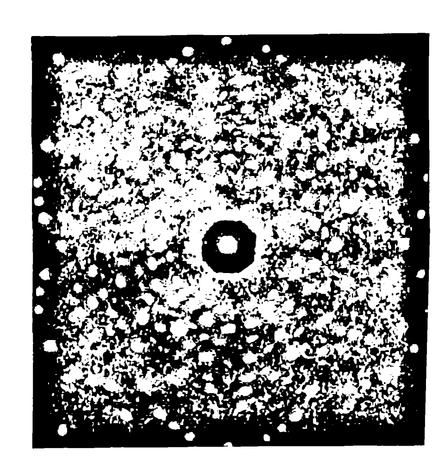


Abb. 74. Schema zur Beugung von Röntgenstrahle nach LAUE

W. H. BRAGG und W. L. BRAGG (Vater und Sohn) und unabhängig von ihnen auch der russische Kristallograph U. W. WULF schlugen eine andere Methode zur Beobachtung und Berechnung der Beugung von Röntgenstrahlen vor. Diese Methode besteht darin, daß jeder Fleck des LAUEschen Röntgenogramms als Ergebnis einer *Interferenz* der Röntgenstrahlen zu betrachten ist. Um sich dies klarzumachen, kehren wir zu dem einfachen Fall eines kubischen Raumgitters zurück, wie es in Abb. 66 gezeigt wurde.


Abb. 75. Beugung von Röntgenstrahlen im Quarzkristall

Stellen wir uns ein Koordinatensystem vor, dessen Achsen längs der Kubuskanten gerichtet sind. Dann wird die Verteilung der Atome in der xy-Ebene durch die Abb. 76 dargestellt. Eine beliebige, den Kristall senkrecht zur xy-Richtung schneidende Ebene hinterläßt in dieser Ebene eine Spur in Form einer Geraden (beispielsweise 1 oder 1′, 2 oder 2′). Wir können offensicht den ganzen Kristall in eine Reihe von Ebenen 1,1′, ... 2,2′, ... zerlegen, die par zu seinen natürlichen Grenzen liegen. Diese Flächen werden gleichmäßig dicht Atomen besetzt sein und in der gleichen Entfernung *d*, die gleich der Kante e kubischen Elementarzelle ist, voneinander verbleiben. Aus der Zeichnung ist je

auch erkenntlich, daß analoge Zerlegungen noch auf viele andere Arten verwirklicht werden können. So unterscheiden sich die Flächen 3,3′, . . . 4,4′, . . . von den Flächen 1,1′, . . . 2,2′, . . . nur durch die Dichte der Besetzung mit Atomen und durch die Entfernung zwischen den Flächen.

Abb. 76. Netzebene

Betrachten wir jetzt eines dieser Flächensysteme, zum Beispiel die den natürlichen Grenzen parallelen Flächen 1,1′, . . . oder 2,2′, . . ., auf die ein paralleles Bündel monochromatischer Strahlen mit der Wellenlänge λ fallen möge. Sehen wir die Atome als Zentren neuer, kohärenter Elementarwellen an, so erhalten wir für jede dieser Flächen eine Abbildung nullter Ordnung unter einem Winkel, der gleich dem Einfallswinkel ist. Hierbei wird die Reflexion an einer einzigen Fläche für beliebige Wellenlängen vollkommen gleich sein, da die Weglängen für alle Bündel unter sich gleich und der Gangunterschied immer gleich null sind. Wir müssen nun bedenken, daß die Reflexion nicht nur an einer Fläche, sondern an einem System gleich weit voneinander entfernter Flächen stattfindet. In diesem Falle wird das Bild durch die Interferenz kohärenter, von *verschiedenen* Flächen reflektierter Strahlen kompliziert und die Abbildung tatsächlich nicht mehr für eine beliebige Wellenlänge erhalten, sondern nur für einige genau bestimmte Wellenlängen. Tatsächlich haben die Strahlen 1 und 2 (Abb. 77), die von den Flächen I und II reflektiert werden, einen Gangunterschied von $2d \sin \vartheta$, wobei ϑ der Glanzwinkel, d. h. die Ergänzung des Einfallswinkels zu 90° ist. Deshalb wird eine Reflexion nur bei solchen Wellen stattfinden, für die dieser Gangunterschied gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge ist. Es muß also für die Interferenzreflexion der Röntgenstrahlen die Bedingung

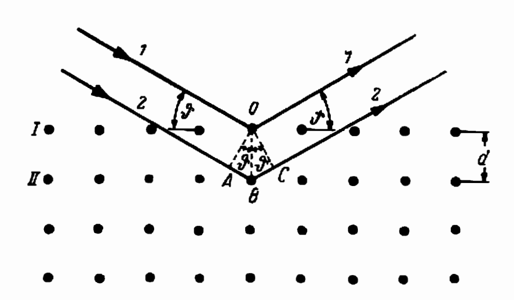


Abb. 77. Zur Ableitung der Gleichung von WULF-BRAGG

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (34,1)$$

erfüllt sein. Dies ist die *Formel von* WULF-BRAGG, die der gesamten Röntgenspektroskopie zugrunde liegt.

Tatsächlich findet die Reflexion an vielen Flächen statt; nicht zwei Bündel interferieren miteinander, sondern viele Bündel. Die Einwirkung dieser vielfachen Reflexionen verändert jedoch nicht die Bedingungen des Interferenzmaximums und zeigt sich ebenso wie in der Optik[1]) nur darin, daß an Stelle breiter Interferenzstreifen schmale Linien erhalten werden, und erweist sich somit als sehr günstig

[1]) Siehe die Theorie des Interferometers von FABRY und PÉROT oder der LUMMER-GEHRCKE-Platte im Buch: G. S. LANDSBERG, „Optik“ § 27.

für die Anwendung dieser Methode in der Röntgenspektroskopie. Die Bedingung (34,1) für die Reflexion bleibt ungeändert.

Wir betrachteten bis jetzt die Abbildung eines Systems von Flächen, die den natürlichen Kristallgrenzen parallel waren. Nichts hindert uns jedoch, mit denselben Ergebnissen auch die Abbildungen anderer Flächensysteme, in der Art etwa wie 3,3′, . . 4,4′, . ., zu betrachten. Es kann streng bewiesen werden[1]), daß jeder Fleck eines Laueschen Röntgenogramms als Resultat einer Interferenz eines bestimmten Systems von Netzebenen erscheint. Auf diese Weise ist die Methode von Wulf-Bragg der Laueschen Methode äquivalent.

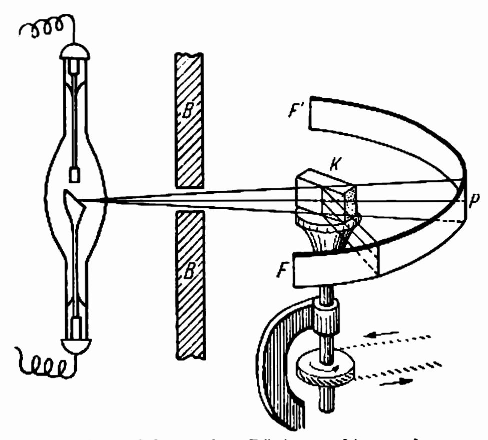


Abb. 78. Schema eines Röntgenspektrographen

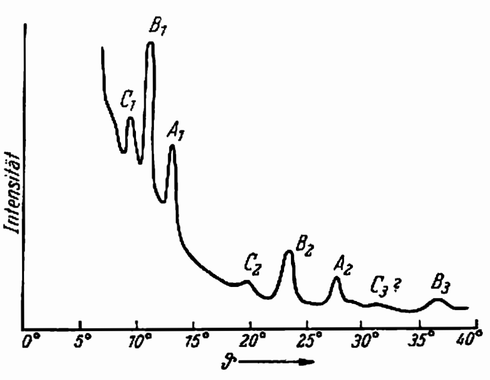


Abb. 79. Reflexionskurve von Röntgenstrahlen am NaCl-Kristall

In der Abb. 78 ist das einfache Schema eines Röntgenspektrographen dargestellt. Ein paralleles Bündel von Röntgenstrahlen fällt auf einen Kristall K, der auf einem drehbaren Tischchen befestigt ist; FPF' ist eine Photoschicht. An Stelle der Photoschicht wird manchmal auch eine Ionisationskammer benutzt, die gleichzeitig mit dem Kristall um den doppelten Winkel drehbar ist. Die Stärke des Ionisationsstromes, der dann in der Kammer unter der Wirkung der Röntgenstrahlen entsteht, ist ein Maß für die Intensität dieser Strahlen. Besitzt die Strahlung ein Linienspektrum und besteht sie aus einigen Wellenlängen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so wird jede Wellenlänge unter ihrem durch die Wulf-Bragg-Formel bestimmten Winkel ϑ reflektiert. Deshalb muß die Intensitätskurve der Röntgenstrahlen in Abhängigkeit von dem Drehwinkel des Kristalls eine Reihe von Maxima besitzen, die sich bei verschiedenen Ordnungen der Abbildung wiederholen müssen. In der Abb. 79 wird das Beispiel einer solchen Kurve gebracht, die bei der Reflexion der Strahlung einer Röntgenröhre mit Platin-Antikathode an einem NaCl-Kristall erhalten wurde. Die drei scharfen Maxima dieser Kurve A_1, B_1, C_1, die sich nacheinander in drei Ordnungen wiederholen, entsprechen den drei Spektrallinien des Platins K_α, K_β, K_γ. Daß die Intensität der Abbildung außerhalb der Linien nicht

[1]) Der Beweis wird in den Lehrbüchern über Röntgenstrukturanalyse exakt erbracht.

gleich null ist, sondern systematisch mit der Verringerung des Reflexionswinkels anwächst, hat folgenden einfachen Grund: Bei dem Bombardement der Platin-Antikathode mit Elektronen entsteht außer der charakteristischen Strahlung auch noch eine Bremsstrahlung, die ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Dadurch liegen die Spektrallinien des Platins auf einem kontinuierlichen Untergrund. Beispiele für Photographien von Röntgenspektren werden in den Abb. 85 und 86 gezeigt.

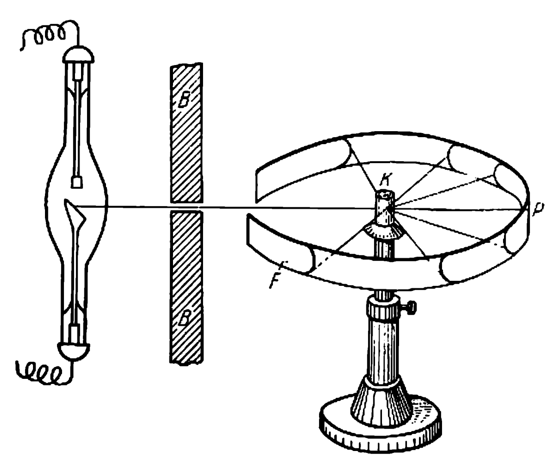


Abb. 80. Schema zur Beugung von Röntgenstrahlen

Außer den beiden betrachteten Untersuchungsmethoden der Röntgenstrahlenbeugung existiert noch eine dritte Methode, die Kristallpulvermethode, die sich eine weite Anwendung in der Analyse der Struktur fester Körper mit Hilfe der Röntgenstrahlen erworben hat. In dieser von Debye und Scherrer vorgeschlagenen Methode wird an Stelle der für die Anwendung der Laue- und der Wulf-Bragg-Methode notwendigen großen Kristalle ein sehr fein zerriebenes Kristallpulver benutzt, das zu einem zylindrischen Stäbchen (K in Abb. 80) gepreßt wird. Geht nun durch ein solches Stäbchen eine monochromatische Röntgenstrahlung hindurch, so werden infolge der völlig willkürlichen Orientierung der Mikrokristalle des Pulvers im Stäbchen stets solche Kristalle zu finden sein, die in bezug auf den Strahl gerade unter solchen Winkeln erscheinen, die der Wulf-Bragg-Bedingung für eine gegebene Wellenlänge genügen. Hierbei liegen die reflektierten Strahlen auf der Oberfläche eines Kegels mit dem Scheitelwinkel 2ϑ (Abb. 81). Wird das Stäbchen von der Photoschicht wie in der Abb. 80 umgeben, so werden diese Kegel auf der Photoschicht Spuren

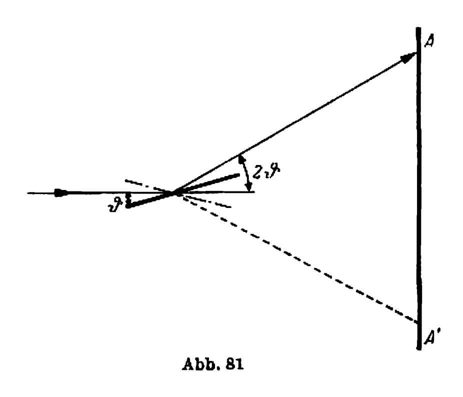
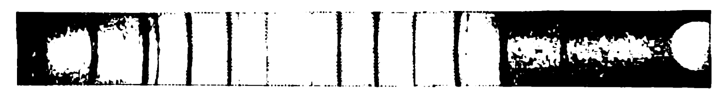


Abb. 81


Abb. 82. Beugung von Röntgenstrahlen in NaCl-Kristallpulver

in Form gekrümmter Linien hinterlassen, von denen eine jede einer bestimmten Wellenlänge und einer bestimmten Ordnung entspricht. Ein Beispiel einer solchen nach der Kristallpulvermethode erhaltenen Photographie ist in Abb. 82 gezeigt.

Der große Vorteil der Methode mit dem Kristallpulver besteht gerade darin, daß sie keine großen Kristalle tadelloser Qualität erfordert. Nur wenige Materialien kommen in der Natur in Form solcher Kristalle vor, und die Züchtung von Kristallen ist recht schwierig.

Übung. Die Reflexion erster Ordnung der Spektrallinie des Bleis mit der Wellenlänge 1,542 Å (K_α-Linie des Bleis) an den natürlichen Kristallflächen des Steinsalzes findet unter dem Neigungswinkel $15^0 50'$ statt. Es ist die Größe d für NaCl zu bestimmen.

§ 35. Bestimmung der Wellenlänge von Röntgenspektrallinien

Die Gleichung von Wulf-Bragg erlaubt die Bestimmung der Wellenlänge von Röntgenstrahlen in bezug auf den Reflexionswinkel ϑ, wenn die Entfernung zwischen benachbarten Netzebenen d im Kristall bekannt ist. Diese Größe d kann auf unabhängigem Wege auf folgende Weise errechnet werden. Wir mögen einen Kristall mit regelmäßigem System haben, dessen Elementarzellen die Gestalt eines Kubus aufweisen. Als Beispiel kann der Steinsalzkristall NaCl dienen. Ein Gramm-Molekül NaCl hat die Masse $M = 58{,}454$ g, in der eine Anzahl von Molekülen NaCl eingebaut ist, die gleich der Loschmidtschen Zahl N ist; aus diesem Grunde ist die Anzahl der Ionen Na^+ und Cl^- in ihr gleich $2N$.

Wir betrachten nun eine Elementarzelle des NaCl-Kristalles. Die Untersuchung der Struktur dieses Kristalles zeigte, daß sich in den Ecken dieser Würfel nicht die Moleküle NaCl, sondern die Ionen Na^+ und Cl^- befinden (Abb. 83). Daher werden in den 8 Ecken der kubischen Zelle 8 Ionen gelegen sein, weil aber nun eine jede der Ecken allgemein 8 benachbarten Zellen angehört (was in der Abb. 83 sehr gut für den Zentralpunkt 0 zu erkennen ist), so kommt auf jede Zelle nur ein einziges Ion. Ist die Kantenlänge der Zelle gleich d, so wird der Rauminhalt d^3 sein, und der gesamte Rauminhalt eines Gramm-Moleküls, das $2N$ Ionen enthält, wird $2Nd^3$ sein. Andererseits ist derselbe Rauminhalt gleich dem Verhältnis der Masse M zur Dichte ϱ, und wir erhalten $2Nd^3 = \frac{M}{\varrho}$ oder

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N\varrho}}. \qquad (35{,}1)$$

Abb. 83. Kristallgitter von NaCl

Aus dieser Formel folgt, daß die genaue Bestimmung von d und damit auch von λ im wesentlichen von der Genauigkeit des Wertes der Loschmidtschen Zahl abhängt. Diese Frage hat für die Atomphysik eine große Bedeutung, und wir werden zu ihr noch im § 39 zurückkommen. Jetzt bemerken wir nur, wenn wir für d_{NaCl} den Standardwert

$$d = 2{,}81400 \text{ Å}$$

nehmen, daß wir für die Wellenlänge der $K_{\alpha 1}$-Linie des Bleis

$$\lambda = (1{,}537302 \pm 0{,}000031) \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

erhalten. Die Genauigkeit ist hier so groß, daß sich 1 Å ($= 10^{-8}$ cm) als eine zu

große Einheit erweist, da die Anzahl der richtigen Dezimalen zu groß ist.[1]) Deshalb wird in der Spektroskopie der Röntgenstrahlen in der Mehrzahl der Fälle eine andere Einheit angewandt, die X-Einheit:

$$1\,\mathrm{X} = 10^{-3}\,\text{Å} = 10^{-11}\,\mathrm{cm}\,. \qquad (35{,}2)$$

In diesen Einheiten wird die oben beschriebene Wellenlänge durch die Zahl

$$\lambda = (1537{,}302 \pm 0{,}031)\,\mathrm{X}$$

ausgedrückt.

§ 36. Die Spektren der Röntgenstrahlen

In der Abb. 84 ist das Schema der Röntgenspektren der Elemente vom Sauerstoff bis Uran gegeben. Bereits ein flüchtiger Blick auf diese Darstellung enthüllt die bemerkenswerte Besonderheit der Röntgenspektren, ihre Einfachheit und Ein-

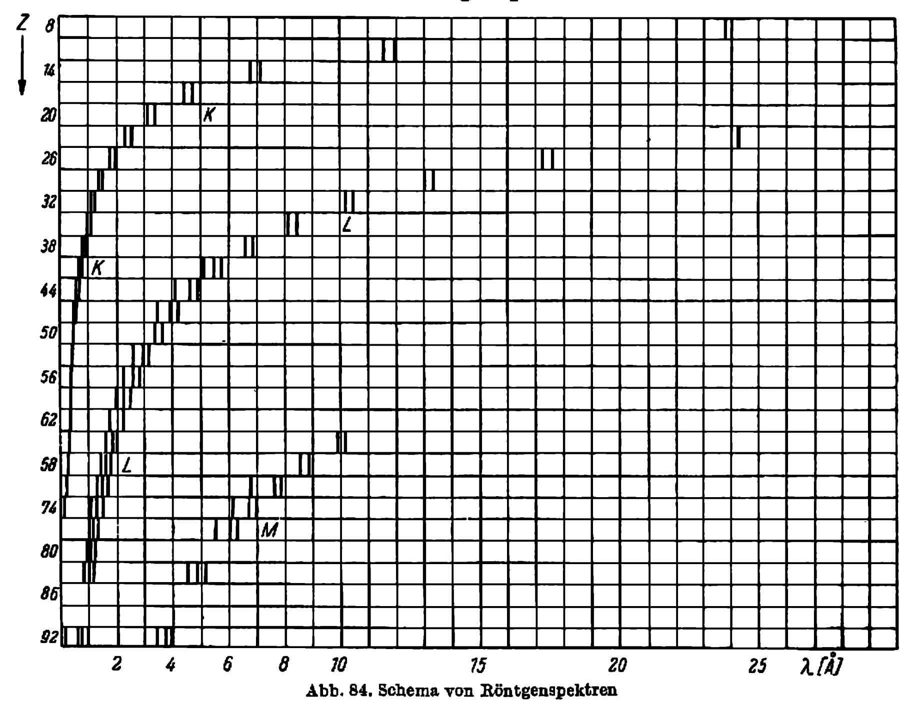


Abb. 84. Schema von Röntgenspektren

deutigkeit. Während die optischen Spektren nicht selten recht kompliziert sind und manchmal aus Hunderten, ja aus Tausenden von Linien bestehen (wie beispielsweise das Eisenspektrum), werden die Röntgenspektren nur durch eine

---

[1]) Es mußte daher bedacht werden, daß der neue Wert einige systematische Vernachlässigungen in sich schließt, die im § 38 besprochen werden. Hier ist die Wellenlänge der K_α-Linie des Kupfers bloß zur Charakterisierung der Anzahl der Zeichen gegeben, mit denen die Wellenlängen in der Röntgenstrahlenspektroskopie gekennzeichnet werden.

geringe Anzahl von Linien charakterisiert. Bei dem Übergang von Element zu Element ändern sich die optischen Spektren sehr weitgehend und lassen in ihrer Struktur eine Periodizität erkennen, die mit der Periodizität der übrigen Eigenschaften der Elemente parallel geht. Im Gegensatz hierzu sind die Röntgenspektren vollständig nach einem Typ gebaut; es zeigt sich keine Periodizität, und die einzige Änderung, die sich bei dem Übergang von den leichten Elementen zu den schweren beobachten läßt, liegt in der monotonen Verschiebung der Linien nach kurzen Wellen hin. Wie bereits auf Seite 91 gesagt wurde, erscheinen die Röntgenspektren als reine Atomeigenschaft und ändern sich in erster Näherung überhaupt nicht, wenn das Atom in irgendeine Verbindung eintritt.

Wie wir weiter sehen werden, ist dieser scharfe Unterschied im Charakter der optischen und der Röntgenspektren dadurch bedingt, daß diese jeweiligen Spektren in verschiedenen Teilen des Atoms entstehen: die optischen Spektren werden durch die Bewegungen der peripheren Elektronen bedingt, während die Röntgenstrahlen in den inneren Teilen des Atoms entstehen.

Die Abb. 84 zeigt auch, daß die Linien in den Röntgenspektren zu einigen Gruppen oder Serien zusammengefaßt werden. Aus historischen Gründen wird die kürzestwellige von ihnen die K-Serie genannt, die folgende nach langen Wellen hin ist die L-Serie, weiter kommen dann die nur bei den schweren Elementen zu beobachtenden Serien M und N. Es zeigt sich ferner, daß alle diese Serien in dem optischen Teil des Spektrums eine wirkliche Fortsetzung haben, jedoch werden die entsprechenden Linien nur bei sehr speziellen Bedingungen angeregt (Spektren hochionisierter Atome, siehe Band II, Abschnitt XVI).

Von allen Serien der Röntgenspektren hat die K-Serie die einfachste Struktur. Sie besteht aus drei Linien, die einfach K_α, K_β und K_γ genannt werden. Die K_α-Linie ist die längstwellige und im Zusammenhang hiermit auch die intensivste; sie erscheint als deutlich zerlegtes Dublett und besteht aus den beiden Komponenten α_1 und α_2. Die K_β-Linie folgt in bezug auf die Wellenlänge und Intensität; sie erscheint ebenfalls als ein Dublett, das sehr eng und nicht in allen Fällen zerlegt ist. Die K_γ-Linie ist die kürzestwellige.

Als typisches Beispiel einer K-Serie kann das Spektrum des Rhodiums dienen, das in der Abb. 63 dargestellt ist. Hier ist erkenntlich, daß die Serie aus den drei Linien K_α, K_β, K_γ besteht. Wie schon gesagt wurde, erscheint die K_α-Linie als ein Dublett und besteht aus zwei eng angeordneten und gesetzmäßig miteinander verbundenen Linien. Jedoch ist in der Abb. 63 diese „Feinstruktur" der Linien nicht sichtbar, weil das Auflösungsvermögen des Gerätes zu gering war. In der Abb. 85 sind einige Photographien von der K-Serie verschiedener Elemente wiedergegeben. In der Abb. 86 ist als Beispiel die Photographie der L-Serie des Wolframs angegeben. Es ist zu sehen, daß diese Serie eine bedeutend kompliziertere Struktur besitzt als die K-Serie, obwohl sie nur aus einer kleinen Anzahl von Linien besteht.

§ 37. Das Gesetz von MOSELEY

Bei der Untersuchung der Röntgenspektren der Elemente stellte MOSELEY im Jahre 1913/14 ein einfaches Gesetz auf, das die Frequenz der Spektrallinien mit der Ordnungszahl des emittierenden Elementes verbindet.

Diese Gesetzmäßigkeit fällt bei einfacher Betrachtung der Abb. 84 ins Auge. Hier sind die Spektren nach der Wellenlänge geordnet, die auf der horizon-

talen Achse aufgetragen ist, während auf der vertikalen Achse die Ordnungszahlen stehen. Da alle Spektren von demselben Typus sind, so kann die Verschiebung irgendeiner bestimmten Linie (beispielsweise einer Linie der K-Serie) bei Vergrößerung der Ordnungszahl verfolgt werden. Hierbei ist leicht zu sehen, daß die Kurve, die die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Ordnungszahl darstellt, die Gestalt einer Parabel hat. Eine noch einfachere Gesetzmäßigkeit wird erhalten, wenn an Stelle der Wellenlängen die Frequenz $\frac{c}{\lambda}$ oder einfach die reziproke Wellenlänge $\frac{1}{\lambda}$ betrachtet wird. Dann zeigt sich, daß die Quadratwurzel aus der reziproken Wellenlänge $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ mit der Ordnungszahl linear zusammenhängt. Eine besonders interessante und theoretisch wichtige Form nimmt diese Gesetzmäßigkeit dann an, wenn noch die in alle Spektralgesetze eingehende Universalkonstante, die sogenannte RYDBERG-Konstante $R = 109\,737{,}42\ \text{cm}^{-1}$, eingeführt wird. MOSELEY zeigte, daß beispielsweise für die K_α-Linie die Zahl $Q_{K\alpha}$, die in der Form

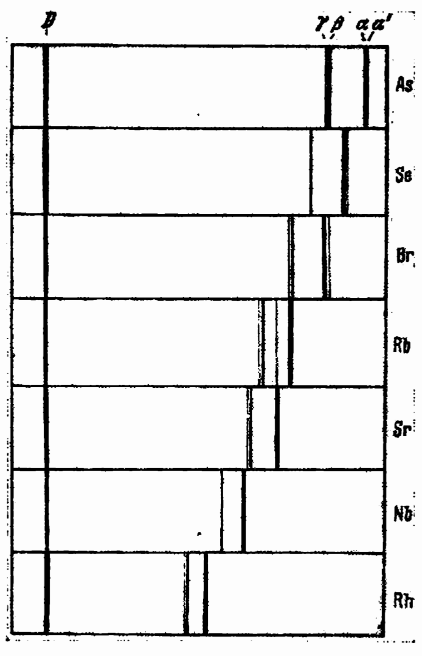


Abb. 85. Photographien von Spektren der K-Serie einiger Elemente

$$Q_{K_\alpha} = \sqrt{\frac{\tilde{\nu}_{K\alpha}}{\frac{3}{4}R}} \tag{37,1}$$

aufgebaut ist mit $\tilde{\nu}_{K\alpha} = \frac{1}{\lambda_{K\alpha}}$, um eine Einheit geringer als die Ordnungszahl ist:

$$Q_{K_\alpha} = Z - 1\,. \tag{37,2}$$

Tabelle VIII

Element	$\sqrt{\frac{\tilde{\nu}_{K\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	Z	Element	$\sqrt{\frac{\tilde{\nu}_{K\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	Z
Ca	19,00	20	Fe	24,99	26
Ti	20,99	22	Co	26,00	27
V	21,96	23	Ni	27,04	28
Cr	22,98	24	Cu	28,01	29
Mn	23,99	25	Zn	29,01	30

Dies ist aus der Tabelle VIII ersichtlich. Aus (37,1) und (37,2) erhalten wir

$$\sqrt{\frac{\tilde{\nu}_{K\alpha}}{\frac{3}{4}R}} = Z - 1\,,$$

was in die Form

$$\tilde{\nu}_{K\alpha} = R\,(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \tag{37,3}$$

umgeschrieben werden kann. Analoge Beziehungen treten bei den Linien der anderen Serien der Röntgenspektren auf. Zum Beispiel hat die Moseley-Beziehung für die L-Serie die Form

$$\tilde{\nu}_L = R\,(Z-\sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right), \tag{37,4}$$

worin σ eine konstante Zahl ist.

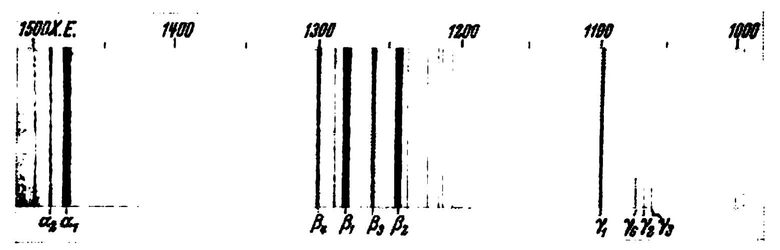


Abb. 86. Photographie des Spektrums der L-Serie von Wolfram

Die Formeln (37,3) und (37,4) zeigen schon durch ihre symmetrische Form, daß wir es mit einer wesentlichen Gesetzmäßigkeit prinzipiellen Charakters zu tun

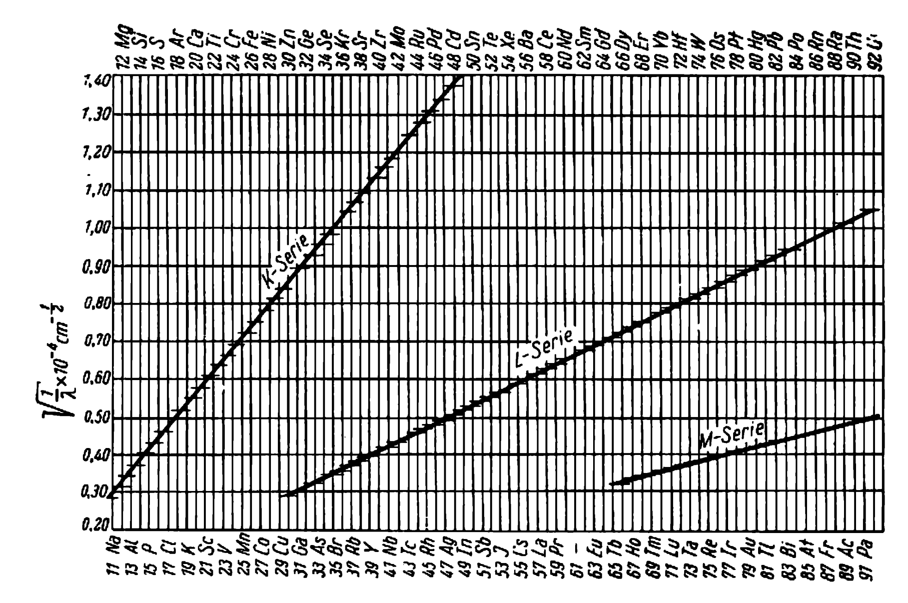


Abb. 87. Das MOSELEYsche Diagramm

haben. Später werden wir sehen, daß diese Formeln als Spezialfälle allgemeiner Formeln der Spektralserien erscheinen, die eine klare theoretische Deutung besitzen. Hier ist nur wichtig zu bemerken, daß das Gesetz von Moseley für alle Serien



Abb. 88. Gegenüberstellung der MOSELEY-Diagramme

des Röntgenspektrums eine lineare Verbindung zwischen der Quadratwurzel aus der reziproken Wellenlänge der Spektrallinien und der Ordnungszahl aufstellt (Abb. 87). Diese Beziehung gestattet, bei gemessener Wellenlänge genau die Ordnungszahl des gegebenen Elementes und folglich auch die Ladung seines Kernes festzustellen.

Die Bedeutung dieses Gesetzes kommt besonders klar zum Ausdruck, wenn wir im Auge behalten, daß die auf die Atomgewichte und die chemischen Eigenschaften der Elemente begründete Einordnung der Elemente in das periodische System keineswegs gleich in allen Fällen mit vollständiger Richtigkeit durchgeführt wurde. An verschiedenen Stellen der periodischen Tabelle waren leere Plätze, die nichtentdeckten Elementen entsprachen; desgleichen war das Gebiet von $Z = 58$ bis $Z = 71$ mit den Elementen der Seltenen Erden besetzt, deren chemische Eigenschaften sich so wenig unterscheiden und deren Atomgewichte derart ungenau waren, daß die Richtigkeit ihrer Einordnung große Zweifel erregte. Das Gesetz von MOSELEY beseitigte alle diese Schwierigkeiten. Es zeigte mit vollkommener Bestimmtheit, daß zwischen Wasserstoff und dem Uran 92 Arten von Atomen mit verschiedenen Ordnungszahlen existieren müssen, und gab genau die Zahl der noch nicht entdeckten Elemente an. Außerdem beseitigte er jeden Zweifel an der Richtigkeit der Elementenanordnung, die von MENDELEJEW entgegen der Reihenfolge der Werte ihrer Atomgewichte eingesetzt wurden (Co—Ni, Ar—K, Te—J und Th—Pa). Gleichzeitig zeigte dieses Gesetz, daß nicht das Atomgewicht, sondern die Ordnungszahl, die gleich der Kernladungszahl ist, die chemische Individualität des Atoms bestimmt. Dieser Schluß fand bei der Entdeckung der Isotope eine hervorragende Bestätigung.

Stellen wir zum Schluß fest, daß in diesem Gesetz sehr deutlich eine wesentliche, für die Röntgenstrahlen charakteristische Besonderheit ausgedrückt wird: Die Röntgenspektren ändern sich monoton mit der Änderung der Ordnungszahl Z. Diesem muß die Tatsache gegenübergestellt werden, daß sich viele Atomeigenschaften, wie beispielsweise die chemische Valenz, das spezifische Volumen und eine Reihe anderer Eigenschaften, periodisch mit der Vergrößerung von Z ändern (siehe § 13). Die Abb. 88, in welcher Geraden, die das Gesetz von MOSELEY ausdrücken, und die Kurve der Atomvolumina, die eine Reihe scharfer Maxima und Minima besitzt, dargestellt sind, bestätigt diese Besonderheit der Röntgenstrahlen besonders klar.

Die Erklärung für diesen Unterschied besteht darin, daß die Röntgenspektren in den inneren Teilen des Atoms entstehen und auf diese Weise zeigen, daß die inneren, dem Kern nahen Gebiete des Atoms bei den verschiedenen Atomen eine gleiche Struktur besitzen. Dagegen werden die äußeren, peripheren Teile des Atoms durch eine sich periodisch wiederholende Struktur charakterisiert.

§ 38. Die absolute Bestimmung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen

Der Brechungskoeffizient der Röntgenstrahlen unterscheidet sich sehr wenig von eins. Lange Zeit nahm man allerdings an, daß die Röntgenstrahlen im allgemeinen nicht gebrochen werden. Es wurden jedoch bei Röntgenstrahlen größerer Wellenlänge (2 bis 3 Å) Abweichungen von der WULF-BRAGG-Formel beobachtet, die als

Folge einer Brechung der Röntgenstrahlen am Kristall gedeutet wurden. Der Charakter dieser Abweichungen wies darauf hin, daß der Brechungskoeffizient μ der Röntgenstrahlen beim Übergang von Luft in den Kristall kleiner als eins ist. Hieraus folgt, daß die Röntgenstrahlen beim Übergang von Luft in einen festen Körper eine *Totalreflexion* erleiden können, die der gewöhnlich als innere Reflexion bezeichneten vollständig analog ist, die das Licht bei dem Übergang von Glas in Luft bei einem den kritischen Winkel übersteigenden Einfallswinkel erleidet. A. COMPTON zeigte im Jahre 1923, daß die Totalreflexion der Röntgenstrahlen bei dem Übergang von Luft in einen festen Körper tatsächlich zu beobachten ist, und fand nach der Bestimmung des kritischen Winkels den Brechungskoeffizienten. Für die Wellenlänge 1,279 Å ist im Falle von Kronglas mit der Dichte 2,52 gcm^{-3} der kritische Winkel gleich 11′, was einem Brechungskoeffizienten um $5 \cdot 10^{-6}$ geringer als 1 (d. h. $\mu = 0{,}999995$) entspricht.

Diese Entdeckung zeigt, daß Spektren von Röntgenstrahlen an einem gewöhnlichen Beugungsgitter erhalten werden können, wenn es als Reflexionsgitter unter Einfallswinkeln benutzt wird, die größer als der kritische sind, d. h. also bei sehr kleinen Neigungswinkeln. Da sich der maximale Winkel der Totalreflexion für verschiedene Wellenlängen und verschiedene Materialien in den Grenzen von 10′ bis 3° ändert, so müssen die Beugungsgitter, die im Falle der Röntgenstrahlen benutzt werden, grober als die Gitter sein, die gewöhnlich in der Optik angewandt werden. Dies mag auf den ersten Blick paradox erscheinen, jedoch muß bedacht werden, daß bei den kleinen Neigungswinkeln ϑ ein Gitter mit der Konstante d wie ein Gitter mit der Konstante $d \sin \vartheta$ bei normalem Strahleneinfall wirkt. Da der $\sin 10'$ gleich $3 \cdot 10^{-3}$ ist, wird die effektive Gitterkonstante auch eines groben Gitters bei solchen Neigungswinkeln so klein werden, daß die Möglichkeit einer Beobachtung der Röntgenstrahlbeugung gegeben ist. So wirkt unter solchem Winkel ein Gitter mit 50 Strichen pro mm ebenso wie ein Gitter mit 17000 Strichen pro mm, wobei zu bedenken ist, daß gute moderne Gitter 30000 Striche pro Zoll oder 1200 Striche pro mm haben!

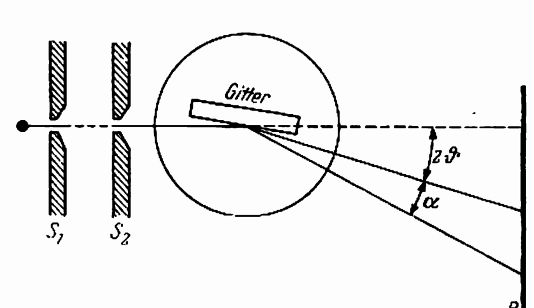


Abb. 89. Versuchsschema zur Erzeugung von Röntgenstrahlenspektren

In Abb. 89 wird das Versuchsschema für die Erzeugung von Beugungsspektren mit einem optischen Gitter gezeigt, und in der Fig. 90 werden die Photographien von Spektren der K-Serie von Kupfer (Wellenlängen 1,392 Å und 1,542 Å) und von Chrom (der Wellenlänge 2,084 Å und 2,291 Å) angeführt, die mit Gittern einer in der Unterschrift angegebenen Strichzahl erhalten wurden (die größte Strichzahl war 287 pro mm). Die Ziffern 1, 2, 3, . . . bezeichnen die Ordnung des Spektrums.

Zur Bestimmung der Wellenlänge aus diesen Spektren wird die Gleichung des Beugungsgitters bei schrägem Strahleneinfall

$$d(\sin i - \sin r) = n\lambda$$

benutzt, worin i der Einfallswinkel und r der Beugungswinkel ist. Ersetzen wir die Winkel i und r durch die Neigungswinkel ϑ und α, die in Abb. 89 angegeben

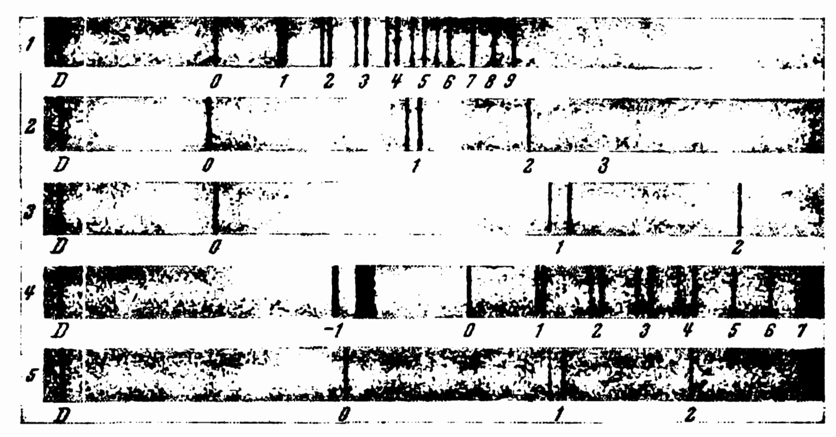


Abb. 90. Typische Röntgenspektren von Beugungsgittern (Vergrößerung zweifach); D = direkter Strahl, 0 = Nullte Ordnung (Strahlen vollständiger Reflexionen). Photographie 1 bis 4 = Röntgenspektren der K-Serie von Kupfer, die mit Hilfe von Gittern erreicht wurden, die 50, 287, 60, 143 Linien pro mm besaßen. Photographie 5 = K-Serie von Chrom; das Gitter hatte 387 Linien pro mm

sind, dann erhalten wir die Gleichung des Gitters in der Form, die praktisch in der Spektroskopie der Röntgenstrahlen benutzt wird:

$$d\,[\cos\vartheta - \cos(\vartheta + \alpha)] = n\lambda \qquad (38,1)$$

oder

$$2d \sin\frac{2\vartheta + \alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = n\lambda\,. \qquad (38,1')$$

Diese Gleichung ermöglicht die absolute Bestimmung der Wellenlänge von Röntgenstrahlen, d. h. eine Bestimmung, die unabhängig von der Kenntnis irgendeiner auf indirekte Weise erhaltenen Konstanten ist (§ 35). Tatsächlich kann die Konstante d des Beugungsgitters entweder unmittelbar mit einem Komparator gemessen werden oder in einer in der Optik üblichen Weise, beispielsweise auf dem Wege des Vergleiches des Gitters mit einem der spektroskopischen Standards, bestimmt werden; die Winkel ϑ und α können mit einem hohen Genauigkeitsgrad gemessen werden. Für die Bestimmung von d wird die grüne Linie im Spektrum des Kupferdampfes $\lambda = 5153{,}25$ Å benutzt. Die Genauigkeit absoluter Messungen der Wellenlänge der Röntgenstrahlen wurde mit 0,002 bis 0,004% geschätzt.

Zum Erstaunen der Forscher zeigte sich, daß für ein und dieselben Spektrallinien die Wellenlängen, die mit Hilfe von Kristallen gemessen wurden, sich von den absolut gemessenen Wellenlängen nach ein und derselben Seite um 0,15% unterscheiden, d. h. um einen Wert, der den Meßfehler um fast 100mal übersteigt.

Nach langen erfolglosen Versuchen, die Fehlerquellen in den Messungen der Wellenlängen mit der Kristallmethode zu suchen, kamen die Spektroskopiker zu dem Schluß, daß die Fehlerquelle nicht in den Messungen lag, sondern in dem zu jener Zeit angenommenen Wert der Loschmidtschen Zahl, deren Kenntnis

für die Berechnung der Kristallkonstanten d nach der Formel (35,1) notwendig ist. Es ist deshalb zweckmäßig, die Methoden der Bestimmung der Loschmidtschen Zahl zu betrachten, was in dem folgenden Paragraphen getan werden soll.

Übungen. 1. Es ist die Gleichung (38,1) abzuleiten.

2. Es ist zu zeigen, daß bei kleinen Winkeln ϑ und α die Gleichung (38,1) in die folgende

$$d\left(\vartheta\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right) = n\lambda$$

übergeht.

3. Ein sehr schmales Bündel monochromatischer Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 1{,}541$ Å fällt auf ein ebenes Beugungsgitter mit 200 Strichen pro mm. Es ist zu zeigen, daß der Winkel zwischen dem gebeugten Bündel erster Ordnung und dem Bündel nullter Ordnung gleich 13,5′ ist. (Bei der Ausrechnung ist die angenäherte Gleichung für das Gitter, die in der vorigen Übung abgeleitet wurde, zu benutzen.)

§ 39. Die Bestimmung der Loschmidtschen Zahl und der Elektronenladung

Eine Methode der direkten Bestimmung der Loschmidtschen Zahl N beruht auf dem Studium der Brownschen Bewegung. Hierbei handelt es sich gewöhnlich um die Verteilung von mikroskopischen Teilchen einer Emulsion in Abhängigkeit von der Schichthöhe, oder es wird das mittlere Quadrat der Verschiebung des Teilchens, welches die Brownsche Bewegung in der Flüssigkeit oder dem Gas hervorruft, gemessen. Solche Bestimmungen können auch mit Öltröpfchen im Millikanschen Kondensator durchgeführt werden. Jedoch ist die Genauigkeit dieser Bestimmungen nicht groß: der Wert N, der in den klassischen Arbeiten von Perrin ermittelt wurde, unterscheidet sich von dem modernen Standardwert um 25%. Bei weitem genauere Ergebnisse wurden bei der Untersuchung der Brownschen Rotationsbewegung erhalten. Wird ein sehr leichter Spiegel an einen dünnen Quarzfaden gehängt und auf einer genügend weit entfernten Skala ein von dem Spiegel reflektierter Lichtstrahl beobachtet (Abb. 91), so wird die Lichtmarke nicht auf einem Fleck verbleiben, sondern unregelmäßige Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen. Diese „Unbeständigkeit der Nulllage" des aufgehängten Systems ist das Ergebnis der Brownschen Rotationsbewegung unter der Wirkung von Stößen der Luftmoleküle. So konnte beispielsweise eine Verschiebung der Lichtmarke um einige Zentimeter mit einem Spiegel beobachtet werden, dessen Abmessungen $0{,}8 \times 1{,}6$ mm waren und der an einem Quarzfaden der Dicke einiger Hundertstel Mikron aufgehängt war; die Skala war von dem Spiegel 1,5 m entfernt.

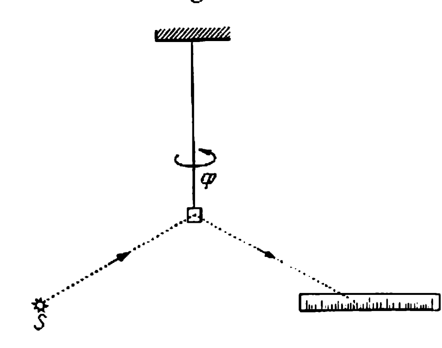


Abb. 91. Beobachtung der Nullverschiebung eines aufgehängten Spiegels

Nach einem der wichtigsten Theoreme der klassischen statistischen Mechanik, dem sogenannten Theorem der gleichmäßigen Verteilung der Energie auf die Freiheitsgrade (§ 80), ist die mittlere kinetische Energie, die auf einen Freiheitsgrad kommt, gleich $\frac{1}{2}kT$, worin k die BOLTZMANN-Konstante bedeutet, die gleich der universellen Gaskonstante R dividiert durch die LOSCHMIDTsche Zahl N ist:

$$k = \frac{R}{N}. \tag{39,1}$$

Hierbei ist es vollkommen gleichgültig, um welchen Freiheitsgrad es sich handelt. Für ein einatomiges Gasmolekül, das eine fortschreitende Bewegung ausführt, werden die Freiheitsgrade durch die kartesischen Koordinaten des Molekülschwerpunktes und bei einem System, das nur zu einer Drehbewegung um eine unbewegliche Achse befähigt ist, wird der einzige Freiheitsgrad durch den Drehwinkel φ charakterisiert. Im Wärmegleichgewicht bei der Temperatur T ist die mittlere Energie der Vorwärtsbewegung eines Luftmoleküls, die auf einen Freiheitsgrad entfällt, und ebenso die Energie der BROWNschen Drehschwingungen des Spiegels dieselbe und damit gleich $\frac{1}{2}kT$. Die kinetische Energie dieser Drehschwingungen ist gleich $\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$, worin J das Trägheitsmoment ist. Bei einer Drehung des Fadens um den Winkel φ entsteht eine potentielle Energie $\frac{1}{2}A\varphi^2$, wobei A die Elastizitätskonstante des Fadens ist. Für kleine Schwingungen ist die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen (§ 44), so daß

$$\frac{1}{2}J\overline{\dot{\varphi}^2} = \frac{1}{2}A\overline{\varphi^2}. \tag{39,2}$$

Nach dem Theorem der gleichmäßigen Verteilung der Energie ist

$$\frac{1}{2}A\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2}kT. \tag{39,3}$$

Auf diese Weise ist es möglich, bei Kenntnis der Elastizitätskonstanten A und des mittleren Wertes $\overline{\varphi^2}$ unmittelbar k zu finden, woraus nach (39,1) N auszurechnen ist.

Die Versuche mit der BROWNschen Drehbewegung zur genauen Bestimmung von N wurden mit der größten Sorgfalt von KAPPLER durchgeführt. Die Abweichungen des Spiegels wurden photographisch auf einer sich bewegenden Photoplatte registriert. Beispiele solcher registrierten Kurven, die unter verschiedenen Bedingungen erhalten wurden, sind in Abb. 92 wiedergegeben. Interessant ist die Feststellung, daß bei Atmosphärendruck (Kurve 92*a*) die Spiegelschwingungen vollständig unregelmäßig sind, aber mit einer Druckerniedrigung (Kurve 92*b* und 92*c*) die Schwingungen immer sinusförmiger werden mit einer Periode, die der Eigenschwingung eines Torsionspendels entspricht, als welches der Spiegel erscheint. Es ist nur wesentlich, daß in allen Fällen die mittlere Größe $\overline{\varphi^2}$ ein und dieselbe bleibt.

KAPPLER registrierte auf ähnliche Weise die Spiegelschwingungen während 101 Stunden bei einer Temperatur von 287° K und fand, daß $\overline{\varphi^2}$ unter diesen Bedingungen gleich $4{,}178 \cdot 10^{-3}\, r$ ist. Die Torsionskonstante des Fadens A wurde in einem besonderen Versuch mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}2\%$ bestimmt. Als Ergebnis wurde für N der Wert $N = 6{,}059 \cdot 10^{23}$ Moleküle pro Mol mit einer Genauigkeit erhalten, die auf $\pm 1\%$ geschätzt wurde.

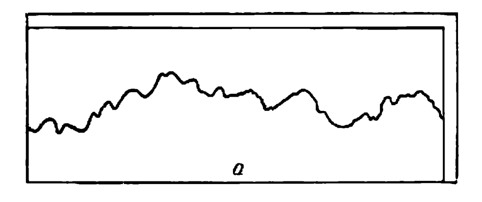
Diese Genauigkeit befriedigt jedoch nicht die hohen Anforderungen, die in neuerer Zeit an die Werte der grundlegenden Universalkonstanten gelegt werden. Ein genauerer Standardwert N findet sich auf indirektem Wege. Die Ladung eines Elektrons kann als Quotient der FARADAYschen Zahl F durch die LOSCHMIDTsche Zahl N ausgedrückt werden:

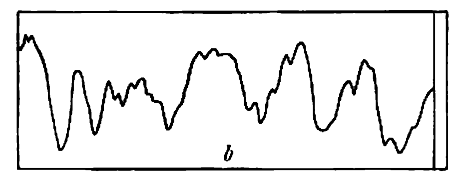
$$e = \frac{F}{N}.$$

Weil nun die Ladung e aus den MILLIKAN-Versuchen mit genügender Genauigkeit bekannt ist, so ergibt sich N bei gegebenem e und F:

$$N = \frac{F}{e}.$$

Auf diese Weise hängt die Genauigkeit der Bestimmung von N von der Genauigkeit ab, mit der die Elektronenladung bekannt ist. Die systematische Divergenz der Werte λ, die mit Hilfe des Beugungsgitters und mit Hilfe des Kristalles gefunden wurden, gaben zur Prüfung der Resultate MILLIKANs den Anstoß, da in der Formel (35,1), mit deren Hilfe die Kristallkonstante d auszurechnen ist, N eingeht. Wie schon in § 3 gesagt wurde, zeigte sich, daß die Resultate MILLIKANs durch den ungenügend genauen Wert für die Zähigkeit η der Luft, den er bei seinen Berechnungen benutzte, beeinträchtigt wurden.





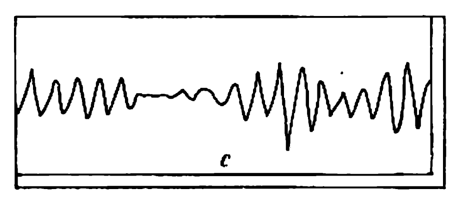


Abb. 92. BROWNsche Bewegungen eines aufgehängten Spiegels

Der einzige Ausweg aus diesen Schwierigkeiten bestand darin, die Kristallkonstante d experimentell aus dem absoluten Wert der Wellenlänge zu ermitteln, ähnlich wie man in der Optik die Stricheinteilung der Beugungsgitter bestimmt.

Ist die absolute Wellenlänge λ, die mit Hilfe eines Reflexionsgitters gefunden wurde, bekannt und ist ferner mit Hilfe eines Röntgenspektrographen der Winkel φ, unter dem eine Reflexion dieser Wellenlänge erster Ordnung erfolgt, bestimmt, so kann nach der WULF-BRAGG-Formel

$$\lambda = 2d \sin\varphi$$

die Kristallkonstante d bestimmt werden. Eine ähnliche Bestimmung der Gitterkonstante des Calcits ($CaCO_3$), das gewöhnlich in der Röntgenspektroskopie verwendet wird, gab nach Einführung der notwendigen Korrekturen die Größe d für 18° C zu:

$$d = 3{,}03560 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Ist nun diese Größe bekannt, dann kann die LOSCHMIDTsche Zahl auf folgende Weise gefunden werden: aus der Formel (35,1) folgt, daß für einen Kristall des regulären Systems (NaCl)

$$N = \frac{M}{2d^3\varrho} \qquad (39{,}4)$$

ist. Für Calcit, bei dem die Elementarzellen nicht als Würfel, sondern als Rhomboeder erscheinen, muß die Formel (39,4) etwas umgeändert werden. Ist der stumpfe Winkel zwischen den Rhomboederkanten $\beta \approx 101^{\circ} 54'$, so wird der Rauminhalt einer Elementarzelle $d^3 \cdot \Phi(\beta)$ sein, wobei

$$\Phi(\beta) = \frac{(1 + \cos\beta)^2}{\sin\beta\,(1 + 2\cos\beta)}$$

ist und die Formel (39,4) die Form

$$N = \frac{M}{2d^3\,\Phi(\beta)\,\varrho} \tag{39,5}$$

annimmt.

Setzen wir die genauen Werte für alle Größen ein: $M = 100{,}090\ \mathrm{g \cdot Mol^{-1}}$ (nach der chemischen Skala); $d_{18^{\circ}} = 3{,}0356 \cdot 10^{-8}$ cm; $\varrho_{20^{\circ}} = 2{,}71025\ \mathrm{gcm^{-3}}$ und $\Phi(\beta) = 1{,}00595$, so erhalten wir

$$N = (6{,}0228 \pm 0{,}0011) \cdot 10^{23}\ \text{Moleküle pro Mol}. \tag{39,6}$$

Diese Größe ist wesentlich von dem früher angenommenen Standardwert $(6{,}06 \cdot 10^{23})$ verschieden.

Kennen wir die Loschmidtsche Zahl, dann können wir auch die Ladung des Elektrons nach der Formel $e = \frac{F}{N}$ berechnen. Die Faradaysche Zahl, d. h. die Elektrizitätsmenge, die bei der Elektrolyse von einem Grammäquivalent beliebiger Ionen übertragen wird, ist nach den genauesten Bestimmungen gleich

$$F = (2{,}89247 \pm 0{,}00030) \cdot 10^{14}\ \text{CGSE} \cdot \text{g-Äquivalent}^{-1}$$

(chemische Skala).

Vergleichen wir diese Zahl mit dem Wert N (39,6), dann erhalten wir einen genauen Wert für die Elektronenladung

$$e = (4{,}8025 \pm 0{,}0010) \cdot 10^{-10}\ \text{CGSE}.$$

Wir vermerken noch, daß beide Konstanten N und e um 1,000272mal größer erhalten werden, wenn der Berechnung des Molekulargewichtes nicht die chemische, sondern die physikalische Skala ($O^{16} = 16$) zugrunde gelegt wird.

§ 40. Die spezifische Ladung des Elektrons

Die Untersuchung der Röntgenspektren eröffnet auch eine neue Möglichkeit zur genauen Bestimmung der spezifischen Ladung eines Elektrons e/m. Die Elektronentheorie der Dispersion führt zu dem folgenden Ausdruck für den Brechungskoeffizienten im Falle schwach gebundener Elektronen und genügend harter Röntgenstrahlen:

$$\mu = 1 - \frac{ne^2}{2\pi m\nu^2}, \tag{40,1}$$

worin n die Anzahl der Elektronen in 1 cm³ und ν die Frequenz der Röntgenstrahlen sind. Die Anzahl der Elektronen kann auf die folgende Weise ausgedrückt werden: die Zahl der Elektronen in einem Mol des Materials mit der Ordnungszahl Z ist gleich NZ und in 1 cm³

$$n = \frac{NZ}{M}\varrho, \tag{40,2}$$

wobei M das Atomgewicht ist. Wird e in elektrostatischen und F in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt, dann ist $Ne = Fc$. Ersetzen wir ν durch $\frac{c}{\lambda}$, dann erhalten wir aus (40,1) und (40,2)

$$\mu = 1 - \frac{FZ\varrho\lambda^2}{2\pi M} \cdot \frac{e}{mc},$$

woraus

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi M}{FZ\varrho} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \text{ CGSM} \cdot \text{g}^{-1} \tag{40,3}$$

folgt, wenn $\delta = 1 - \mu$ ist. Hieraus folgt nun, daß es für die Bestimmung von e/m (d. h. der spezifischen Ladung in elektromagnetischen Einheiten) genügt, δ und die absolute Wellenlänge der Röntgenstrahlen genau zu bestimmen. Zu diesem Zweck wurde ein Röntgenspektrum mit Hilfe eines Prismas, als das ein großer Diamant im Gewicht von 13 Karat diente, aufgenommen. In der Abb. 93 ist das Spektrum der Strahlung der K-Serie von Kupfer angegeben, das mit einem solchen Prisma erzeugt wurde. Die Bestimmung der Wellenlängen nach diesem Spektrum ergab Resultate, die gut mit den aus Messungen mit dem Beugungsgitter gefundenen Ergebnissen übereinstimmen.



Abb. 93. Prismenspektrum der K-Serie von Kupfer

Bardon bestimmte außerdem die Dichte des Diamanten, wobei sich als genauester Wert $\varrho = (3{,}5154 \pm 0{,}0001)\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ergab, und fand bei Benutzung der Formel (40,3) für e/m

$$\frac{e}{mc} = (1{,}7601 \pm 0{,}0003) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Diese Zahl liegt nahe dem aus direkten Messungen erhaltenen Wert.

V. DER BAU DES ATOMS UND DIE KLASSISCHE PHYSIK

A. DIE KLASSISCHE MECHANIK UND DER BAU DES ATOMS

§ 41. Das Atommodell

In dem vorigen Abschnitt erbrachten wir den Beweis dafür, daß sich das Atom als zusammengesetztes, aus positiver Elektrizität und Z Elektronen bestehendes System darstellt. In den ersten Entwicklungsstadien der Theorie des Atombaus stellte man sich das ganze System statisch vor. Um die Elektronen als Teilchen betrachten zu können, mußte angenommen werden, daß die positive Elektrizität kontinuierlich innerhalb des Volumens einer Kugel des Halbmessers in der Größenordnung des Atomradius, d. h. 10^{-8} cm, verteilt ist und die Elektronen in dieser „Wolke" positiver Elektrizität schwimmen. Die Ausstrahlung von Licht durch das Atom wurde als Ergebnis kleiner Schwingungen der Elektronen um ihre Gleichgewichtslage betrachtet (Modell von J. J. THOMSON). Die Versuche mit der Streuung der α-Teilchen, für deren Erklärung die Einführung der Hypothese von der Existenz eines sehr kleinen positiven Kernes (der Größenordnung 10^{-12} — 10^{-13} cm) erforderlich war, in welchem fast die gesamte Atommasse konzentriert sein muß, zwangen die Forscher, vollständig von dem statischen Modell abzugehen. Sie gingen zu einem planetarischen System über und betrachteten die Elektronen als Teilchen, die sich auf bestimmten Bahnen um den Kern bewegen.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Formelapparat beschäftigen, den die klassische Physik, und hier besonders die klassische Mechanik und Elektrodynamik, für die theoretische Untersuchung des Atombaues gibt, und werden ferner die grundlegenden Schlüsse betrachten, zu denen sie führt. Anstatt die Atomsysteme in ihrer Kompliziertheit zu betrachten, werden wir die einfachsten mechanischen Modelle benutzen. Als Muster eines Systems, das Schwingungen ausführt, wird uns ein Teilchen dienen, das auf einer Geraden schwingt, d. h. ein linearer Oszillator; als Muster eines Systems, in dem eine Drehung um ein unbewegliches Zentrum stattfindet, wird uns ein Elektron dienen, das um den positiven Kern rotiert.

§ 42. Das Gesetz der Energieerhaltung in der Mechanik

Der klassischen Mechanik liegen die NEWTONschen „Axiome oder Gesetze der Bewegung" zugrunde. Die mathematische Formulierung in Gestalt der Bewegungsgleichungen folgt bekanntlich aus dem zweiten Gesetz, gemäß dem die Ableitung des Impulses nach der Zeit gleich der wirkenden Kraft ist. Für ein Teilchen gibt

dieses Gesetz die drei Differentialgleichungen

$$\frac{dp_x}{dt} = X, \quad \frac{dp_y}{dt} = Y, \quad \frac{dp_z}{dt} = Z, \tag{42,1}$$

in denen X, Y und Z die Projektionen der Kraft auf die Koordinatenachsen sind.

Diese drei skalaren Gleichungen können durch eine Vektorgleichung

$$\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{F} \tag{42,2}$$

ersetzt werden, worin die zeitliche Ableitung durch einen Punkt bezeichnet wird.

Die in der Form (42,2) mit der Ableitung des *Impulses* auf der linken Seite geschriebene Bewegungsgleichung ist sowohl für den Fall kleiner Geschwindigkeiten (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) als auch für große $\left(\frac{v}{c} \approx 1\right)$ brauchbar. Aber nur in dem Fall $\frac{v}{c} \ll 1$ kann die Masse als unabhängig von der Geschwindigkeit angenommen werden, und die Ableitung $\dot{\mathfrak{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v})$ ist in diesem Falle einfach gleich $m\dot{\mathfrak{v}}$ oder $m\ddot{\mathfrak{r}}$, wobei $\mathfrak{r}$ der die Lage des Teilchens bestimmende Radiusvektor ist. In diesem Falle kleiner Geschwindigkeiten können die drei skalaren Gleichungen (42,1) in der gewöhnlichen Form

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \tag{42,1'}$$

und die Vektorgleichung (42,2) in der Form

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F} \tag{42,2'}$$

geschrieben werden.

Multiplizieren wir die Gleichung (42,2') skalar mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{r}}$:

$$m\ddot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}}, \tag{42,3}$$

dann kann die linke Seite dieser erhaltenen Gleichung umgeformt werden in

$$m\ddot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathfrak{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Die Größe

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2 = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{42,4}$$

wird die *kinetische Energie* genannt. Auf der linken Seite von (42,3) haben wir die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie

$$m\ddot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}} = \frac{dT}{dt}. \tag{42,5}$$

Aus (42,3) und (42,5) erhalten wir

$$dT = \mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}}\,dt = \mathfrak{F}\,d\mathfrak{r}. \tag{42,6}$$

Da nun aber $\mathfrak{F}d\mathfrak{r}$ die Arbeit längs der differentiellen Verschiebung $d\mathfrak{r}$ ist, ist die Arbeit der Kraft gleich der Änderung der kinetischen Energie.

In vielen Fällen können die Komponenten der Kraft durch die mit dem Minuszeichen versehenen partiellen Ableitungen einer Funktion U nach den Koordinaten ausgedrückt werden:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{42,7}$$

oder in vektorieller Form

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} U. \tag{42,7'}$$

Dann ergibt sich

$$\mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right). \tag{42,8}$$

Ist U eine Funktion nur der Koordinaten allein, dann haben wir auf der rechten Seite von (42,8) das vollständige Differential

$$\mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}} = -\frac{dU}{dt}. \tag{42,9}$$

Die Arbeit wird der Kraft längs der Verschiebung $d\mathfrak{r}$ gleich

$$\mathfrak{F}\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}}\,dt = -\frac{dU}{dt}\,dt = -dU$$

und die Arbeit der Kraft längs des endlichen Weges vom Punkt A bis zum Punkt B gleich

$$\int_A^B \mathfrak{F}\,d\mathfrak{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B.$$

Ist U außerdem eine eindeutige Funktion, so wird die Arbeit der Kraft nicht vom Wege abhängen, sondern nur von der Differenz der Werte U in den Anfangs- und Endpunkten des Weges. Eine solche Funktion U, wie sie durch die Gleichung (42,7) ausgedrückt ist, wird allgemein als *Potentialfunktion* bezeichnet. Hängt sie nicht explizit von der Zeit ab, sondern erscheint als eindeutige Funktion der Koordinaten[1]), dann wird sie als potentielle Energie bezeichnet.

Aus (42,3), (42,5) und (42,9) folgt dann

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0, \tag{42,10}$$

woraus weiter

$$T + U = \text{const} \equiv E \tag{42,11}$$

folgt. Dies ist der Energiesatz der Mechanik: die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie ist eine konstante Größe. Ein Feld solcher Kräfte, die ein Potential U besitzen, das nicht explizit von der Zeit abhängt, heißt ein **konservatives Feld**.

Es können jedoch Fälle vorkommen, bei denen eine Funktion U mit der Eigenschaft (42,7) existiert, die aber von der Zeit abhängt. Betrachten wir beispielsweise die Bewegung eines geladenen Teilchens im Innern eines Kondensators, an dessen Platten die Potentialdifferenz V liegt. Diese Differenz ändert sich periodisch mit der Zeit, zum Beispiel nach dem Kosinusgesetz

$$V = V_0 \cos \omega t.$$

Das Produkt aus Ladung e und Spannung V

$$U = eV = eV_0 \cos \omega t$$

ergibt, daß die auf das Teilchen von seiten des Feldes in jedem Augenblick wirkende Kraft der Gradient von U ist:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} U,$$

---

[1]) Ein Beispiel eines mehrdeutigen Potentials wird im Buch von T. Levi-Civita und U. Amaldi, „Kurs der theoretischen Mechanik", Band I, geboten.

aber die Funktion U und zusammen mit ihr auch die Kraft $\mathfrak{F}$ hängen explizit von der Zeit ab. Die Summe $T + U$ hat in diesem Falle keinen konstanten Wert. Es ist

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Folglich gibt dann (42,8)

$$\mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}} = -\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

und an Stelle von (42,10) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Dies zeigt, daß das System nicht abgeschlossen ist, sondern nur ein Teil eines größeren Systems darstellt, für das in der Gesamtheit das Gesetz von der Erhaltung der Energie natürlich gilt.

Es gibt auch Fälle, bei denen die Kräfte von der Geschwindigkeit abhängen. Als Beispiel kann der Widerstand dienen, den bewegte Körper in einem Medium erleiden: speziell der Luftwiderstand, $F = 6\,\pi\eta a v$, den wir bei der Betrachtung des Falles von Öltröpfchen im § 2 antrafen. Bezeichnen wir den zu v gehörenden Koeffizienten mit k und beachten, daß die Widerstandskraft R stets der Geschwindigkeit entgegengerichtet ist, dann können wir allgemein schreiben

$$R = -kv.$$

Die Gleichung für die Bewegung eines Teilchens unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ in einem Medium mit dem Widerstand $\mathfrak{R}$ wird

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{R}$$

sein. Multiplizieren wir beide Seiten mit $\dot{\mathfrak{r}} \equiv \mathfrak{v}$, dann erhalten wir

$$m\ddot{\mathfrak{r}}\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F}\dot{\mathfrak{r}} + \mathfrak{R}\dot{\mathfrak{r}}.$$

Auf Grund der Formeln (42,1) und (42,2) unter Beachtung der Beziehung $\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{r}} = -kv^2$ erhalten wir $\frac{d}{dt}(T + U) = -kv^2$.

Wir sehen hier, daß wie in dem vorigen Falle die Summe $T + U$ nicht konstant bleibt. Da v^2 immer > 0 ist, so ist $-kv^2 < 0$, und $T + U$ nimmt mit der Zeit ab: die Reibungskraft ist nicht konservativ.

Als Spezialfall hierfür erscheint die Kraft, die von einem Magnetfeld auf ein bewegtes geladenes Teilchen ausgeübt wird. Diese Kraft wird durch das Vektorprodukt

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

ausgedrückt; sie steht zur Geschwindigkeit *senkrecht und leistet deshalb keinerlei Arbeit.*

Zum Schluß wollen wir daran erinnern, daß das Potential durch seine Ableitung bestimmt wird [Formel (42,7)] und deshalb nur die Potentialdifferenz eine definierte Größe hat. Der absolute Wert des Potentials schließt irgendeine beliebige Konstante ein, so daß das Nullpotential ganz willkürlich ausgewählt werden kann.

§ 43. Potentialkurven

Das Gesetz von der Erhaltung der Energie gibt eine Beziehung zwischen den ersten Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit an, die wir bei der Lösung mechanischer Aufgaben benutzen. Besonders passend ist sie im Falle einer eindimensionalen Bewegung eines Teilchens, wo diese eine Beziehung bereits hinreichend ist.

Nehmen wir an, ein Teilchen bewege sich auf einer Geraden; haben wir die x-Achse als die Gerade gewählt, dann wird die potentielle Energie eine Funktion nur einer Koordinate sein $U = U(x)$. Das Gesetz der Energieerhaltung gibt dann

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = E,$$

woraus

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} + t_0 \tag{43,1}$$

folgt, wobei t_0 die Integrationskonstante ist.

Kennen wir den Ausdruck für die potentielle Energie, dann können wir mit Hilfe der Formel (43,1) das Bewegungsgesetz finden. Nehmen wir beispielsweise an, daß $U = \frac{1}{2} kx^2$, worin k irgendeine positive Konstante ist. Dann ergibt die Formel (43,1)

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} kx^2\right)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}. \tag{43,1'}$$

Die positive Zahl $\frac{2E}{k}$ können wir mit a^2 bezeichnen, wobei a die Dimension einer Länge besitzt, und erhalten dann

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{x}{a},$$

woraus sich

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \sqrt{\frac{k}{m}}\, t_0\right)$$

oder, wenn $\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_0$ mit δ bezeichnet wird,

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \delta\right)$$

ergibt.

Für $U = \frac{kx^2}{2}$ stellt also die Bewegung eine harmonische Schwingung dar.

Die Kenntnis der potentiellen Energie erlaubt bei der eindimensionalen Bewegung den qualitativen Charakter dieser Bewegung festzustellen, ohne analytische Mittel zu benutzen. Für diesen Zweck genügt es, die Kurve zu konstruieren, welche die potentielle Energie in ihrer Abhängigkeit von der Koordinate darstellt. Solche Kurven werden kurz Potentialkurven genannt.

Beispielsweise habe die Potentialkurve die in der Abb. 94 dargestellte Form. Dann können wir einige wichtige Besonderheiten der Bewegung feststellen, ohne das auf der rechten Seite von (43,1) stehende Integral auszurechnen und auch ohne Kenntnis des genauen analytischen Ausdruckes der potentiellen Energie. Nehmen wir irgendeinen Wert E_1 der Gesamtenergie an und ziehen in der Zeichnung eine Gerade, die parallel zur Abszisse in der Entfernung E_1 von ihr liegt. Diese Gerade schneidet die Potentialkurve in den Punkten B, C, D mit den zugehörigen Abszissen x_1, x_2, x_3. Vom Standpunkt der klassischen Mechanik hat die Formel (43,1) nur dann einen physikalischen Sinn, wenn die Wurzel $\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$ reell, d. h. wenn $E \geqq U$ ist. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, daß dies

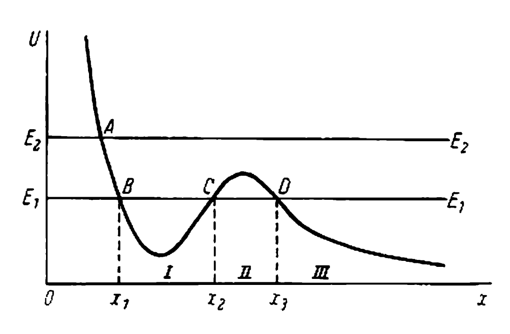


Abb. 94. Beispiel einer Potentialkurve

dann verwirklicht ist, wenn $x_1 \leqq x \leqq x_2$ (I)

oder

$$x \geqq x_3 . \qquad \text{(II)}$$

Befindet sich das Teilchen in dem Gebiet I, dann wird es sich so bewegen, daß es nicht über die Grenzen dieses Gebietes hinaustritt. Tatsächlich kann seine Abszisse nicht kleiner als x_1 und nicht größer als x_2 werden, da in diesem Falle seine potentielle Energie größer als die Gesamtenergie und die Geschwindigkeit $\dot{x}$ imaginär wäre. Daraus folgt, daß die Bewegung des Teilchens in dem Gebiet I eine Schwingung ist. Die Grenzlagen werden bei $x = x_1$ und $x = x_2$ erreicht, wo U gleich E wird. Die Periode einer Schwingung ist gleich

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} .$$

In das Gebiet II kann das Teilchen nicht eindringen. Besitzt es die Energie E_1 und befindet es sich im Punkte $x = x_3$, dann kann seine Abszisse bis ins Unendliche wachsen, da die potentielle Energie bei allen Werten $x \geqq x_3$ kleiner als die Gesamtenergie ist.

Das Teilchen möge nun einen Energievorrat $E_2 > E_1$ besitzen. Verfolgen wir auf der Zeichnung die Gerade im Abstand E_2. Wir sehen, daß sich das Teilchen rechts von A bis ins Unendliche bewegen kann, weil die Gesamtenergie überall größer als die potentielle Energie ist. Links von A wird eine Bewegung durch einen unüberwindlichen Anstieg gehindert (Gebiet $E < U$).

Mit Hilfe der Potentialkurve kann der qualitative Charakter der Bewegung festgestellt werden, wenn die folgende anschauliche Illustration benutzt wird. Stellen wir uns einen ideal ebenen Weg vor, der so beschaffen ist, daß sein Profil jedesmal mit der Potentialkurve zusammenfällt. Bei der Kurve in Abb. 94 wird es ein Abstieg sein, der in einem kleinen Abschnitt unterbrochen wird und sich dahinter wieder unverändert fortsetzt. Legen wir auf diesen Weg in der Höhe E

eine schwere Kugel und überlassen sie sich selbst. Die Kugel wird sich nach unten bewegen, ihre Bewegung wird fast genau die Bewegung des uns interessierenden Teilchens darstellen. Ist sie auf die Höhe E_1 gehoben worden, dann wird sie nach hinten oder nach vorn in die Vertiefung *I* rollen, wird aber nicht durch den Hügel *II* „dringen" können; ist sie jedoch bis auf das Niveau E_2 gehoben worden, so wird sie frei über den Hügel *II* hinwegrollen können und ins Unendliche fortlaufen.

Der Grund, der uns die Benutzung einer solchen Illustration erlaubt, liegt darin, daß die potentielle Energie einer schweren Kugel ihrer Höhe proportional ist. Eine geringe Ungenauigkeit wird dadurch bedingt, daß ein Teil der Energie der Kugel für ihre Drehung aufgewandt werden muß.

§ 44. Der lineare harmonische Oszillator

Ein Teilchen mit der Masse m möge sich auf einer Geraden unter der Wirkung einer Kraft bewegen, die der Abweichung des Teilchens aus der Gleichgewichtslage proportional und immer zur Gleichgewichtslage hin gerichtet sei. Ein solches Schwingungssystem wird ein linearer harmonischer Oszillator genannt. Als Beispiel kann eine schwere Kugel dienen, die an einer elastischen Feder (Abb. 95) aufgehängt ist. Ein Elektron, das unter der Wirkung eines elektrischen Feldes Schwingungen ausführt, erscheint dann als ein solcher linearer harmonischer Oszillator, wenn die auf das Elektron vom Feld wirkende Kraft in erster Näherung ihrer Entfernung von der Gleichgewichtslage proportional und zu dieser hin gerichtet ist. In Analogie zur elastischen Kraft werden alle Kräfte, die diese obengenannte Forderung erfüllen, quasielastische Kräfte genannt.

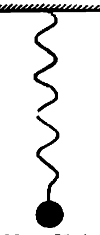


Abb. 95. Modell eines linearen Oszillators

Da die Bewegung eines linearen Oszillators auf einer Geraden stattfindet, können wir diese Gerade mit einer Koordinatenachse verbinden. Dies möge die x-Achse sein, und der Koordinatenanfang soll mit der Gleichgewichtslage des Teilchens übereinstimmen (Abb. 96). Die Bewegungsgleichung wird in diesem Falle

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{44,1}$$

worin k ein konstanter Proportionalitätsfaktor und zahlenmäßig gleich der bei der Auslenkung $x = 1$ entstehenden Kraft ist. Er wird die „Konstante der quasielastischen Kraft" genannt.[1]) Formen wir die Gleichung (44,1) folgendermaßen um:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{44,2}$$

oder mit

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \tag{44,3}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{44,4}$$

Als Partiallösungen der Gleichung (44,4) dienen

$$x_1 = \cos\omega t, \quad x_2 = \sin\omega t, \tag{44,5}$$

Abb. 96

wovon wir uns durch Einsetzen dieser Werte in (44,4) überzeugen können.

Bekanntlich wird bei linearen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung durch die lineare Kombination der Partiallösungen (44,5) gebildet:

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t, \tag{44,6}$$

[1]) Anm. d. Redaktion: Die Bezeichnung Richt- oder Direktionsgröße ist vorzuziehen, da diese Konstante dimensionsmäßig keine Kraft darstellt.

mit den beiden Konstanten c_1 und c_2. Diese Konstanten können aus den Anfangsbedingungen gefunden werden: ist zum Beispiel für $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, dann wird, wie man leicht sieht, $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0/\omega$, und somit nimmt (44,6) die Form

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{44,7}$$

an.

Für unsere Zwecke ist es günstiger, die allgemeine Lösung (44,6) in etwas anderer Form darzustellen. Wir schreiben (44,6) um, indem wir c_1 ausklammern:

$$x = c_1 \left(\cos \omega t + \frac{c_2}{c_1} \sin \omega t \right).$$

Führen wir $\frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \delta$ ein, dann erhalten wir

$$x = c_1 (\cos \omega t + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega t) = \frac{c_1}{\cos \delta} \cos (\omega t - \delta)$$
$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \cos (\omega t - \delta).$$

Setzen wir $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$, so erhalten wir schließlich

$$x = a \cos (\omega t - \delta), \tag{44,8}$$

worin a und δ neue Konstanten sind.

Die durch (44,8) beschriebene Bewegung ist offensichtlich periodisch, da die Zeit als periodische Funktion eingeht, denn es gibt einen solchen Zeitraum T, daß

$$\cos (\omega t - \delta) = \cos [\omega (t + T) - \delta]$$

ist. Hieraus folgt

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T};$$

ω nennt man die Kreisfrequenz und $\frac{1}{T}$ die lineare Frequenz ν:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Nach (44,3) ist

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{44,9}$$

und

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{44,10}$$

Berechnen wir jetzt die Energie des Oszillators. Die kinetische Energie ist $E_k = \frac{m}{2} \cdot \dot{x}^2$, oder da $\dot{x} = -a\omega \sin (\omega t - \delta)$, folgt

$$E_k = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - \delta). \tag{44,11}$$

Wird als Nullwert der potentiellen Energie ihr Wert in dem Augenblick angenommen, in dem sich das Teilchen in der Gleichgewichtslage befindet, dann wird die potentielle Energie in irgendeiner Lage mit den Koordinaten x ausgedrückt durch

$$E_p = -\int_0^x F\, d\xi = k \int_0^x \xi\, d\xi = \frac{kx^2}{2}. \tag{44,12}$$

Drücken wir jetzt x durch (44,8) aus und beachten, daß nach (44,9) $k = m\omega^2$ ist, dann finden wir

$$E_p = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \delta) . \tag{44,13}$$

Mit Hilfe von (44,11) und (44,13) finden wir die Gesamtenergie:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t - \delta) + \cos^2(\omega t - \delta)] = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 . \tag{44,14}$$

Die Formeln (44,11) und (44,13) zeigen, daß sich die kinetische bzw. potentielle Energie quadratisch im Sinus bzw. Kosinus mit der Zeit ändern. Daher genügt es zur Berechnung der Mittelwerte der Energie über eine ganze Periode, die mittleren Quadrate des Kosinus und Sinus auszurechnen. Hierbei spielt die Anwesenheit der Phasenkonstanten δ, die nicht von der Zeit abhängt, keine Rolle. Nach der Bestimmung des Mittelwertes über die Periode T haben wir

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \tag{44,15}$$

und

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} . \tag{44,16}$$

Wir vermerken noch, daß die Mittelwerte für $\cos^2 \omega t$ und $\sin^2 \omega t$ gleich $\frac{1}{2}$ sind über ein Zeitintervall, der im Vergleich zu einer Periode sehr groß ist. Für einen solchen Zeitraum sei $t_1 \gg T$. Wir haben dann

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega t_1} \sin 2\omega t_1 .$$

Da aber $\omega t_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$, so ist ωt_1 eine sehr große Zahl, wenn $t_1 \gg T$, und das zweite Glied ist im Verhältnis sehr klein und kann vernachlässigt werden. Somit ist für einen genügend großen Zeitraum

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} .$$

Ebenso wird

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} .$$

Auf diese Weise erhalten wir für die mittlere kinetische Energie über eine Periode oder über ein Zeitintervall, das genügend groß im Vergleich zu einer Periode ist, aus (44,11) und (44,15)

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2 \tag{44,17}$$

und für die mittlere potentielle Energie

$$\overline{E}_p = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2 . \tag{44,18}$$

Der Vergleich von (44,17), (44,18) und (44,14) ergibt



$$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2} E . \qquad (44,19)$$

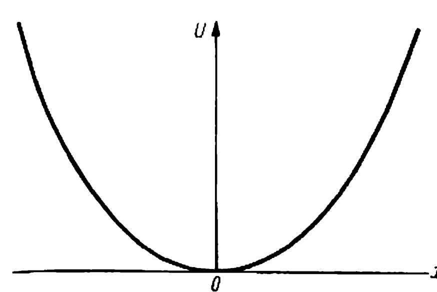


Abb. 97. Potentialkurve eines harmonischen Oszillators

Für einen linearen harmonischen Oszillator ist die über einen großen Zeitraum gemittelte kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie, und beide sind gleich der halben Gesamtenergie.

Da die potentielle Energie U dem Quadrat der Verschiebung proportional ist, $U = kx^2/2$, wird die Potentialkurve eines harmonischen Oszillators durch eine Parabel dargestellt (Abb. 97).

§ 45. Die komplexe Darstellung der Schwingungen

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$x = a \cos (\omega t - \delta) \qquad (44,8)$$

können wir in einer anderen Form schreiben, die vom formalen Gesichtspunkt größere Vorzüge besitzt. Hierzu wollen wir daran erinnern, daß jede komplexe Zahl

$$u = a + ib = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (45,1)$$

nach dem Eulerschen Satz in der Form einer Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten

$$u = re^{i\varphi} \qquad (45,2)$$

dargestellt werden kann. Dabei ist r der Modul der komplexen Zahl, der auch mit $|u|$ bezeichnet wird, φ ist das Argument oder die Phase. Ersetzen wir in (45,1) und (45,2) i durch $-i$, dann erhalten wir die komplexe Zahl

$$u^* = r (\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi} , \qquad (45,3)$$

die als konjugiert komplex zu u bezeichnet wird. Das Produkt beider konjugiert komplexer Zahlen ist gleich dem Quadrat ihres gemeinsamen Moduls, da

$$uu^* = re^{i\varphi} \cdot re^{-i\varphi} = r^2 = |u|^2 .$$

Es ist leicht zu sehen, daß der komplexe Ausdruck

$$x = a (\cos \omega t + i \sin \omega t) = ae^{i\omega t} \qquad (45,4)$$

und mit ihm der konjugiert komplexe

$$x^* = a (\cos \omega t - i \sin \omega t) = ae^{-i\omega t} \qquad (45,5)$$

die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators (44,4) befriedigen, da sie die linearen Kombinationen ihrer Partikularlösungen enthalten. Deshalb haben wir formal das Recht, die Schwingungsformel nicht nur in der trigonometrischen Gestalt, sondern auch in der Exponentialform (45,4) oder (45,5) zu schreiben. Ein solcher

Ersatz ist deshalb oft zweckmäßig, da in vielen Fällen die mathematischen Operationen wesentlich leichter mit Exponentialfunktionen als mit trigonometrischen durchgeführt werden können. Vom physikalischen Standpunkt allerdings enthält die Formel $x = a \cdot e^{i\omega t}$ einen Widerspruch[1]), da auf ihrer linken Seite eine reelle Größe, die Koordinate, steht, auf ihrer rechten dagegen eine komplexe. Um trotzdem die Rechnung mit Exponentialfunktionen beizubehalten, wird die Bedingung festgelegt, diese Funktionen zu benutzen, in dem Endresultat jedoch nur den Realteil der erhaltenen komplexen Zahl zu nehmen. Dieser Realteil wird in zweifelhaften Fällen mit dem Symbol $\Re e$ bezeichnet, das vor die komplexe Zahl gesetzt wird:

$$\Re e\, e^{i\varphi} = \cos\varphi\,.$$

Offensichtlich ist

$$\Re e\, e^{i\omega t} = \Re e\, e^{-i\omega t} = \cos\omega t\,,$$

und es kann mit demselben Recht jede dieser beiden konjugiert komplexen Zahlen benutzt werden.

Das allgemeine Integral der Gleichung des linearen Oszillators

$$x = a\cos(\omega t - \delta)$$

kann unter dieser Bedingung in der Form

$$x = \Re e\, a e^{i(\omega t - \delta)}$$

geschrieben werden.

Eine noch größere Vereinfachung wird mit der Einführung der komplexen Amplitude erreicht. Bedenken wir, daß $ae^{i(\omega t-\delta)} = ae^{-i\delta}\cdot e^{i\omega t}$, und führen wir die komplexe Amplitude $A = ae^{-i\delta}$ ein. Die konjugiert komplexe Amplitude wird dann $A^* = ae^{i\delta}$, und das Quadrat der reellen Amplitude a wird dann als Produkt

$$AA^* = ae^{-i\delta}\cdot ae^{i\delta} = a^2 = |A|^2$$

gefunden. Unter Benutzung der komplexen Amplituden kann die Formel der harmonischen Schwingungen immer in der Form

$$x = \Re e\, Ae^{i\omega t}$$

oder einfach

$$x = Ae^{i\omega t}$$

geschrieben werden, wobei zu bedenken ist, daß die Anfangsphase δ in der komplexen Amplitude eingeschlossen ist.

Die in diesem Paragraphen gezeigte Art der komplexen Darstellung von Schwingungen gibt aber nur in den Fällen richtige Resultate, in denen wir es mit linearen Ausdrücken zu tun haben. Steht die sich periodisch ändernde Größe im Quadrat oder in einer höheren Ordnung, oder haben wir es mit Ableitungen solcher Größen zu tun, dann müssen wir wieder zu trigonometrischen Funktionen übergehen, da der Realteil des Quadrates einer komplexen Zahl nicht dem Quadrat seines Realteiles gleich ist:

$$(a+ib)^2 = (a+ib)\,(a+ib) = (a^2-b^2) + i2ab\,,$$

so daß

$$\Re e\,(a+ib)^2 \neq a^2\,.$$

[1]) Anm. d. Redaktion: Da in der Physik nur reelle Größen einen Sinn haben, löst sich dieser Widerspruch, wenn man $\Re e\, x = \Re e\, a\cdot e^{i\omega t}$ schreibt, d. h., man betrachtet nur den Realteil von x.

Ebenso ist der Realteil des Produktes komplexer Zahlen nicht dem Produkt ihrer Realteile gleich. Ist es jedoch wünschenswert, auch in diesem Falle Exponentialfunktionen zu benutzen, dann müssen die Kosinusse durch die halbe Summe der konjugiert komplexen Funktionen nach der bekannten Eulerschen Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

ersetzt werden.

§ 46. Die Zerlegung in Spektren

Die Schwingung eines linearen harmonischen Oszillators stellt sich als der einfachste Fall eines periodischen Prozesses dar. Sehr oft können wir Vorgängen begegnen, die wohl als periodisch erscheinen, aber nicht harmonisch sind. So ist beispielsweise der Prozeß, der durch unbegrenzte, von links nach rechts laufende Wiederholung des stärker gezeichneten Kurvenzuges in Abb. 98 gebildet werden kann, zweifellos ein periodischer, jedoch kein harmonischer. In der Abb. 98 ist nun gezeigt, daß die stärker ausgezogene Kurve durch die Summierung zweier Sinuskurven mit den Frequenzen ω und 2ω erhalten werden kann. Es ergibt sich

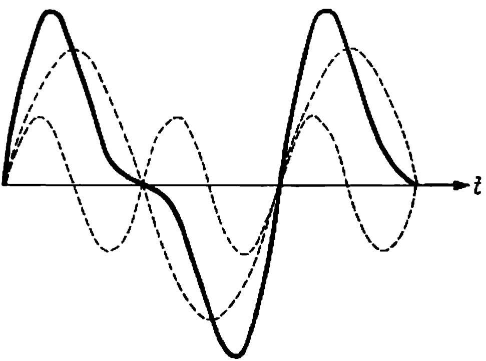


Abb. 98. Beispiel eines nichtharmonischen Vorgangs

$$x = a\sin\omega t + \frac{a}{2}\sin 2\omega t\,.$$

Man kann auch sagen, die in Abb. 98 dargestellte Schwingung zerfällt in ein *Spektrum*, in dem zwei Spektrallinien mit den Frequenzen ω und 2ω auftreten (oder ν und 2ν, wenn vorzugsweise die lineare und nicht die Kreisfrequenz benutzt wird).

In der Analysis wird gezeigt, daß eine *beliebige* Kurve, die durch einen periodischen Vorgang der Frequenz ω darstellbar ist, als Resultat der Summierung einer unendlichen Anzahl von Sinus- und Kosinuskurven mit den Frequenzen ω, $2\,\omega$, $3\,\omega$, ... aufgefaßt werden kann. Eine ähnliche Zerlegung periodischer, aber nicht harmonischer Prozesse in rein harmonische stellt die bekannte Zerlegung in Fourier-Reihen dar. Die Bedingungen für das Aufstellen dieser Reihen werden in den mathematischen Lehrbüchern untersucht. Wir wollen hier nur vermerken, daß für die uns in diesem Buche interessierenden Funktionen die Fourier-Reihen überall gleichmäßig konvergieren, so daß sie gliedweise multipliziert, differenziert und integriert werden können. Zur Bestimmung wollen wir festsetzen, daß die Verschiebung $x(t)$ als die *gesuchte Funktion* erscheint. Dann ist

$$x(t) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\omega_0 t + b_2\cos 2\omega_0 t + \cdots + c_1\sin\omega_0 t + c_2\sin 2\omega_0 t + \cdots. \quad (46{,}1)$$

Der Koeffizient $^1/_2$ im ersten Glied ist der Bequemlichkeit und Symmetrie der Formeln wegen eingeführt, wie wir später sehen werden.

Betrachten wir die einfache Art der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten. Sie beruht auf folgenden Formeln, deren Richtigkeit durch unmittelbare Ausrechnung leicht geprüft werden kann:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{für } m = n; \end{cases} \tag{46,2}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{für } m = n; \end{cases} \tag{46,3}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = 0. \tag{46,4}$$

Zur Berechnung des Koeffizienten b_m multiplizieren wir beide Seiten von (46,1) mit $\cos m\omega_0 t$ und integrieren von $-T/2$ bis $+T/2$. Dabei werden auf Grund der Formeln (46,2) und (46,4) alle Integrale der rechten Seite gleich null, mit Ausnahme des Integrals, das mit dem Koeffizienten b_m multipliziert und gleich $T/2$ ist. Auf diese Weise erhalten wir

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos m\omega_0 t \, dt. \tag{46,5}$$

Ebenso multiplizieren wir zur Berechnung des Koeffizienten c_m beide Seiten von (46,1) mit $\sin m\omega_0 t$ und integrieren von $-T/2$ bis $+T/2$. Als Ergebnis erhalten wir

$$c_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin m\omega_0 t \, dt. \tag{46,6}$$

Für die Berechnung von b_0 endlich integrieren wir (46,1) von $-T/2$ bis $+T/2$ und erhalten

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt.$$

Das konstante Glied der Zerlegung

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt$$

ist offensichtlich der Mittelwert der Funktion $x(t)$ über eine Periode, und wenn die Kurve $x(t)$ symmetrisch zur t-Achse ist (wie beispielsweise die Kurve in Abb. 98), dann ist $\frac{1}{2} b_0 = 0$.

Wir stellen noch zwei andere Formen der FOURIER-Reihe dar. Fassen wir die Glieder mit Sinus und Kosinus paarweise zusammen ($b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t$) zu Gliedern der Form $a_k \cos (k\omega_0 t + \delta_k)$ und bezeichnen das freie Glied mit $\frac{1}{2} a_0$, dann erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \delta_2) + a_3 \cos(3\omega_0 t + \delta_3) + \cdots. \tag{46,7}$$

Die komplexe Form der FOURIER-Reihe ist für unsere Zwecke besonders geeignet. Ersetzen wir in (46,7) die Kosinusse durch die halbe Summe der komplexen und konjugiert komplexen Exponentialfunktion

$$\cos(s\omega_0 t + \delta_s) = \frac{1}{2}\left[e^{i(s\omega_0 t + \delta_s)} + e^{-i(s\omega_0 t + \delta_s)}\right] = \frac{1}{2}\left(e^{is\omega_0 t}\cdot e^{i\delta_s} + e^{-is\omega_0 t}\cdot e^{-i\delta_s}\right)$$

und führen die komplexen Amplituden ein, die mit A_1 und A_{-1}, A_2 und A_{-2} usw. bezeichnet werden, dann folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{i\delta_1}, & A_{-1} = \frac{1}{2} a_1 e^{-i\delta_1}, \\ A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{i\delta_2}, & A_{-2} = \frac{1}{2} a_2 e^{-i\delta_2}, \\ \dots & \dots \\ A_s = \frac{1}{2} a_s e^{i\delta_s}, & A_{-s} = \frac{1}{2} a_s e^{-i\delta_s}, \\ \multicolumn{2}{c}{A_0 = \frac{1}{2} a_0 .} \end{array}\right\} \quad (46,8)$$

Die Reihe (46,7) hat nun die Gestalt

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{i2\omega_0 t} + \cdots + A_{-1} e^{-i\omega_0 t} + A_{-2} e^{-i2\omega_0 t} + \cdots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t} \quad (46,9)$$

oder, wenn wir mit Hilfe der Beziehung $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ die Kreisfrequenz durch die lineare ersetzen:

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i2\pi\nu_0 t} + A_2 e^{i4\pi\nu_0 t} + \cdots + A_{-1} e^{-i2\pi\nu_0 t} + A_{-2} e^{-i4\pi\nu_0 t} + \cdots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s\nu_0 t}. \quad (46,10)$$

Die Berechnung der Koeffizienten geschieht auf folgende Weise: wir multiplizieren beide Seiten von (46,10) mit $e^{-i2\pi r\nu_0 t}$ und integrieren von $-T/2$ bis $+T/2$:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cdot e^{-i2\pi r\nu_0 t}\,dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\,dt .$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die auf der rechten Seite stehenden Glieder mit Ausnahme des Gliedes mit der Nummer r null werden. Tatsächlich ist

a) für $s \neq r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\,dt = \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0}\left(e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\right)\Big|_{-T/2}^{+T/2}$$

$$= \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0}\left[e^{i\pi(s-r)} - e^{-i\pi(s-r)}\right] = 0 ,$$

b) für $s = r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_r dt = A_r T .$$

Daraus folgt

$$A_r = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-i2\pi r\nu_0 t}\, dt. \tag{46,11}$$

Diesem analog werden zur Berechnung des Koeffizienten A_{-r} beide Seiten von (46,10) mit $e^{i2\pi r\nu_0 t}$ multipliziert und von $-T/2$ bis $+T/2$ integriert. Als Ergebnis erhalten wir

$$A_{-r} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{i2\pi r\nu_0 t}\, dt. \tag{46,12}$$

Für $r = 0$ ergibt sich

$$A_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, dt. \tag{46,13}$$

Wir vermerken noch, daß die Fourier-Koeffizienten A_m und A_{-m} unbedingt konjugiert komplex sind, wenn $x(t)$ eine reelle Funktion ist:

$$A_m^* = A_{-m}.$$

Nur in diesem Falle wird auch die rechte Seite der Gleichung (46,10) befriedigt werden.

Wir sehen, daß es immer möglich ist, eine Funktion, die einen periodischen Vorgang darstellt, in harmonische Komponenten zu zerlegen. In der Sprache der Physik heißt dies, daß der periodische Prozeß in *ein Spektrum zerlegt* werden kann. Dieses Spektrum wird diskret sein, d. h., es wird aus einzelnen, ideal dünnen Linien bestehen, deren Frequenzen durch die arithmetische Reihe $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \ldots$ gebildet werden. Sehr oft wird auch die Terminologie der Akustik benutzt, und ν_0 heißt *die Grundfrequenz und* $2\nu_0, 3\nu_0, \ldots$. *ihre Oberschwingungen.*

Die Fourier-Koeffizienten stellen offensichtlich die Amplituden der entsprechenden Oberschwingungen dar. Während die Amplitude sowohl negative als positive Werte haben kann, ist die *Intensität* stets eine positive Größe; sie wird durch das Quadrat der Amplitude bestimmt. Die Quadrate der Fourier-Koeffizienten stellen daher die Intensitäten der harmonischen Komponenten eines periodischen Prozesses dar oder, was dasselbe ist, die Intensitäten der Spektrallinien.

Zum Schluß wollen wir noch vermerken, daß die Fourier-Zerlegung auch auf einen nichtperiodischen Prozeß angewandt werden kann, wenn er in einem *begrenzten Intervall* (beispielsweise in dem begrenzten Zeitintervall von t_0 bis t_1) gegeben ist. In diesem Falle können wir die diesen Prozeß darstellende Kurve als die Periode einer periodischen Funktion betrachten. Da die Fourier-Zerlegung jedoch eine periodische Funktion darstellt, so wird sie den Gang des Prozesses nur in den Grenzen des gegebenen Intervalles richtig darstellen.

§ 47. Zentralkräfte. Die kinetische Energie in Polarkoordinaten

Nach der Untersuchung der Eigenschaften von linearen Oszillatoren gehen wir zur Betrachtung eines Modelles über, das aus einem um ein festes Zentrum rotierenden Elektron besteht. Eine solche Drehung erscheint als Teil einer Bewegung im Feld von Zentralkräften, d. h. von Kräften, deren Richtung ständig

durch einen Punkt geht und deren Größe nur als Funktion von der Entfernung dieses Punktes erscheint.

Bei der Lösung einer jeden mechanischen Aufgabe hat die Wahl des günstigsten Koordinatensystems eine sehr große Bedeutung. Gewöhnlich löst man die Aufgabe in demjenigen Koordinatensystem besonders leicht, das der Symmetrie der Aufgabe entspricht. Deshalb können wir erwarten, daß für eine Bewegung im Zentralfeld ein Polarkoordinatensystem am günstigsten sein wird.

Bei der Betrachtung des Planetenmodelles des Atoms (§ 49) benutzen wir die Gesetze der Erhaltung der Energie und des Drehimpulses. Als Vorbereitung für diese Betrachtung leiten wir jetzt den Ausdruck für die Energie in Polarkoordinaten ab.

Die Lage eines Punktes auf einer Ebene wird durch die beiden Polarkoordinaten r und φ bestimmt, die mit den DESCARTESschen Koordinaten durch die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi \tag{47,1}$$

verbunden sind. Die kinetische Energie wird in DESCARTESschen Koordinaten durch

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{47,2}$$

ausgedrückt. Aber aus (47,1) folgt

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\,,\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\,. \tag{47,3}$$

Setzen wir dies in (47,2) ein, dann finden wir nach einfacher Ausrechnung

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)\,. \tag{47,4}$$

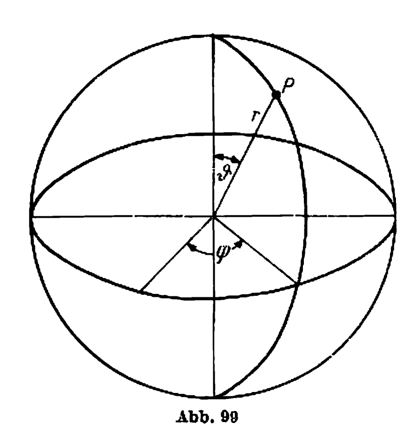


Abb. 99

Dies ist der Ausdruck für die kinetische Energie in ebenen Polarkoordinaten.

Kombinieren wir die Formeln (47,1) und (47,3), dann erhalten wir leicht

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}\,. \tag{47,5}$$

Diese Bezeichnung benötigen wir später.

Als sphärische Polarkoordinaten des Punktes P im Raume dienen (Abb. 99): der Radiusvektor r, die Poldistanz ϑ, die die *Ergänzung auf* 90° *der Breite ist*, und die Länge φ, die von irgendeinem Nullmeridian gerechnet wird. Die Beziehung zwischen den DESCARTESschen und den Polarkoordinaten ist unmittelbar aus der Zeichnung ersichtlich:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\quad z = r\cos\vartheta\,.$$

Hieraus erhalten wir

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi\,,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi\,,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta\,.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für die kinetische Energie in räumlichen kartesischen Koordinaten

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{47,6}$$

ein, dann finden wir nach der Vereinfachung

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2) \tag{47,7}$$

als Ausdruck für die kinetische Energie in einem sphärischen Polarkoordinatensystem.

§ 48. Die Bewegung im Zentralfeld

Für die Beschreibung einer Zentralbewegung hat eine dynamische Größe, die Impulsmoment genannt wird, eine große Bedeutung. Schreiben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung in Vektorform

$$\dot{\mathfrak{p}} \equiv m\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{F}$$

und multiplizieren sie vektoriell von links mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$

$$[\mathfrak{r}m\dot{\mathfrak{v}}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]. \tag{48,1}$$

Bedenken wir, daß

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}m\mathfrak{v}] = m\,[\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{v}] + m\,[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{v}}] = m\,[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] + [\mathfrak{r}m\dot{\mathfrak{v}}] = [\mathfrak{r}m\dot{\mathfrak{v}}],$$

wobei $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 0$ ist, dann können wir (48,1) umschreiben in

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]. \tag{48,2}$$

Der Vektor

$$\mathfrak{L} = [\mathfrak{r}\mathfrak{p}] \tag{48,3}$$

wird das Impulsmoment des materiellen Punktes in bezug auf den Punkt O genannt (Abb. 100). Seine Komponenten auf kartesische Koordinatenachsen sind

$$\left.\begin{aligned} L_x &= (yp_z - zp_y) = m\,(y\dot{z} - z\dot{y}),\\ L_y &= (zp_x - xp_z) = m\,(z\dot{x} - x\dot{z}),\\ L_z &= (xp_y - yp_x) = m\,(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}\right\} \tag{48,4}$$

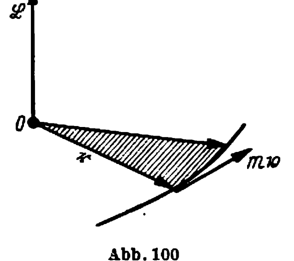


Abb. 100

Die Gleichung (48,2) nimmt nun die Form

$$\dot{\mathfrak{L}} = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}] \tag{48,5}$$

an. Ist die Bewegung eine Zentralbewegung, so sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ parallel, gleich oder entgegengesetzt, gerichtet, so daß in diesem Falle $[\mathfrak{r}\mathfrak{F}] = 0$ ist, und die Gleichung (48,5) ergibt

$$|\mathfrak{L}| = \text{const.} \tag{48,6}$$

Sie besagt, daß bei einer Zentralbewegung der Drehimpuls als Vektor erhalten bleibt. Daraus folgt insbesondere, daß die Bahnen des Teilchens bei einer Zentral-

bewegung in einer Ebene liegen, da nur in diesem Falle der Vektor $\mathfrak{L}$ während der Bewegung ein und dieselbe Richtung beibehalten wird.

Ist für die Bahnebene die xy-Ebene ausgewählt, so daß der Vektor $\mathfrak{L}$ in Richtung der z-Achse liegt, dann ist

$$L_x = L_y = 0\,, \quad L_z = L\,,$$

so daß

$$L = L_z = m\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,. \tag{48,7}$$

In vielen Fällen ist es bei der Betrachtung von Zentralbewegungen bequemer, Polarkoordinaten zu benutzen. Bedenken wir, daß [siehe (47,5)]

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}\,,$$

dann können wir den Ausdruck für den Drehimpuls in der Form

$$L = mr^2\dot{\varphi} \tag{48,8}$$

darstellen.

Der Drehimpuls kann auch durch die kinematische Größe $\mathfrak{c}$ ausgedrückt werden, die Flächengeschwindigkeit genannt wird. Nach Definition ist

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$$

und folglich

$$\mathfrak{L} = 2m\mathfrak{c}\,.$$

Aus dem Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses folgt das zweite Keplersche Gesetz unmittelbar. In der Tat, für $|\mathfrak{L}| = \text{const}$ ist offensichtlich auch $|\mathfrak{c}| = \text{const}$; dies ist aber das zweite Keplersche Gesetz.

§ 49. Die Kepler-Aufgabe

Betrachten wir die Bewegung eines Elektrons, das sich um einen Kern mit der Ladung $+Ze$ und einer Masse bewegt, die im Vergleich zur Elektronenmasse so groß ist, daß der Kern selbst als unbewegliches Zentrum betrachtet werden kann. Da die Rutherfordschen Versuche der Streuung von α-Teilchen gezeigt haben, daß das Coulombsche Gesetz bis zu Entfernungen von der Größenordnung 10^{-12} cm gilt, so wird die Kraft der Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem Elektron gleich Ze^2/r^2 sein, und die potentielle Energie ist

$$U = -\frac{Ze^2}{r}\,. \tag{49,1}$$

Unter solchen Bedingungen ist offensichtlich unsere Aufgabe mit der Betrachtung einer Planetenbewegung um die Sonne identisch, weswegen sie auch Kepler-Aufgabe heißt. Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir die Gesetze von der Erhaltung der Energie und des Drehimpulses. In Polarkoordinaten [siehe die Formeln (47,4) und (48,8)] geben diese Gesetze

$$\frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E\,, \tag{49,2}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = P\,, \tag{49,3}$$

wobei E und P Konstanten sind. Aus (49,3) ergibt sich

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}. \tag{49,4}$$

Von den zeitlichen Ableitungen gehen wir zur Ableitung nach dem Winkel φ über und benutzen zu diesem Zwecke die Beziehung

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mr^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi}. \tag{49,5}$$

Setzen wir (49,4) und (49,5) in (49,2) ein, dann finden wir

$$\frac{m}{2}\left\{\frac{P^2}{m^2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{P^2}{m^2r^2}\right\} = E + \frac{Ze^2}{r}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \tag{49,6}$$

Als neue Veränderliche setzen wir $\varrho = \frac{1}{r}$. Da $\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$ ist, nimmt (49,6) die Form

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2}\varrho - \varrho^2 \tag{49,7}$$

an.

Für die Integration der Gleichung (49,7) ist es günstig, sie vorher noch einmal zu differenzieren:

$$2\frac{d\varrho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{d\varrho}{d\varphi} - 2\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$\frac{d\varrho}{d\varphi}\left(\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho - \frac{mZe^2}{P^2}\right) = 0.$$

Da allgemein $\frac{d\varrho}{d\varphi} \neq 0$, muß der Ausdruck in der Klammer gleich null sein.[1]) Wir erhalten auf diese Weise für ϱ die folgende lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho = \frac{mZe^2}{P^2}. \tag{49,8}$$

---

[1]) Wie aus dem weiteren ersichtlich (siehe Formel 49,14 und das aus dem Text Folgende), strebt $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ gegen 0 nur in 2 Punkten der Bahnen, die bei $E < 0$ mit dem Aphel und dem Perihel der Bahnen übereinstimmen. Die Gleichung $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ würde die Lösung $\varrho = \text{const}$ bei beliebigen Werten von ϱ ergeben. Dies ist offensichtlich nur bei Kreisbahnen der Fall. Man kann sich aber leicht davon überzeugen (d. h. bei der Bedingung $\varrho = \text{const}$ in allen Bahnpunkten), daß für ϱ der Ausdruck $\varrho = \frac{mZe^2}{P^2}$ erhalten wird. Wie aber aus dem Text ersichtlich, ist eine partielle Lösung ϱ aus der inhomogenen Gleichung durch Nullsetzen des Klammerausdruckes zu erhalten. Auf diese Weise ergibt die Bedingung $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ keine neue Lösung im Vergleich zu (49,8).

Ihr allgemeines Integral ist bekanntlich gleich der partiellen Lösung der inhomogenen Gleichung plus dem allgemeinen Integral der zugehörigen homogenen Gleichung. Es ist sofort ersichtlich, daß

$$\varrho_1 = \frac{mZe^2}{P^2}$$

die partielle Lösung der inhomogenen Gleichung sein wird. Das allgemeine Integral der homogenen Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho = 0$$

ist

$$\varrho_2 = A\cos\varphi + B\sin\varphi\,,$$

wobei A und B willkürliche Konstanten sind, die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Somit erhalten wir

$$\varrho = \frac{mZe^2}{P^2} + A\cos\varphi + B\sin\varphi\,. \tag{49,9}$$

Wir wollen den Winkel φ für jene Lage des Radiusvektors ausrechnen, bei der r einen minimalen Wert hat: $r = r_{\min}$, und folglich $\varrho = \frac{1}{r} = \varrho_{\max}$, so daß wir für $\varphi = 0$

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0 \tag{49,10}$$

erhalten. Da nach (49,9)

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -A\sin\varphi + B\cos\varphi$$

folgt, so gibt die Bedingung (49,10) $B = 0$. Die Lösung (49,9) nimmt dann die Form

$$\varrho = \frac{mZe^2}{P^2} + A\cos\varphi \tag{49,11}$$

an.

Dies ist die Gleichung der Elektronenbahn. Vergleichen wir sie mit der Gleichung für Kegelschnitte in Polarkoordinaten in bezug auf den Brennpunkt

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{49,12}$$

in der a die große Halbachse und ε die Exzentrizität ist. Hieraus finden wir für $\varrho = \frac{1}{r}$ den Ausdruck

$$\varrho = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}\,. \tag{49,13}$$

Offensichtlich stimmen (49,11) und (49,13) überein, wenn

$$\frac{mZe^2}{P^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}\,, \qquad A = \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}$$

gesetzt wird. Dies bedeutet aber, daß die Flugbahn des Elektrons als ein Kegelschnitt erscheint (erstes Keplersches Gesetz).

Um die Bedingung zu finden, bei der dieser Kegelschnitt eine Ellipse ist, suchen wir die Maximum- und Minimumbedingung von ϱ. Die notwendige Extremalbedingung ist

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0\,.$$

Setzen wir in (49,7) $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$, dann erhalten wir die quadratische Gleichung

$$\varrho^2 - 2\frac{mZe^2}{P^2}\varrho - \frac{2mE}{P^2} = 0. \tag{49,14}$$

Mit den Wurzeln der quadratischen Gleichung finden wir aus (49,14)

$$\varrho_{\max} + \varrho_{\min} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad \varrho_{\max}\cdot\varrho_{\min} = -\frac{2mE}{P^2}. \tag{49,15}$$

Ist die Energie negativ ($E < 0$), dann ist $\varrho_{\max}\cdot\varrho_{\min} > 0$, und es existieren zwei positive Werte für ϱ (und damit auch für r), bei denen $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$. Einer dieser beiden Werte von ϱ entspricht dem Maximum von ϱ (dem Minimum von r, Perihel) und der andere dem Minimum von ϱ (dem Maximum von r, Aphel). So ist bei $E < 0$ die Bahn eine *Ellipse.*

Umgekehrt wird bei $E > 0$ das Produkt $\varrho_{\max}\cdot\varrho_{\min} < 0$. Dies bedeutet, daß nicht zwei positive, dem Maximum und dem Minimum entsprechende Werte von ϱ existieren, sondern einer von ihnen positiv und der andere negativ ist. Die positiven und negativen Werte des Radiusvektors entsprechen zwei verschiedenen Hyperbelästen. Also ist bei $E > 0$ die Bahn eine *Hyperbel.*

Suchen wir noch die Beziehung, welche die Energie mit der großen Halbachse verbindet. Aus (49,13) ist ersichtlich, daß für $\varphi = 0$ $\varrho = \varrho_{\max}$ und für $\varphi = \pi$ $\varrho = \varrho_{\min}$ folgt, so daß wir

$$\varrho_{\max} = \frac{1+\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1-\varepsilon)}, \quad \varrho_{\min} = \frac{1-\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1+\varepsilon)}$$

erhalten. Setzen wir dies in die linke Seite von (49,15) ein, dann finden wir

$$\frac{2}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \tag{49,16}$$

$$\frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -\frac{2mE}{P^2}. \tag{49,17}$$

Aus (49,16) und (49,17) folgt dann

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \tag{49,18}$$

Dividieren wir (49,16) durch (49,17), so ergibt sich

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}. \tag{49,19}$$

Die Beziehung (49,19) zeigt, daß die Energie eines Elektrons bei gegebener Ladung nur von der großen Halbachse seiner Bahn, nicht aber von der Exzentrizität abhängt. Alle Bahnen mit derselben großen Halbachse entsprechen derselben Energie.

Wir leiten nun mit Hilfe der gefundenen Beziehung das dritte KEPLERsche Gesetz ab. Ist die Umlaufsgeschwindigkeit des Elektrons gleich c, dann wird bei einer ganzen Periode T der Umdrehung der Radiusvektor die Fläche

$$S = cT$$

überstreichen.

Da aber die Umlaufsgeschwindigkeit durch den Drehimpuls ausgedrückt werden kann $c = \frac{L}{2m}$ (siehe § 48), so erhalten wir, wenn $L = P$ gesetzt wird,

$$S = \frac{1}{2}\frac{P}{m}T. \tag{49,20}$$

Andererseits kann S als Ellipsenfläche mit den Halbachsen a und b in der Form

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{49,21}$$

ausgedrückt werden, da $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Der Vergleich von (49,20) und (49,21) ergibt

$$PT = 2\pi m a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{49,22}$$

Die Beziehung (49,16) gibt die Möglichkeit, P^2 auszurechnen:

$$P^2 = mZe^2 a(1-\varepsilon^2). \tag{49,23}$$

Quadrieren wir (49,22) und setzen (49,23) ein, dann erhalten wir nach Kürzung und Umstellung

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \tag{49,24}$$

oder, da $1/T$ gleich der Frequenz ν ist,

$$a^3\nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \tag{49,25}$$

Jetzt steht auf der rechten Seite von (49,24) eine Größe, die bei gegebener Kernladung Ze konstant ist, und wir finden

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}.$$

Dies ist das dritte Keplersche Gesetz.

§ 50. Das α-Teilchen im Kernfeld

Betrachten wir nun die Bewegung eines α-Teilchens im Felde eines unbeweglichen Kernes in dem Falle, daß die abstoßende Kraft dem Coulombschen Gesetz unterliegt. Ist die Kernladung wieder gleich $+Ze$, die Ladung des α-Teilchens gleich $+2e$, dann wird die potentielle Energie

$$U = \frac{2Ze^2}{r} \tag{50,1}$$

sein. Die Gesetze der Erhaltung der Energie und des Impulsmomentes ergeben

$$\frac{m_\alpha}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} = E, \tag{50,2}$$

$$m_\alpha r^2\dot{\varphi} = P, \tag{50,3}$$

wobei m_α die Masse des α-Teilchens ist. Der Gang der weiteren Lösung der Aufgabe stimmt vollständig mit dem vorigen Paragraphen überein, eben weil die Ausgangsgleichungen bis auf das Vorzeichen der potentiellen Energie in dem einen wie in dem anderen Fall gleich sind (49,1–3). Deshalb werden wir nicht

die Einzelheiten der Ausrechnung wiederholen, sondern sofort das Resultat hinschreiben, zu dem die Gleichungen (50,2) und (50,3) nach Umformung und Einführung der neuen Veränderlichen $\varrho = \frac{1}{r}$ führen:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\,m_\alpha E}{P^2} - 2\,\frac{2\,m_\alpha Ze^2}{P^2}\,\varrho - \varrho^2 .$$

Differenzieren wir diese Gleichung nochmals, führen verschiedene Kürzungen und Umstellungen durch, dann erhalten wir

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho = C \qquad (50,4)$$

mit

$$C = -\frac{2\,m_\alpha Ze^2}{P^2} . \qquad (50,5)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (50,4) hat dann die Form

$$\varrho = C + A\cos\varphi + B\sin\varphi . \qquad (50,6)$$

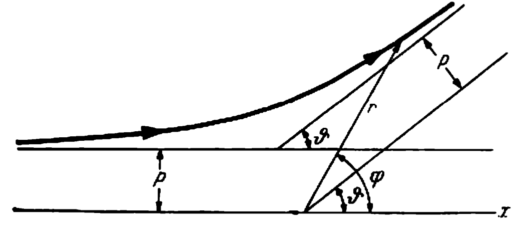


Abb. 101. Weg eines α-Teilchens im Kernfeld

Betrachten wir jetzt die Anfangsbedingungen. Offensichtlich (Abb. 101) ist für $\varphi = \pi$ $r = \infty$, folglich $\varrho = 0$. Dies ergibt nach Einsetzen in (50,6)

$$A = C . \qquad (50,7)$$

Die zweite Bedingung erhalten wir auf folgende Weise. Die Ordinate eines beliebigen Punktes der Flugbahn ist mit r und φ durch die Beziehung $y = r\sin\varphi$ oder

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r\sin\varphi} = \frac{\varrho}{\sin\varphi}$$

verknüpft.

Benutzen wir (50,6) und (50,7), dann finden wir

$$\frac{1}{y} = \frac{C\,(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} + B .$$

Bei $\varphi = \pi$ ist die Ordinate y gleich der „Zielentfernung" p[1]), und das erste Glied auf der rechten Seite wird gleich null. Wir erhalten somit $B = \frac{1}{p}$, und die Lösung (50,6) nimmt die Endform

$$\varrho = C\,(1+\cos\varphi) + \frac{1}{p}\sin\varphi \qquad (50,8)$$

an.

Die Ablenkung φ des α-Teilchens ist offensichtlich gleich dem Winkel ϑ zwischen den Asymptoten der Hyperbel, wobei für die Richtung der Flugbahn nach der Ablenkung $\varrho = 0$ ist. Deshalb erhalten wir aus (50,8)

$$-\frac{1}{Cp} = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} \qquad (50,9)$$

oder, wenn wir den Wert für C aus (50,5) benutzen,

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{P^2}{2\,m_\alpha Ze^2 p} . \qquad (50,10)$$

[1]) Anm. d. Redaktion: p heißt auch Stoßparameter.

Schließlich kann das Impulsmoment P durch die Zielentfernung p und die Geschwindigkeit v ausgedrückt werden:

$$P = m_\alpha p v .$$

Setzen wir dies in (50,10) ein, dann ergibt sich

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{m_\alpha v^2 p}{2Ze^2} . \qquad (50,11)$$

Dies ist die Formel für den Winkel der Ablenkung eines α-Teilchens, wie wir sie schon im § 27 benutzten.

§ 51. Die reduzierte Masse

In den vorigen beiden Paragraphen betrachteten wir die Bewegung eines Teilchens (eines Elektrons oder α-Teilchens) um einen als fest angenommenen Kern. Diese Betrachtung war jedoch nicht genau, weil es notwendig ist, die Bewegung beider in Wechselwirkung stehender Teilchen zu berücksichtigen.

Die Masse des Kernes und des sich um ihn bewegenden Teilchens seien durch m_1 und m_2 gegeben und die Radiusvektoren, die ihre Lage in bezug auf einen willkürlichen Ursprung O bestimmen, durch $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ (Abb. 102). Das Gesetz der Wechselwirkung der Teilchen wird durch eine Funktion der Entfernung $f(r)$ ausgedrückt. Befinden sich die Teilchen nur unter dem Einfluß der sie verbindenden Wechselwirkungskräfte, dann werden ihre Bewegungsgleichungen durch

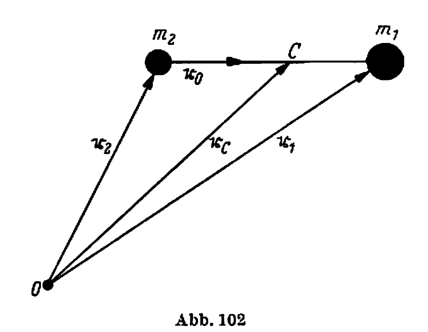


Abb. 102

$$m_1\ddot{\mathfrak{r}}_1 = f(r)\,\mathfrak{r}_0 \qquad (51,1)$$

und

$$m_2\ddot{\mathfrak{r}}_2 = -f(r)\,\mathfrak{r}_0 \qquad (51,2)$$

gegeben sein, worin $\mathfrak{r}_0$ der von m_2 nach m_1 gerichtete Einheitsvektor ist. Addieren wir (51,1) und (51,2), dann erhalten wir

$$m_1\ddot{\mathfrak{r}}_1 + m_2\ddot{\mathfrak{r}}_2 = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\mathfrak{r}}_1 + m_2\dot{\mathfrak{r}}_2) = 0 .$$

Hieraus folgt

$$m_1\dot{\mathfrak{r}}_1 + m_2\dot{\mathfrak{r}}_2 = \text{const} \qquad (51,3)$$

oder

$$m_1\mathfrak{v}_1 + m_2\mathfrak{v}_2 = \text{const}. \qquad (51,3')$$

In einem System zweier durch Zentralkräfte verbundener Teilchen ist der Gesamtimpuls eine konstante Größe.

Dieses Ergebnis nimmt eine besonders anschauliche Form an, wenn wir den Begriff der Zentralmasse oder des Schwerpunktsystems einführen. Als Schwerpunkt eines Systems zweier Teilchen wird derjenige Punkt bezeichnet, dessen Lage durch den Radiusvektor

$$\mathfrak{r}_C = \frac{m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (51,4)$$

bestimmt wird.

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß der Schwerpunkt auf der beide Teilchen verbindenden Geraden liegt und diese Gerade in einem den Massen umgekehrten Verhältnis teilt. Aus (51,4) folgt unmittelbar

$$m_1(\mathfrak{r}_C - \mathfrak{r}_1) = m_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_C). \tag{51,5}$$

Dies bedeutet aber, daß die Vektoren $\mathfrak{r}_C - \mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_C$ parallel sind; da sie aber außerdem noch den gemeinsamen Punkt C besitzen, liegen die drei Punkte m_1, C und m_2 auf einer Geraden. Hiermit ist die erste Hälfte unserer Behauptung bewiesen. Für den weiteren Beweis vermerken wir, daß aus (51,5)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathfrak{r}_C - \mathfrak{r}_1|}{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_C|} \tag{51,6}$$

folgt, was zu beweisen war.

Vergleichen wir (51,4) und (51,3), dann sehen wir, daß

$$\dot{\mathfrak{r}}_C = \text{const}.$$

Dies bedeutet, daß sich der Schwerpunkt zweier Teilchen, die sich nur unter dem Einfluß ihrer Wechselwirkungskräfte befinden, geradlinig und gleichförmig bewegt oder ruht. Hierin ist eine andere Formulierung des Gesetzes von der Erhaltung des Impulses eingeschlossen, über das schon gesprochen wurde.

Da uns nur die Bewegung der Teilchen *in bezug aufeinander* interessiert, wählen wir ein solches Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt ruht, und legen in ihn den Koordinatenanfangspunkt. In diesem Koordinatensystem beschreiben die Teilchen um den festen Schwerpunkt Bahnen, die einander ähnlich, deren lineare Abmessungen aber den Massen umgekehrt proportional sind.

Es zeigt sich jedoch, daß das Studium der Bewegung eines Systems zweier Körper durch die Betrachtung der Bewegung eines fiktiven Körpers ersetzt werden kann, der von dem ruhenden Schwerpunkt in einer Entfernung angeordnet ist, die gleich dem Abstand der Körper voneinander ist und die Masse

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{51,7}$$

besitzt. Um sich hiervon zu überzeugen, schreiben wir (51,1) und (51,2) um in die Form

$$\ddot{\mathfrak{r}}_1 = \frac{1}{m_1} f(r)\,\mathfrak{r}_0, \tag{51,1'}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} f(r)\,\mathfrak{r}_0 \tag{51,2'}$$

und subtrahieren (51,2′) von (51,1′):

$$\ddot{\mathfrak{r}}_1 - \ddot{\mathfrak{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r)\,\mathfrak{r}_0,$$

oder wir setzen

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

und bedenken, daß die Vektordifferenz $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}$ ein Vektor ist, der von m_2 nach m_1 gerichtet ist, dann erhalten wir

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{m} f(r)\,\mathfrak{r}_0$$

oder

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = f(r)\,\mathfrak{r}_0. \tag{51,8}$$

Dies sollte aber bewiesen werden. Die Masse m, die dem fiktiven, das System von Körpern ersetzenden Teilchen zugeschrieben werden muß, nennt man die *reduzierte Masse.*

Es ist klar, daß alle Resultate, zu denen wir in den vorigen Paragraphen durch die Annahme eines festen Kernes kamen, ungenau waren, eben weil wir die Bewegung des Kernes nicht berücksichtigten. Die Gleichung (51,8) zeigt, daß sie sich vollständig genau ergeben, wenn wir in den Endresultaten die Masse des sich bewegenden Teilchens durch die reduzierte Masse m beider Teilchen ersetzen.

Betrachten wir jetzt die Größe des Fehlers, den wir bei der Vernachlässigung der Bewegung des Kernes begehen. Wir setzen für die Massen des Kernes und des Elektrons entsprechend $m_1 = M$ und $m_2 = \mu$, dann erhalten wir nach der Formel (51,7) ihre reduzierte Masse:

$$m = \frac{M\mu}{M+\mu} = \frac{\mu}{1+\frac{\mu}{M}}. \tag{51,9}$$

Handelt es sich beispielsweise um die Bewegung eines Elektrons in einem Wasserstoffatom, dann ist das Verhältnis der Elektronenmasse zur Masse des Wasserstoffkernes gleich $\frac{\mu}{M} = \frac{1}{1836{,}5}$, und der Fehler, den wir begehen, wenn wir die Eigenbewegung des Kernes nicht berücksichtigen, gleich

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1836{,}5}}.$$

Wie wir später (§ 100) sehen werden, wird dieser Fehler in der Spektroskopie, in der die Meßgenauigkeit sehr groß ist, in den Resultaten merklich zum Ausdruck kommen.

§ 52. Allgemeine Koordinaten. Der Zustand des Systems

Bis jetzt hatten wir es mit zwei Arten von Koordinaten zu tun: den kartesischen und den Polarkoordinaten. In der Mechanik ist jedoch die Benutzung der sogenannten *allgemeinen Koordinaten* sehr vorteilhaft, unter welchen wir beliebige Parameter verstehen, welche die „Konfiguration" des Systems vollständig bestimmen. So kann beispielsweise ein System zweier, in Wechselwirkung stehender Körper durch die drei kartesischen Koordinaten ihres gemeinsamen Schwerpunktes, durch den Abstand der Körper und durch die beiden Winkel charakterisiert werden, welche die Lage der verbindenden Geraden bestimmen.

Die allgemeinen Koordinaten werden gewöhnlich durch den Buchstaben q mit verschiedenen Indizes bezeichnet: $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Der Vorzug dieser Art liegt neben ihrer Allgemeinheit vor allem darin, daß die Anzahl der allgemeinen Koordinaten in einigen Fällen geringer als die volle Anzahl der kartesischen oder der Polarkoordinaten sein kann. Haben wir beispielsweise ein System von zwei Massenpunkten, die sich in der konstanten Entfernung d von-

einander befinden, dann besteht zwischen den sechs kartesischen Koordinaten dieser Teilchen eine Beziehung (Bedingung der Verbindung)

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2,$$

aus der eine Koordinate als Funktion der fünf übrigen bestimmt werden kann. In diesem Falle wird die Konfiguration des Systems vollständig durch die fünf unabhängigen Parameter bestimmt, weshalb auch fünf allgemeine Koordinaten genügen. Unterliegt ein System von n Teilchen k Bedingungen zwischen den Koordinaten der Teilchen, so werden von den $3n$ Koordinaten

$$f = 3n - k$$

Koordinaten unabhängig sein; die übrigen k Koordinaten werden durch die Verknüpfungsbedingungen bestimmt. Diese Zahl von f unabhängigen Parametern, die zur vollständigen Bestimmung der augenblicklichen Konfiguration des Systems notwendig und hinreichend sind, nennt man die *Zahl der Freiheitsgrade*. Sind alle allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots q_f$ und alle allgemeinen Geschwindigkeiten, d. h. die Ableitungen der allgemeinen Koordinaten nach der Zeit $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_f$, gegeben, dann ist dadurch der Zustand des Systems vollständig bestimmt. In der klassischen Mechanik wird auf diese Weise der augenblickliche Zustand des Systems durch $2f$ unabhängige Parameter bestimmt.

§ 53. Die LAGRANGEsche Funktion. Die LAGRANGEschen Gleichungen

Wir führen allgemeine Koordinaten ein, um die Bewegungsgleichungen zu suchen, die für beliebige Koordinatensysteme zweckmäßig sind. Eine solche Eigenschaft besitzen die Gleichungen, die von LAGRANGE entdeckt wurden und daher LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen genannt werden. Oftmals werden sie auch LAGRANGEsche Gleichungen zweiter Art genannt. Mit diesen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Wir haben ein freies Teilchen, dessen Lage allgemein durch drei Koordinaten charakterisiert wird. Diese können die kartesischen Koordinaten x, y, z sein, aber auch beliebige andere Koordinaten q_1, q_2, q_3 sind möglich. Nehmen wir nun an, daß uns Formeln bekannt sind, die x, y, z durch q_1, q_2, q_3 ausdrücken:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{53,1}$$

Ein Beispiel hierfür sind die Formeln im § 47 für den Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten. Die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten schreiben wir

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Multiplizieren wir nun die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, die zweite mit $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, die dritte mit $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ und addieren sie, dann ergibt sich

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}. \tag{53,2}$$

Die rechte Seite der erhaltenen Gleichung wird zur Abkürzung mit Q_1 bezeichnet:

$$X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1. \tag{53,3}$$

Bedenken wir, daß zum Beispiel

$$\ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) - \dot{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) \text{ usw.,}$$

dann können wir die Gleichung (53,2) in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{m\left(\dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{y}\,\frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{z}\,\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right\} - m\left\{\dot{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \dot{y}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \dot{z}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right\} = Q_1 \tag{53,4}$$

schreiben. Differenzieren wir die Formeln (53,1) nach der Zeit, dann erhalten wir einen Ausdruck für die vollständigen Ableitungen von x, y, z nach der Zeit, wenn wir x, y, z als zusammengesetzte Funktionen der Zeit betrachten. Beispielsweise ist

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\,\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\,\dot{q}_3\,. \tag{53,5}$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,.$$

Analog erhalten wir

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\,, \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}\,. \tag{53,6}$$

Da das Ergebnis der Differentiation nicht von der Reihenfolge abhängt, in der zwei aufeinanderfolgende Differentiationen ausgeführt werden, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\,. \tag{53,7}$$

Fassen wir noch die Beziehungen (53,6) und (53,7) ins Auge, dann können wir die Gleichung (53,4) in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{m\left(\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}\,\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)\right\} - m\left(\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z}\,\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right) = Q_1 \tag{53,8}$$

schreiben.

Erinnern wir uns nun daran, daß die kinetische Energie T unseres Teilchens durch die Komponenten der Geschwindigkeit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Wir haben deshalb

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\left(\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}\,\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = m\left(\dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z}\,\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right).$$

Die Gleichung (53,8) erhält jetzt die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1\,. \tag{53,9}$$

Wenn die Kraft, unter deren Wirkung die Bewegung stattfindet, nun das Potential $U(x, y, z)$ besitzt, so daß

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

dann kann der Ausdruck (53,3) für Q_1 auch so geschrieben werden:

$$Q_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Nun erhält die Gleichung (53,9) die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}. \tag{53,10}$$

Schließlich führen wir die neue Funktion L ein, die gleich der *Differenz* der kinetischen und der potentiellen Energie ist (und nicht mit der Gesamtenergie verwechselt werden darf, die gleich der Summe der kinetischen und potentiellen Energie ist!):

$$L = T - U. \tag{53,11}$$

Diese Funktion heißt die *Funktion von LAGRANGE oder das kinetische Potential.* Da die potentielle Energie nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ abhängt, ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, und die Gleichung (53,10) erhält die einfache Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \tag{53,12}$$

und ist die erste der LAGRANGEschen Gleichungen. Die beiden anderen erhalten wir in vollkommen analoger Weise:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0. \tag{53,12'}$$

Der Vorzug der LAGRANGEschen Gleichungen vor den NEWTONschen kommt mit besonderer Klarheit dann zum Ausdruck, wenn die Bewegung der Teilchen irgendwelchen Bedingungen unterliegt. In diesem Falle wird die Zahl der *unabhängigen,* die Konfiguration des Systems charakterisierenden Parameter nicht $3n$, sondern geringer als diese Zahl sein, und gerade so groß wie die Zahl der Freiheitsgrade des Systems (siehe § 52): $q_1, q_2, \ldots, q_f$, $f = 3n - k$. Ebensoviel LAGRANGEsche Gleichungen wird es geben. Handelt es sich beispielsweise um die Bewegung eines Teilchens auf einer gegebenen Oberfläche (eine Verknüpfungsgleichung), so genügen zwei LAGRANGEsche Gleichungen; zur Auffindung der Bewegung eines Teilchens auf einer gegebenen Kurve ist eine LAGRANGEsche Gleichung ausreichend.

§ 54. Die Anwendung der LAGRANGEschen Gleichungen auf die Zentralbewegung

Als Anwendungsbeispiel der LAGRANGEschen Gleichungen betrachten wir von neuem die Bewegung eines Elektrons im Felde eines positiv geladenen Kernes. Die Symmetrie der Aufgabe zeigt, daß hier die Polarkoordinaten r und φ am

günstigsten sein werden, die mit den kartesischen Koordinaten durch die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

verbunden sind. Die LAGRANGEschen Gleichungen ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$) lauten dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \tag{54,1}$$

Zur Aufsuchung der LAGRANGEschen Funktion für diesen Fall erinnern wir uns der Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie in Polarkoordinaten[1])

$$T = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2); \quad U = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Die LAGRANGEsche Funktion wird somit

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r\dot\varphi^2) + \frac{Ze^2}{r}. \tag{54,2}$$

Schreiben wir ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

und setzen diese in (54,1) ein, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(m\dot r) - mr\dot\varphi^2 + \frac{Ze^2}{r^2} = 0, \tag{54,3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0. \tag{54,4}$$

Die zweite Gleichung ergibt sofort

$$mr^2\dot\varphi = P, \tag{54,5}$$

worin P eine Integrationskonstante ist. Dies ist aber nichts anderes als das Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses. Die erste Gleichung schreiben wir um in die Form

$$m\ddot r = -\frac{Ze^2}{r^2} + mr\dot\varphi^2. \tag{54,6}$$

Sie beschreibt eine zusammengesetzte Bewegung durch den Radiusvektor, denn rechts ist eine Kraft dargestellt, die auf das Elektron entlang dem Radiusvektor wirkt. Ihr Ausdruck besteht aus zwei Gliedern: das erste stellt eine COULOMBsche Kraft dar; das Auftreten des zweiten erscheint auf den ersten Blick unerwartet, jedoch erweist sich das Glied $mr\dot\varphi^2$ bei näherer Betrachtung als einfache Zentrifugalkraft.

Nun können wir zur Integration der Gleichung (54,6) übergehen. Zu diesem Zwecke setzen wir den Ausdruck für $\dot\varphi$ aus (54,5)

$$\dot\varphi = \frac{P}{mr^2}$$

ein und teilen beide Seiten durch m:

$$\ddot r = -\frac{Ze^2}{mr^2} + \frac{P^2}{m^2r^3}.$$

---

[1]) Wollen wir die Eigenbewegung des Kernes berücksichtigen, so müssen wir in der Formel für die kinetische Energie an Stelle der Elektronenmasse die Masse des Elektrons und des Kernes einführen (§ 51).

Diese Gleichung kann in der Form

$$\ddot{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{2m^2r^2}\right) \tag{54,7}$$

dargestellt werden. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $2\dot{r}$, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\dot{r}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}\right),$$

woraus nach Integration

$$\dot{r}^2 = C' + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2} \tag{54,8}$$

folgt und C' eine Integrationskonstante ist. In dieser Gleichung ersetzen wir $\dot{r}$ durch

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi},$$

was nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + C$$

ergibt, wobei $C = \frac{C'\cdot m^2}{P^2}$; oder, wenn wir die neue Veränderliche $\varrho = \frac{1}{r}$ einführen,

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2}\varrho - \varrho^2 + C\,. \tag{54,9}$$

Die Gleichung (54,9) stimmt offensichtlich mit (49,7) überein und wird in derselben Weise integriert. Deshalb werden wir hier nicht die im § 49 ausgeführten Ausrechnungen wiederholen, die als Endergebnis zu den Gleichungen der Kegelschnitte führten.

Zum Schluß wollen wir noch eine nützliche qualitative Illustration für die Gleichung (54,6) geben. Hierzu bringen wir sie auf die Form (54,7), die wir in

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}\right) \tag{54,7'}$$

umschreiben. Diese Gleichung entspricht offenbar einer eindeutigen Bewegung in einem Feld mit dem Potential

$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}. \tag{54,10}$$

Hier stellt das erste Glied das Potential der COULOMBschen Kraft dar, während das zweite ein fiktives Potential ist, das durch die Anwesenheit der Zentrifugalkraft bedingt ist.

Zeichnen wir nun die Potentialkurve, indem wir r auf der Abszissenachse und U auf der Ordinatenachse auftragen. Diese Kurve muß dann die Form der in Abb. 103 dargestellten Kurve I haben.

Tatsächlich kann bei großen Werten von r das zweite Glied in (54,10) vernachlässigt werden, so daß U negativ ist. Für kleine r wird umgekehrt das zweite Glied dominieren, und die potentielle Energie wird positiv. Aus diesem Grunde wird die Kurve bei einem bestimmten Wert von r ein Minimum durchlaufen und bei weiterer Verminderung von r schnell nach oben steigen.

Diese Kurve zeigt augenfällig, warum bei positiver Gesamtenergie die Bahn hyperbolisch und bei negativer Energie elliptisch ist. Hierfür ist es am günstigsten, die Illustration mit der schweren Kugel zu benutzen (siehe S. 127). Ist die Kugel auf eine Höhe $E_1 > 0$ gehoben, dann wird sie in die „Mulde" *ABC* hineinfallen und dann ins Unendliche fortlaufen. Bei negativer Energie ($E_2 < 0$) wird

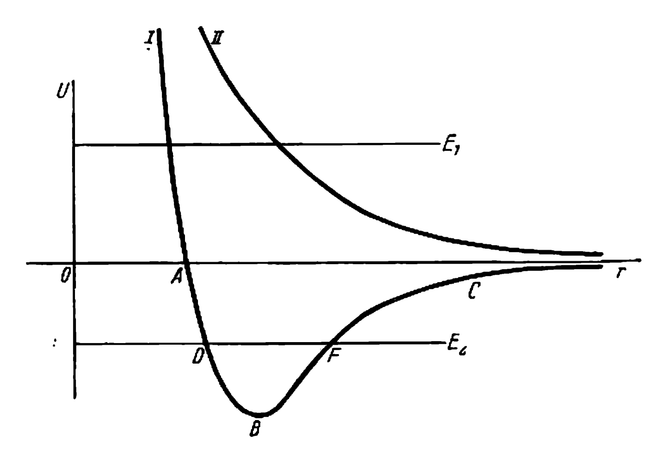


Abb. 103. Potentialkurve für die radiale Komponente

die Kugel umgekehrt in der Vertiefung *DBF* hin und herlaufen, während das ihr entsprechende Teilchen in endlicher Entfernung von dem Anziehungszentrum bleibt und eine ihr entsprechende Bewegung ausführt.

Findet keine Anziehung, sondern eine Abstoßung statt, dann ist das erste Glied in (54,10) positiv und somit die potentielle Energie bei beliebigem r positiv. Die Potentialkurve hat dann die Form der Kurve *II* in Abb. 103. In diesem Falle wird die auf eine beliebige Höhe gehobene Kugel ins Unendliche laufen.

§ 55. Der allgemeine Impuls

Die Lagrangeschen Gleichungen führen die Lösung der Aufgabe immer auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurück. In vielen Fällen ist es jedoch bequemer, an Stelle von Gleichungen zweiter Ordnung die doppelte Anzahl Gleichungen erster Ordnung zu benutzen. Um solche Gleichungen aufstellen zu können, muß vor allem der neue Begriff des *allgemeinen Impulses* eingeführt werden. Den allgemeinen Koordinaten kann jeweils ein ihnen entsprechender allgemeiner Impuls gegenübergestellt werden, der formal (im Geiste der Lagrangeschen Mechanik) als partielle Ableitung der Lagrangeschen Funktion nach der entsprechenden Geschwindigkeit bestimmt wird:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \qquad (55,1)$$

Für den Fall, daß die Kräfte ein Potential besitzen, das wohl von den Koordinaten, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängt, gilt $L = T - U(q_1, \ldots, q_k, \ldots)$ und

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{55,2}$$

Für einen in einem kartesischen Koordinatensystem aufgetragenen Punkt ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

hieraus folgen dann

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{55,3}$$

In diesem Falle erscheinen die allgemeinen Impulse einfach als die Projektionen des Impulses $m\mathfrak{v}$ auf die kartesischen Koordinatenachsen.

In anderen Koordinaten können die allgemeinen Impulse einen anderen Sinn und eine andere Dimension haben. Suchen wir beispielsweise die Impulse, die den Polarkoordinaten r und φ entsprechen. Die kinetische Energie in Polarkoordinaten ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);$$

die entsprechenden allgemeinen Impulse werden dann

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{55,4}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \tag{55,5}$$

Der radiale Impuls p_r hat die Dimension eines Impulses, während der azimutale Impuls p_φ die Dimension eines Drehimpulses besitzt.

Durch die Einführung des allgemeinen Impulsbegriffes bekommen die LAGRANGEschen Gleichungen eine neue Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{dL}{dq_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, f).$$

Ersetzt man darin nach der Definition (55,1) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ durch p_k, dann folgt

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, f). \tag{55,6}$$

Fügt man noch die Definition des allgemeinen Impulses

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, f) \tag{55,7}$$

hinzu, dann erhält man ein System von $2f$ Gleichungen *erster Ordnung*.

§ 56. Die HAMILTONschen kanonischen Gleichungen

Die Gleichungen (55,6) und (55,7), die am Ende des vorigen Paragraphen erhalten wurden, entsprechen unserem Wunsche, die Gleichungen zweiter Ordnung durch Gleichungen erster Ordnung zu ersetzen; sie sind jedoch sehr unsymmetrisch.

In der Praxis wird gewöhnlich eine andere Form von Gleichungen erster Ordnung benutzt, die sogenannten *Hamilton schen kanonischen Gleichungen*, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnen.

Der einfachste Fall ist der eines sich geradlinig bewegenden Teilchens. Die x-Achse kann als Bahn des Teilchens gewählt werden, womit die Lage des Teilchens durch die eine Koordinate $q = x$ bestimmt und der ihr entsprechende allgemeine Impuls durch $p = m\dot{x}$ gegeben ist [siehe (55,3)]. Neu führt man jetzt die Funktion H ein, die als *Summe der kinetischen und der potentiellen Energie* definiert wird, *wobei die kinetische Energie nicht durch die Geschwindigkeit, sondern durch den Impuls p ausgedrückt ist:*

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U. \tag{56,1}$$

Diese Funktion H ist mit der Lagrange schen Funktion L verknüpft, und die kinetische Energie kann in der Form

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(m\dot{x})^2}{2m} = \frac{1}{2}p\dot{x}$$

ausgedrückt werden. Es ist leicht nachzuprüfen, daß

$$p\dot{x} - L = p\dot{x} - T + U = p\dot{x} - \frac{1}{2}p\dot{x} + U = \frac{1}{2}p\dot{x} + U = T + U = H. \tag{56,2}$$

Bildet man auf beiden Seiten von (56,2) das vollständige Differential, dann wird

$$dH = p\,d\dot{x} + \dot{x}\,dp - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x}. \tag{56,3}$$

Aber nach (55,2) ist nun $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$, es hebt sich das erste Glied der rechten Seite von (56,3) gegen das vierte weg, und wir erhalten

$$dH = \dot{x}\,dp - \frac{\partial L}{\partial x}dx. \tag{56,4}$$

Schreiben wir nun das vollständige Differential von H und beachten, daß H eine Funktion von x und p, nicht aber von $\dot{x}$ ist:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial x}dx.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (56,4), so finden wir mit (55,6) $\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}$,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{56,5}$$

Diese beiden Gleichungen erster Ordnung erscheinen als *Hamilton sche kanonische Gleichungen* für den betrachteten einfachsten Fall. Es ist leicht zu sehen, daß die kanonischen Gleichungen (56,5) zu den bekannten Ergebnissen führen. Da $H = \frac{p^2}{2m} + U$, ist $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$, und die Gleichungen (56,5) ergeben

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Die erste dieser Beziehungen gibt $p = m\dot{x}$, d. h. die Bestimmung des Impulses, während die zweite die Newton sche Bewegungsgleichung für ein Teilchen darstellt, das sich auf der x-Achse bewegt.

Wir zeigen sofort, daß auch in dem allgemeinen Falle eines Systems mit f Freiheitsgraden die kanonischen Gleichungen dieselbe Form wie in (56,5) haben, die Anzahl der Gleichungen nur entsprechend größer ist. Die Konfiguration eines Systems werde durch die f allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_f$ bestimmt. Die LAGRANGEsche Funktion L hängt von den allgemeinen Koordinaten, den allgemeinen Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$ und auch von der Zeit ab:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

wobei mit q_k die Gesamtheit aller allgemeinen Koordinaten und mit $\dot{q}_k$ die Gesamtheit der allgemeinen Geschwindigkeiten bezeichnet wird. Von der LAGRANGEschen Funktion gehen wir jetzt zur HAMILTONschen Funktion H über, indem wir die auf f Freiheitsgrade ausgedehnte Transformation (56,2) benutzen:

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L. \tag{56,6}$$

Wir bilden von der rechten und linken Seite von (56,6) das vollständige Differential

$$dH = \sum p_k d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Da nach (55,7) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, so hebt sich das erste gegen das vierte Glied weg, und wir erhalten

$$dH = \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{56,7}$$

Andererseits muß das vollständige Differential von H als Funktion von q_k, p_k (nicht aber von $\dot{q}_k$) und t die Form

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

haben. Vergleichen wir sie mit (56,7) und bedenken, daß nach (55,6) $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt}$, dann erhalten wir

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, f). \tag{56,8}$$

Diese Differentialgleichungen erster Ordnung erscheinen als kanonische Gleichungen für ein System mit f Freiheitsgraden. Ihre Zahl ist gleich $2f$, d. h. doppelt so groß wie die Anzahl der Gleichungen zweiter Ordnung. Die allgemeine Koordinate q_k und der ihr entsprechende allgemeine Impuls p_k heißen *kanonisch-konjugierte* Größen.

Für ein System mit drei Freiheitsgraden (beispielsweise für einen Punkt, dessen Bewegung nicht durch Verknüpfungen begrenzt ist) gibt es im ganzen sechs kanonische Gleichungen. Da wir es hier mit sechs Gleichungen erster Ordnung zu tun haben, gehen in das Endresultat noch sechs willkürliche Konstanten ein. Kennen wir den Anfangszustand des Systems, d. h. die Gesamtheit der Werte q_k und p_k zur Zeit $t = 0$, und haben wir die Gleichungen (56,8) integriert, dann können wir seinen Zustand in einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt vorhersagen. Auf diese Weise erscheinen die HAMILTONschen kanonischen Gleichungen nach ihrer Form als der bestimmteste Ausdruck des klassischen Kausalitätsprinzips.

§ 57. Der physikalische Sinn der HAMILTONschen Funktion

Am Anfang des vorigen Paragraphen definierten wir für den Fall einer gleichförmigen in kartesischen Koordinaten aufgetragenen Bewegung die HAMILTONsche Funktion als Summe der kinetischen und potentiellen durch Koordinaten und Impulse ausgedrückten Energie. Hierauf zeigten wir, daß dies mit der Definition durch die LAGRANGEsche Funktion

$$H = \dot{x} p_x - L$$

identisch war, und wir erweiterten diese für f beliebige, allgemeine Koordinaten, indem wir

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{56,6}$$

annahmen. Erklären wir jetzt, welchen Sinn die HAMILTONschen Funktionen in diesem Falle haben.

Es zeigt sich, daß in allen Fällen, in denen die LAGRANGEsche Funktion, und damit auch die HAMILTONsche Funktion H, *nicht direkt von der Zeit abhängen*, H wie im einfachsten Falle die Summe der kinetischen und potentiellen Energie ist. Wir zeigen vor allem, daß H, wenn es nicht von der Zeit abhängt, gleich einer Konstanten ist:

$$H = H(q_k, p_k) = \text{const}.$$

Zum Beweis bilden wir von H die vollständige Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3}\dot{p}_3 + \cdots$$
$$= \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Setzen wir hier $\dot{q}_k$ und $\dot{p}_k$ aus (56,8) ein, dann erhalten wir

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{57,1}$$

woraus

$$H = \text{const} \tag{57,2}$$

folgt.

Nun wenden wir uns der Erklärung des physikalischen Sinnes von H zu. Nach Definition ist

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 + \cdots - L = \sum_k p_k\dot{q}_k - L. \tag{57,3}$$

Für ein konservatives System ist

$$L = T - U, \tag{57,4}$$

und da U nur von den Koordinaten abhängt, so ist

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57,5}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sum_k p_k\dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \tag{57,6}$$

und folglich

$$H = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \qquad (57,7)$$

Wir müssen jetzt bedenken, daß die kinetische Energie in beliebigen Koordinaten eine *homogene* Funktion *zweiter Ordnung* der Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ ist. Für kartesische und Polarkoordinaten haben wir uns davon unmittelbar in den §§ 42 und 47 überzeugt; für den allgemeinen Fall beliebiger allgemeiner Koordinaten können wir es ebenso zeigen. Nach dem Eulerschen Theorem von den homogenen Funktionen ist, wenn $f(x, y, \ldots, u, v)$ eine homogene Funktion n-ter Ordnung,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = n f. \qquad (57,8)$$

Wenden wir dieses Theorem auf die Summe (57,6) an, dann erhalten wir

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} + \cdots = 2T, \qquad (57,9)$$

und (57,7) ergibt

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - T + U = T + U. \qquad (57,10)$$

So ist dann für konservative Systeme H einfach die Summe der kinetischen und potentiellen Energie, die durch Koordinaten und Impulse ausgedrückt werden.

Führen wir einige Beispiele der Hamiltonschen Funktion an.

a) Ein Teilchen im Feld mit dem Potential U:

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

Nach § 55 ist $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$. Folglich

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z). \qquad (57,11)$$

b) Der lineare Oszillator: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2} f x^2$,

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} f x^2. \qquad (57,12)$$

c) Ein Elektron im Coulombschen Feld: $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$, $U = -\frac{Ze^2}{r}$;

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi},$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \qquad (57,13)$$

§ 58. Zyklische Koordinaten

Im allgemeinen Fall hängt die Hamiltonsche Funktion H von allen Koordinaten und Impulsen ab. Jedoch zeigt sich in einigen Sonderfällen, daß eine oder einige Koordinaten nicht in den Ausdruck von H eingehen. Solche Ko-

ordinaten werden *zyklische Koordinaten* genannt. Nehmen wir beispielsweise die HAMILTONsche Funktion für ein Elektron, das sich im COULOMBschen Kernfeld bewegt:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \tag{57,13}$$

Wir sehen hier, daß von den beiden Koordinaten r und φ nur r in den Ausdruck für H eingeht; folglich ist φ eine zyklische Koordinate.

Als zweites Beispiel betrachten wir die HAMILTONsche Funktion für die Bewegung eines Teilchens im Schwerefeld der Erde. Hier hängt die potentielle Energie nur von der Entfernung des Teilchens von der Erde ab: $U = mgz$. Folglich ist [siehe (57,11)]:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \tag{58,1}$$

Wie wir sehen, gehen die Koordinaten x und y nicht in den Ausdruck für H ein, sie erscheinen als zyklische Koordinaten.

Ist irgendeine der Koordinaten eine zyklische, dann muß der ihr entsprechende allgemeine Impuls konstant sein. Geht beispielsweise q_1 nicht in H ein:

$$H = H(q_2, q_3, \ldots, q_f;\ p_1, p_2, \ldots, p_f),$$

dann folgt aus den kanonischen Gleichungen (56,8) $\frac{dp_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ und damit $p_1 = \text{const}$. Wenn die Koordinate φ nicht in die HAMILTONsche Funktion (57,13) eingeht, wird

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \tag{58,2}$$

Gehen in die HAMILTONsche Funktion H die Koordinaten y und x nicht ein, dann ist infolgedessen

$$p_x = m\dot{x} = \text{const}, \quad p_y = m\dot{y} = \text{const}. \tag{58,3}$$

Besonders wichtig ist der Fall, in dem *alle* Koordinaten zyklisch sind. Wie wir sofort zeigen werden, sind in diesem Falle alle Impulse konstant, und alle Koordinaten sind lineare Funktionen der Zeit. Als einfachstes Beispiel eines solchen Falles kann der Rotator dienen, d. h. ein Teilchen, das sich um ein festes Zentrum im Kreise dreht. Die kinetische Energie eines solchen Teilchens ist bekanntlich

$$T = \frac{1}{2} A\dot{\varphi}^2, \tag{58,4}$$

mit $A = mr^2$; seine potentielle Energie ist gleich null. Der allgemeine, φ entsprechende Impuls wird

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \tag{58,5}$$

und folglich

$$T = \frac{1}{2} A\dot{\varphi}^2 = \frac{(A\dot{\varphi})^2}{2A} = \frac{p_\varphi^2}{2A}$$

und

$$H = T + U = \frac{p_\varphi^2}{2A}. \tag{58,6}$$

Da die einzige Koordinate zyklisch ist, wird $p_\varphi = \text{const}$ und nach den kanonischen Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{p_\varphi^2}{2A}\right) = \frac{p_\varphi}{A} = \text{const}.$$

Bezeichnen wir die Konstante mit ω, dann erhalten wir nach der Integration

$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

wo α die Integrationskonstante ist.

Hat ein System f Freiheitsgrade und sind alle Koordinaten zyklisch, so ist $H = H(p_1, p_2, \ldots, p_f)$, und für einen beliebigen Impuls p_k haben wir

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0.$$

Die kanonischen Gleichungen ergeben dann

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \text{const} = \omega_1,$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \text{const} = \omega_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_f}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_f} = \text{const} = \omega_f,$$

woraus

$$q_1 = \omega_1 t + \alpha_1, \quad q_2 = \omega_2 t + \alpha_2, \ldots, q_f = \omega_f t + \alpha_f$$

folgt.

Wir sehen, daß tatsächlich in dem Falle, in dem alle Koordinaten zyklisch sind, alle Impulse Konstanten und die Koordinaten lineare Funktionen der Zeit sind.

§ 59. Die POISSONsche Klammer. Die Erhaltungssätze

Nehmen wir irgendeine Funktion der Koordinaten, der Impulse und der Zeit an: $F(q_k, p_k, t)$, worin q_k und p_k wieder die Gesamtheit der Koordinaten und Impulse darstellen. Wir bilden die vollständige Ableitung von F nach der Zeit:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \cdots$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right).$$

Ersetzen wir auf der rechten Seite die Ableitungen der Koordinaten und Impulse nach der Zeit durch die Ableitungen von H aus den kanonischen Gleichungen $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, dann erhalten wir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right).$$

Das zweite Glied der rechten Seite wird die POISSONsche Klammer genannt und mit (H, F) bezeichnet:

$$(H,F) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, f. \tag{59,1}$$

Somit können wir von einer jeden Funktion $F\,(q_k, p_k, t)$ die vollständige Ableitung nach der Zeit in der Form

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (H, F) \tag{59,2}$$

schreiben.

Hängt F nicht von der Zeit ab, so ist $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ und

$$\frac{dF}{dt} = (H, F)\,. \tag{59,3}$$

Wir können also sagen, daß die POISSONschen Klammern für jede Funktion $F\,(q_k, p_k)$ die vollständige Ableitung nach der Zeit ergeben. Benutzen wir diesen Hinweis, dann können wir die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{dH}{dq_k}$$

mit Hilfe der POISSONschen Klammer in einer neuen Form darstellen.

Nach (59,3) haben wir

$$\frac{dq_k}{dt} = (H, q_k)\,, \quad \frac{dp_k}{dt} = (H, p_k)\,. \tag{59,4}$$

Ermitteln wir jetzt die Klammern (H, q_k) und (H, p_k):

$$(H, q_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,,$$

$$(H, p_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\,.$$

Wir sehen, daß die Gleichungen (59,4) tatsächlich mit den kanonischen Gleichungen übereinstimmen.

Sind für $F\,(q_k, p_k)$ die POISSONschen Klammern gleich null,

$$(H, F) = 0\,, \tag{59,4'}$$

so ist

$$\frac{dF}{dt} = 0\,, \quad F\,(q_k, p_k) = \text{const}\,.$$

Dies können wir für die Aufstellung der Erhaltungssätze oder der ersten Integrale der Bewegungsgleichungen benutzen, worunter wir solche Beziehungen zwischen den Koordinaten und ihren *ersten* Ableitungen nach der Zeit verstehen, die bei beliebigen Anfangsbedingungen ihren Wert während der Bewegung beibehalten. Nehmen wir beispielsweise die Klammer (H, H):

$$(H, H) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right) = 0\,,$$

woraus

$$H = \text{const}$$

folgt, oder ausgeschrieben

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U\,(x, y, z) = \text{const}\,. \tag{59,5}$$

Diese Beziehung, die das Gesetz von der Energieerhaltung ausdrückt, ist eines der ersten Integrale der Bewegung, und gerade das Energieintegral. Wir

bemerken hier noch, daß wir bei der Aufstellung der Ableitung $\frac{dH}{dt}$ im § 57 bereits als Spezialfall die POISSONsche Klammer [siehe (57,1)] benutzt haben.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens im Feld einer Zentralkraft. Bilden wir die POISSONsche Klammer (H, L_z), wobei L_z der Drehimpuls in bezug auf die z-Achse ist:

$$L_z = xp_y - yp_x. \tag{59,6}$$

Die gesuchte POISSONsche Klammer wird nach (59,1) sein:

$$(H, L_z) = \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}.$$

Beachten wir (59,5) und (59,6), so erhalten wir

$$(H, L_z) = y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Für die Berechnung der rechten Seite gehen wir zu Polarkoordinaten über und benutzen die Formeln

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Bedenken wir, daß

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial y} = x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x},$$

so erhalten wir

$$(H, L_z) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Da aber im Falle einer Zentralkraft die potentielle Energie nicht von φ, sondern nur von r abhängt, ist

$$(H, L_z) = 0 \quad \text{und} \quad L_z = \text{const}.$$

Zur Übung kann mit Hilfe der POISSONschen Klammer bewiesen werden, daß $L_x = \text{const}$ und $L_y = \text{const}$ sind. Wir erhalten drei Erhaltungssätze für die Komponenten des Drehimpulses.

Die Gesetze der Erhaltung des gesamten Drehimpulses gelten auch für ein isoliertes System von Teilchen. In diesem Falle ist

$$L_z = \sum_k (x_k p_{yk} - y_k p_{xk}),$$

wo die Summierung über alle Teilchen ausgedehnt ist. Die Ausrechnung, die der für ein Teilchen analog ist, ergibt

$$\frac{dL_z}{dt} = (H, L_z) = \sum_k \frac{1}{m}(p_{yk}p_{xk} - p_{xk}p_{yk}) + \sum_k \left(y_k\frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial U}{\partial y_k}\right).$$

In der ersten Summe kürzen sich alle Glieder paarweise, und die zweite ergibt beim Übergang zu Polarkoordinaten $x_k = r_k\cos\varphi_k$, $y_k = r_k\sin\varphi_k$

$$\frac{dL_z}{dt} = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}.$$

Da sich aber bei einem abgeschlossenen konservativen System die potentielle Energie bei einer Drehung des ganzen Systems um ein und denselben Winkel nicht ändert, ist

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad L_z = \text{const}.$$

Bei analoger Annahme können wir beweisen, daß für ein isoliertes System von k Teilchen die Erhaltungsgesetze der Komponenten P_x, P_y, P_z des Gesamtimpulses gelten, wobei

$$P_x = \sum_k p_{xk}, \quad P_y = \sum_k p_{yk}, \quad P_z = \sum_k p_{zk}.$$

Tatsächlich ist

$$\frac{dP_x}{dt} = (H, P_x) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_{xk}} \frac{\partial P_x}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial P_x}{\partial p_{xk}}\right) = -\sum_k \frac{\partial H}{\partial x_k} = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

Die Summierung erstreckt sich über alle Teilchen. Weil aber die potentielle Energie eines Systems von Teilchen nur von den gegenseitigen Abständen abhängt und sich nicht ändert, wenn sie um die gleiche Entfernung auf der x-Achse verschoben werden, so ist $\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$ und $P_x = \text{const}$. Analog ist zu zeigen, daß

$$P_y = \text{const}, \quad P_z = \text{const}.$$

Wenn wir noch das Gesetz der Energieerhaltung (59,5) hinzufügen, dann erhalten wir sieben Gesetze der Erhaltung oder erste Integrale der Bewegungsgleichung.

Die Poissonsche Klammer kann nicht nur für die Funktionspaare H und F bestimmt werden, sondern auch für beliebige Funktionspaare f und g der Koordinaten und Impulse. In diesem Falle lautet die Definition:

$$(f, g) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{59,7}$$

Ist $f = p$ und $g = q$, dann ist offenbar

$$(p, q) = \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 1; \tag{59,8}$$

für $f = q$ und $g = q$ ist

$$(q, q) = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 0. \tag{59,9}$$

Genauso erhalten wir auch $(p, p) = 0$. Die Tatsache, daß für ein Paar kanonisch-konjugierter Koordinaten und Impulse die Poissonsche Klammer gleich 1 ist, kann als Definition kanonisch-konjugierter Größen betrachtet werden: zwei Größen p_k und q_k nennen wir kanonisch-konjugiert, wenn

$$(q_k, q_k) = 0, \quad (p_k, p_k) = 0, \quad (p_k, q_k) = 1.$$

§ 60. Die Bewegung in gekoppelten elektrisch-magnetischen Feldern

In den vorigen Paragraphen dieses Abschnittes interessierten uns ausschließlich Fälle, bei denen die Bewegung in einem Potentialfeld stattfindet, in einem Feld also, in dem die auf das Teilchen wirkende Kraft als Gradient irgendeiner

skalaren Funktion φ dargestellt werden kann, zum Beispiel in einem konstanten elektrostatischen Feld. Die Arbeit bei der Verschiebung eines geladenen Teilchens in einem solchen Feld hängt nicht vom Weg, sondern nur von der Lage der Anfangs- und Endpunkte ab.

Als wichtiger Fall erscheint die Bewegung unter der Wirkung eines elektromagnetischen Feldes. Die in einem solchen Felde auf das geladene Teilchen wirkende Kraft wird bekanntlich durch die LORENTZsche Formel

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

ausgedrückt. Das zweite Glied dieser Formel kennzeichnet die von seiten des magnetischen Feldes wirkende Kraft. Wie bereits gezeigt wurde, leistet die Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

keine Arbeit, da sie senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Daß das magnetische Feld keine Quellen besitzt, ist eine seiner wichtigsten Eigenschaften. Diese Tatsache drückt sich durch die Bedingung

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$$

aus, und die Feldstärke des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ kann als Rotation eines Vektors $\mathfrak{A}$, der Vektorpotential genannt wird, dargestellt werden:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

In der Vektoranalysis besteht für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ die Identität: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0$; deshalb ist $\operatorname{div}\mathfrak{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$, d. h., die gezeigte Bedingung ist erfüllt.

Ein allgemeinerer Fall ist das mit der Zeit veränderliche elektromagnetische Feld. Für die Berechnung eines solchen Feldes werden in der Elektrodynamik die sogenannten elektrodynamischen Potentiale, der Skalar φ und der Vektor $\mathfrak{A}$ und die elektrischen und magnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ eingeführt, die nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \\ \mathfrak{H} &= \operatorname{rot}\mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \tag{60,1}$$

auszurechnen und deren Komponenten zu

$$\left.\begin{aligned} |\mathfrak{E}_x| &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}, & |\mathfrak{H}_x| &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ |\mathfrak{E}_y| &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}, & |\mathfrak{H}_y| &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ |\mathfrak{E}_z| &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, & |\mathfrak{H}_z| &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{60,2}$$

gegeben sind.

Es ist noch festzustellen, daß das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ nicht eindeutig bestimmt ist. Da für eine beliebige skalare Funktion f die Beziehung rot grad $f = 0$ gilt, so kann grad f zu $\mathfrak{A}$ hinzugefügt werden, wobei nach der zweiten der Formeln (60,1)[1]) gilt:

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \mathfrak{H}.$$

Diese Eigenschaft des Vektorpotentials müssen wir im weiteren benutzen (siehe Band II, § 195).

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen eines Teilchens mit der Masse m und der positiven Ladung e im elektromagnetischen Feld lauten:

$$m\ddot{x} = e\,|\mathfrak{E}_x| + \frac{e}{c}\,|[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]_x| \equiv e\,|\mathfrak{E}_x| + \frac{e}{c}(\dot{y}\,|\mathfrak{H}_z| - \dot{z}\,|\mathfrak{H}_y|), \tag{60,3}$$

hierzu kommen noch die beiden analogen Gleichungen für die y- und z-Achsen. Wir wollen zeigen, daß diese Gleichungen aus der Lagrangeschen Gleichung

$$L = T - e\varphi + \frac{e}{c}\,\mathfrak{v}\mathfrak{A} \tag{60,4}$$

erhalten werden können; (60,4) lautet in kartesischen Koordinaten in ausgeschriebener Form

$$L = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c}\,(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \tag{60,5}$$

Zum Beweis suchen wir zuerst die den Koordinaten x, y, z entsprechenden allgemeinen Impulse. Nach Definition ist $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ usw., und es ergibt sich bei Benutzung der Funktion L (60,5)

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x, \quad p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c}A_y, \quad p_z = m\dot{z} + \frac{e}{c}A_z \tag{60,6}$$

oder in vektorieller Form

$$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}. \tag{60,7}$$

Wir sehen, daß die allgemeinen Impulse p_x, p_y, p_z nicht einfach den Komponenten des Impulses $m\dot{x}$ gleich sind, sondern noch zusätzliche Summanden $\frac{e}{c}A_x$ usw. enthalten; sie werden manchmal kinetische Impulse genannt. Der *Impuls* $m\mathfrak{v}$ eines Teilchens wird durch den kinetischen Impuls mittels der aus (60,7) zu erhaltenden Formel

$$m\mathfrak{v} = \mathfrak{p} - \frac{e}{c}\,\mathfrak{A} \tag{60,8}$$

[1]) Hängt der Skalar f von der Zeit ab, so ändert sich beim Ersetzen des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \operatorname{grad} f$ die Feldstärke $\mathfrak{E}$ ebenfalls, wie aus der ersten Formel (60,2) folgt. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ bleibt nur in dem Falle unverändert, wo gleichzeitig mit dem Ersatz von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}'$ das skalare Potential φ durch φ' nach der Formel $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ ersetzt wird.

Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man in die erste Formel (60,2) φ' an Stelle von φ und $\mathfrak{A}'$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ setzt. Die Unveränderlichkeit des Feldes bei der Transformation von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$ und φ in φ' wird Gradienten-Invarianz genannt.

ausgedrückt, woraus unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m}\left(p_x - \frac{e}{c} A_x\right), \\ \dot{y} &= \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{e}{c} A_y\right), \\ \dot{z} &= \frac{1}{m}\left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right) \end{aligned}\right\} \tag{60,9}$$

folgt. Betrachten wir jetzt die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, f,$$

setzen $q_1 = x$ und bedenken, daß $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x$, dann erhalten wir

$$\frac{dp_x}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{60,10}$$

Für die Berechnung der Ableitung von p_x benutzen wir die erste der Formeln (60,6)

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}.$$

Bei der Ausrechnung von $\frac{dA_x}{dt}$ muß die *vollständige* Ableitung oder die Ableitung längs der Bahn des sich bewegenden Teilchens genommen werden[1]):

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z};$$

denn die vollständige Ableitung nach t charakterisiert die Änderung $\mathfrak{A}$ für ein gegebenes Teilchen, während die partielle Ableitung die Änderung in einem gegebenen Punkt kennzeichnet. Beachten wir dies, dann erhalten wir

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right). \tag{60,11}$$

Differenzieren wir (60,5) nach x, so finden wir

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \tag{60,12}$$

Setzen wir (60,11) und (60,12) in (60,10) ein, dann ergibt sich

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right\}.$$

Berücksichtigen wir (60,2), dann haben wir offenbar

$$-e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = e|\mathfrak{E}_x|,$$

$$\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \dot{y}\,|\mathrm{rot}_z\mathfrak{A}| - \dot{z}\,|\mathrm{rot}_y\mathfrak{A}| = \dot{y}\,|\mathfrak{H}_z| - \dot{z}\,|\mathfrak{H}_y| = |[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]_x|$$

und erhalten

$$m\ddot{x} = e|\mathfrak{E}_x| + \frac{e}{c}|[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]_x|.$$

Dies ist aber die Ausgangsgleichung (60,3).

[1]) Siehe N. J. KOTSCHIN, Vektorrechnung und der Anfang der Tensorrechnung, S. 152ff., Moskau, 1939.

Die HAMILTONsche Funktion lautet nach der allgemeinen Definition

$$H = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y + \dot{z} p_z - L. \tag{60,13}$$

Wenn wir hier an Stelle von p_x, p_y, p_z die Ausdrücke für die *kinetischen* Impulse (60,6) und die LAGRANGEsche Funktion (60,4) einsetzen, dann erhalten wir

$$H = \dot{x}\left(m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x\right) + \dot{y}\left(m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y\right) + \dot{z}\left(m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z\right)$$
$$- \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi - \frac{e}{c} (\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z).$$

Führen wir einfache algebraische Umformungen und Vereinfachungen durch, dann sehen wir, daß sich die Glieder, die die Komponenten des Vektorpotentials enthalten, wegheben, und das Ergebnis lautet

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + e\varphi .$$

Wie früher erscheint H als Summe der kinetischen und potentiellen Energie, und irgendwelche, dem magnetischen Feld entsprechende Glieder sind nicht vorhanden. Dies war zu erwarten, da die LORENTZkraft keinerlei Arbeit leistet.

Wir wollen jetzt die HAMILTONsche Funktion durch die Koordinaten und die ihnen entsprechenden allgemeinen Impulse ausdrücken. Hierfür müssen wir in (60,13) und auch in dem Ausdruck für die LAGRANGEsche Funktion (60,5) die $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ nach der Formel (60,9) durch p_x, p_y, p_z ersetzen. Bilden wir zuerst die LAGRANGEsche Funktion

$$L = \frac{1}{2} m\mathfrak{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \mathfrak{v}\mathfrak{A} = \frac{1}{2m}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 - e\varphi + \frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathfrak{A}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)$$

um, worin unter $\mathfrak{p}$ der kinetische Impuls zu verstehen ist. Die HAMILTONsche Funktion schreiben wir zur Abkürzung auch in vektorieller Form

$$H = \frac{1}{m}\mathfrak{p}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + e\varphi - \frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathfrak{A}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right).$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß das erste und das letzte Glied zusammen $\frac{1}{m}(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A})^2$ ergeben. So ist beispielsweise

$$p_x\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right) - \frac{e}{c}A_x\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right) = p_x^2 - 2\frac{e}{c}p_x A_x + \frac{e^2}{c^2}A_x^2 = \left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2.$$

Dann erhalten wir nach Umformung

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + e\varphi$$
$$= \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2\right] + e\varphi \tag{60,14}$$

für die gesuchte HAMILTONsche Funktion.

Vergleichen wir (60,14) mit dem Ausdruck für die HAMILTONsche Funktion im Fall des elektrostatischen Feldes

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + e\varphi, \tag{60,15}$$

wobei durch P_x, P_y, P_z die Komponenten des Impulses ($P = m\dot{x}$ usw.) bezeichnet werden, dann sehen wir, daß der Übergang zum gekoppelten elektrisch-magnetischen Feld mit Hilfe einer einfachen Annahme verwirklicht werden kann: es ist nur notwendig, in (60,15) die Komponenten der gewöhnlichen Impulse P_x, P_y, P_z durch die entsprechenden Komponenten des kinetischen Impulses [siehe (60,8)] zu ersetzen:

$$P_x = p_x - \frac{e}{c} A_x \text{ usw.}$$

§ 61. Die Mechanik schnell bewegter Teilchen

In den Fällen, in denen die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum vergleichbar ist, werden die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik ungenau, und es sind die Gesetze der Relativitätstheorie zu benutzen. Wie bereits in § 42 gezeigt wurde, bleibt das Grundgesetz der klassischen Mechanik

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{F} \tag{42,2}$$

auch hier gültig, in dem Ausdruck des Impulses

$$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}$$

muß jedoch die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit nach der Formel[1])

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{61,1}$$

berücksichtigt werden. Nehmen wir an, daß die Kraft längs der x-Achse wirkt und das Potential U besitzt, so daß $F = -\frac{dU}{dx}$ gilt. Dann ergibt (42,2)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dU}{dx}. \tag{61,2}$$

Wir wollen nun die linke Seite ausrechnen und hierbei die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigen. Da die Masse in dem Ausdruck $p = mv$ unter dieser Bedingung schon nicht mehr konstant sein wird, ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}.$$

Setzen wir dies in (61,2) ein und multiplizieren beide Seiten mit $\frac{dx}{dt}$, dann erhalten wir

$$m\frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + v\frac{dm}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{61,3}$$

Aus (61,1) finden wir

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 \frac{v}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{61,4}$$

[1]) Den Beweis siehe im Anhang II am Ende des Buches.

Dies in (61,3) eingesetzt, ergibt nach kurzer Ausrechnung

$$\frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dt}. \tag{61,5}$$

Durch unmittelbare Prüfung können wir uns leicht davon überzeugen, daß

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{61,6}$$

Die Formel (61,5) kann jetzt in die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U\right) = 0$$

umgeschrieben werden.

Bedenken wir endlich, daß $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ die Masse m des sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Teilchens ist, dann finden wir

$$\frac{d}{dt}(mc^2 + U) = 0,$$

woraus

$$mc^2 + U = \text{const} \tag{61,7}$$

folgt. Diese Beziehung drückt das Gesetz der Energieerhaltung aus. Aus ihr ist ersichtlich, daß mc^2 die Rolle der kinetischen Energie spielt. Entwickeln wir $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ in eine binomische Reihe, so erhalten wir

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right).$$

In der sogenannten „nichtrelativistischen Näherung", bei der $v \ll c$ ist, kann bereits das dritte Glied der Entwicklung vernachlässigt werden, und wir finden

$$mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2. \tag{61,7'}$$

Das zweite Glied rechts ist der gewöhnliche Ausdruck für die kinetische Energie der Newtonschen Mechanik. Wächst die Geschwindigkeit des Teilchens von null bis v, so wird im Falle von $v \ll c$ das Teilchen die kinetische Energie

$$mc^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

haben. Dabei enthält die Gesamtenergie, die in den Ausdruck für den Erhaltungssatz (61,7) eingeht, das konstante Glied $m_0 c^2$, dem eine gewaltige Energie entspricht (weil $c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ cm^{2}s^{-2} ist), mit der verglichen die gewöhnliche Energie eine sehr kleine Größe ist.

Die sich aus der Formel (61,7) ergebende Beziehung zwischen der Masse und der Energie

$$E = mc^2$$

spielt in der modernen Atomphysik eine außerordentlich wichtige Rolle, wie wir besonders in dem den Atomkern betreffenden Abschnitt sehen werden.

Multiplizieren wir die vektorielle Bewegungsgleichung (42,2) *vektoriell* von links mit $\mathfrak{r}$, dann erhalten wir

$$[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{p}}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]. \tag{61,8}$$

Da aber

$$[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{p}}] = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{p}]$$

(siehe § 48), so kann (61,8) in der Form

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}m\mathfrak{v}] = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{F}] \tag{61,9}$$

geschrieben werden. Für eine Zentralbewegung ist das Drehmoment $[\mathfrak{r}\mathfrak{F}]$ in bezug auf den Punkt O gleich null, und das Vektorprodukt $[\mathfrak{r}\mathfrak{p}]$ ist der Drehimpuls L in bezug auf denselben Punkt. (61,9) ergibt auf diese Weise

$$|L| = \text{const}. \tag{61,10}$$

Dies besagt, daß auch im Falle einer relativistischen Bewegung der Drehimpuls erhalten bleibt. Da jedoch in dem gegebenen Falle die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit nicht vernachlässigt werden kann, darf auch in (61,9) bei der Berechnung der zeitlichen Ableitung m nicht als konstant angenommen werden. Daher folgt hier im Unterschied zu langsamen Geschwindigkeiten (siehe § 48) aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{r}m\mathfrak{v}] = 0$$

nicht die Konstanz der Flächengeschwindigkeit.

Suchen wir noch die für uns im weiteren notwendige Beziehung zwischen der Energie und dem Impuls für die relativistische Bewegung. Da

$$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v} = \frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{61,11}$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$, ergibt sich

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m_0^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 v^2}{1-\beta^2} = m_0^2 c^2 \cdot \frac{v^2/c^2}{1-\beta^2} = m_0^2 c^2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2}.$$

Benutzen wir die Identität

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - 1,$$

dann erhalten wir

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2} - m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2$$

oder

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 = c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m_0^2 c^4. \tag{61,12}$$

Dies aber ist die gesuchte Beziehung.

Aus (61,11) finden wir auch

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2}. \tag{61,13}$$

Alle gefundenen Beziehungen können auch aus der relativistischen LAGRANGEschen Funktion erhalten werden, für die

$$L = T^* - U \tag{61,14}$$

genommen wird, worin

$$T^* = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

ist. Offensichtlich unterscheidet sich T^* von der kinetischen Energie

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Für kleine Geschwindigkeiten $\frac{v}{c} \ll 1$ finden wir

$$T^* = m_0 c^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right) \approx \frac{1}{2} m v^2.$$

Laut Definition des allgemeinen Impulses finden wir aus der LAGRANGEschen Funktion (61,14)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial T^*}{\partial v_x} = \frac{\partial T^*}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial v_x} = m_0 c^2 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v_x}. \tag{61,15}$$

Bedenken wir, daß

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2},$$

dann finden wir

$$\beta \frac{\partial \beta}{\partial v_x} = \frac{v_x}{c^2}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\beta c^2}.$$

Setzen wir dies in (61,15) ein, dann erhalten wir

$$p_x = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_x}{c^2} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

und auf dieselbe Weise

$$p_y = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_y}{c^2} = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$p_z = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_z}{c^2} = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese Formeln können jedoch auch in der Form

$$p_x = E\frac{v_x}{c^2}, \quad p_y = E\frac{v_y}{c^2}, \quad p_z = E\frac{v_z}{c^2}$$

geschrieben werden. Nach Quadrierung und Summierung erhalten wir

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = E^2 \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^4} \tag{61,16}$$

oder

$$p^2 = E^2 \frac{v^2}{c^4}, \tag{61,17}$$

woraus

$$p = E\frac{v}{c^2}$$

folgt. Das Minuszeichen auf der rechten Seite haben wir weggelassen, da eine negative Gesamtenergie in der klassischen Physik keinen Sinn hat (siehe jedoch Band II, § 202).

Die Formel (61,17) kann auch in der Form

$$p^2 = E^2\frac{\beta^2}{c^2}$$

oder

$$c^2p^2 = m_0^2c^4\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = m_0^2c^4\left(\frac{1}{1-\beta^2}-1\right) = E^2 - m_0^2c^4$$

geschrieben werden, woraus

$$E^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2$$

folgt. Nach der allgemeinen Definition (56,6) lautet die HAMILTONsche Funktion

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L, \quad \text{also}$$

$$H = \frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) + U = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) + U = T + U,$$

in der relativistischen wie auch in der NEWTONschen Mechanik gilt also

$$H = T + U.$$

B. DIE KLASSISCHE THEORIE DER ELEKTROMAGNETISCHEN STRAHLUNG

§ 62. Die Elementarzentren der Lichtausstrahlung

Das Problem der Lichtausstrahlung nimmt in der Theorie des Atombaues einen zentralen Platz ein, da uns gerade das Licht die meisten Aufschlüsse über den inneren Aufbau des Atoms liefert. Der Betrachtung dieses Problems, das uns fast das ganze Buch hindurch beschäftigen wird, schicken wir nun einen kurzen Überblick über einige Fragen der klassischen Theorie der elektrodynamischen Strahlung voraus, deren Kenntnis für das Verständnis der modernen Vorstellungen notwendig ist.

Nach der Entdeckung der Elektronen wurde es klar, daß die Aussendung des Lichtes mit ihren Bewegungen zusammenhängt. Besonders überzeugend erwies sich der von ZEEMAN im Jahre 1896 entdeckte Einfluß des magnetischen Feldes auf die Ausstrahlung des Lichtes (ZEEMAN-Effekt). Die von LORENTZ aufgestellte Theorie dieser Erscheinung erlaubt die Berechnung der Größe e/m für die Elementarzentren der Strahlung und zeigte, daß sie befriedigend gut mit der Größe der spezifischen Ladung für freie Elektronen übereinstimmt.

Wir wollen nun den Mechanismus der Lichtausstrahlung nach der klassischen Physik betrachten. Trotz der allgemeinen Schwäche des Atommodells zeigte sich die Möglichkeit, einen großen Kreis von optischen Erscheinungen befriedigend durch die Vorstellung der Elektronen als elementare Oszillatoren, die elektromagnetische Wellen aussenden, zu erklären. Als einfachstes Modell des Elementar-

zentrums, das in vieler Hinsicht für die Erklärung einer Reihe von Tatsachen der Lichtausstrahlung geeignet ist, kann der lineare Oszillator dienen, mit dessen mechanischen Eigenschaften wir uns im § 44 bekannt machten.

§ 63. Die elektromagnetische Strahlung des linearen Oszillators

Stellen wir uns vor, daß eine positive Ladung mit einer so großen Masse verknüpft ist, daß sie als starr betrachtet werden kann, und daß eine negative Ladung, die der absoluten Größe nach der positiven gleich ist, um diese unbewegliche positive Ladung Schwingungen ausführt. Ein solches System stellt einen linearen Oszillator dar. Vom elektrischen Gesichtspunkt erscheint dieses System als Dipol. Die elektrischen Eigenschaften werden durch eine Größe charakterisiert, die *Dipolmoment* genannt wird. Das Dipolmoment ist ein Vektor und gleich

$$\mathfrak{p} = e\mathfrak{r}\,, \tag{63,1}$$

wo $\mathfrak{r}$ der von der negativen zur positiven Ladung gerichtete Radiusvektor ist. Da das Dipolmoment nicht von der Wahl der Anfangskoordinaten abhängt[1], ist es immer am günstigsten, die positive Ladung in den Koordinatenursprung zu legen; dann sind die Komponenten von $\mathfrak{p}$

$$p_x = ex, \quad p_y = ey, \quad p_z = ez. \tag{63,2}$$

Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes eines schwingenden Dipoles kann mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen durchgeführt werden.

Um hier nicht die ziemlich lange und ermüdende Ausrechnung zu wiederholen, bringen wir kurz ihr Ergebnis.[2] Die elektrischen und magnetischen Felder des schwingenden Dipols werden in einer von ihm *genügend großen Entfernung* (der sogenannten Wellenzone) durch die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ charakterisiert, die der absoluten Größe nach gleich und senkrecht zueinander gerichtet sind. Für den Fall, daß die Geschwindigkeit klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit ist ($v \ll c$), werden die absoluten Werte der Feldstärken $|\mathfrak{E}|$ und $|\mathfrak{H}|$ in dem Punkt M mit der Entfernung R durch die Formel[3])

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{|\ddot{\mathfrak{p}}|\left(t - \frac{R}{c}\right)}{c^2 R} \sin\vartheta \tag{63,3}$$

gegeben. Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und ϑ der Winkel zwischen der Geraden, in welcher die Schwingungen stattfinden, und der Richtung zum Punkt M. Das Symbol $|\ddot{\mathfrak{p}}|\left(t - \frac{R}{c}\right)$ hat folgenden Sinn: diese zweite Ableitung des Dipolmomentes ist nicht mit der Zeit t, sondern mit dem früheren Zeitpunkt $t - \frac{R}{c}$ verknüpft. Offensichtlich ist $\frac{R}{c}$ die Zeit, die von dem sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitenden Prozeß benötigt wird, um von O zum Beobachtungspunkt M zu gelangen. Das Auftreten des Verzögerungsfaktors $|\ddot{\mathfrak{p}}|\left(t - \frac{R}{c}\right)$ in der Formel (63,3) weist auf eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes hin: der schwin-

---

[1]) Siehe TAMM, „Grundlagen der Theorie der Elektrizität", Seite 96.

[2]) Siehe TAMM, „Grundlagen der Theorie der Elektrizität", § 99, oder FRENKEL, „Elektrodynamik", Band I, Seite 154, ONTI 1934.

[3]) Die Klammer in der Formel (63,3) weist darauf hin, daß $\ddot{\mathfrak{p}}$ eine Funktion von $t - R/c$ ist.

gende elektrische Dipol sendet elektromagnetische Wellen aus, die sich mit der Geschwindigkeit c verschieben. Bedenken wir, daß $\ddot{\mathfrak{p}} = e\ddot{\mathfrak{r}}$, dann sehen wir, daß bei sonst gleichen Bedingungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in großen Entfernungen von O von der *Beschleunigung* $\ddot{\mathfrak{r}}$ des Elektrons abhängen.

Die Richtungen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ werden auf folgende Weise bestimmt: Stellen wir uns eine Kugeloberfläche vor, die durch den Radius R von dem Punkt O gegeben wird. Nehmen wir die Richtung, in der die Schwingungen des Dipoles stattfinden, als Polarachse an und zeichnen auf die Oberfläche die Meridiane und Breitenkreise, dann wird der Vektor $\mathfrak{E}$ in der Tangente zu dem durch den Punkt M hindurchgehenden Meridian liegen und der Vektor $\mathfrak{H}$ in der Tangente zu dem durch denselben Punkt hindurchgehenden Breitenkreis (Abb. 104).

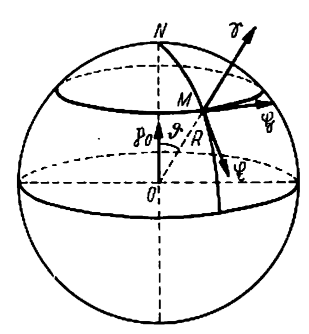


Abb. 104. Strahlung eines Dipols

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist gleich

$$\varrho = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$$

oder, wenn wir bedenken, daß in dem gegebenen Falle $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ ist,

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2 \ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\,. \qquad (63{,}4)$$

Da sich das Feld des schwingenden Dipoles mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, wird in jeder Sekunde durch jeden Quadratzentimeter in Richtung der Normalen R (Abb. 104) ein Energiestrom S hindurchgehen, der gleich

$$S = \varrho c = c\,\frac{\mathfrak{E}^2}{4\pi}\ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}} \qquad (63{,}5)$$

ist.

Die Größe S ist offenbar nichts anderes als der Absolutbetrag des durch den Punkt hindurchgehenden Energiestromes. Sie kann ebenso wie der Betrag des Poyntingschen Vektors $\mathfrak{S}$ in einem gegebenen Punkt berechnet werden:

$$S = |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\,|[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]| = \frac{c}{4\pi}\,|\mathfrak{E}|\,|\mathfrak{H}|\,\sin(\mathfrak{E}\mathfrak{H})\,.$$

In der Wellenzone ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$, was sofort

$$S = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E}^2$$

ergibt, d. h. die Formel (63,5).

Setzen wir hier den Wert $\mathfrak{E}$ aus (63,3) ein, dann erhalten wir

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta = \frac{e^2\ddot{r}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta. \qquad (63{,}6)$$

Die Werte $\ddot{p}$ und $\ddot{r}$ beziehen sich auf den Zeitpunkt $t - \frac{R}{c}$.

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß die Intensität der Strahlung dem Quadrat der Beschleunigung direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt pro-

portional ist. Das war auch zu erwarten, da der gesamte Energiestrom durch die Fläche um O konstant bleibt und die Oberfläche der Kugel mit dem Quadrat des Radius anwächst. Weiter weist die Anwesenheit von $\sin^2 \vartheta$ in der Formel (63,6) auf eine Ungleichmäßigkeit in der Verteilung der Intensität in verschiedenen Richtungen hin: in der Richtung der Geraden, in der die Schwingungen stattfinden ($\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$), ist sie gleich null, und der maximale Wert wird in einer Richtung erreicht, die senkrecht zu dieser Geraden liegt $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$. In Abb. 105 ist das Polardiagramm der Intensitätsverteilung der Strahlung in bezug auf den Winkel ϑ dargestellt. Das Experiment bestätigt eine solche Intensitätsverteilung. Die Entstehung der Röntgenstrahlen bei der Bremsung der Elektronen in der Antikathode erscheint als eines der anschaulichsten Beispiele. In Abb. 106 werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchung der Intensitätsabhängigkeit für die Bremsstrahlung vom Winkel ϑ bei verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten angegeben. Wie ersichtlich, ist die Intensität für $\vartheta = 0$ und π in allen Fällen gleich null; für Elektronen kleiner Geschwindigkeiten $\left(\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{20}\right)$ liegt das Maximum der Intensität nahe bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; bei großen Geschwindigkeiten $\left(\beta = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ ist die Richtung des Maximums zur Seite der Elektronenbewegung verschoben. Diese Nichtübereinstimmung mit der Formel (63,6) erklärt sich dadurch, daß die Formel für den Fall kleiner Geschwindigkeiten ohne Berücksichtigung des relativistischen Effektes abgeleitet wurde. Für große Geschwindigkeiten entwickelte SOMMERFELD die Formel

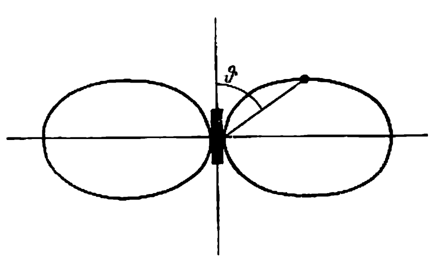


Abb. 105. Polardiagramm der Intensitätsverteilung

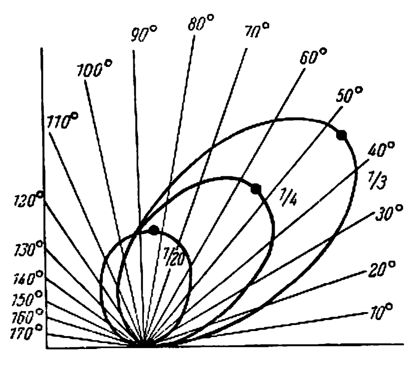


Abb. 106. Winkelverteilung der Intensität einer Bremsstrahlung

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^6} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

die bei beliebigem β gut mit dem Versuch übereinstimmt.

§ 64. Die gesamte und die mittlere Strahlung eines Oszillators

Die Formel (63,6) gibt einen Ausdruck für den Energiestrom, der in einem gegebenen Augenblick durch einen Punkt in der durch den Winkel ϑ charakterisierten Richtung hindurchgeht, oder anders ausgedrückt, die augenblickliche Intensität der elektromagnetischen Welle in einer bestimmten Richtung.

Muß die gesamte Energie berechnet werden, die von einem Oszillator in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird, so genügt es, das Integral

$$I = \int S\, d\sigma \tag{64,1}$$

aufzufinden, wobei sich die Integration auf die Oberfläche der um O beschriebenen Kugel (Abb. 104) erstreckt.

Bedenken wir, daß ein Oberflächenelement in sphärischen Polarkoordinaten gleich

$$d\sigma = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

ist, dann können wir das Integral (64,1) in einer Form schreiben, in der für den Strom S der Wert aus (63,6) steht:

$$I = \int\int \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\vartheta\, R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{64,2}$$

Für die Ausrechnung des letzten Integrals führen wir die neue Veränderliche $\xi = \cos\vartheta$ ein und bedenken, daß die Integrationsgrenzen für diese Veränderliche $+1$ und -1 sind:

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)\, d\xi = \frac{4}{3}.$$

Damit ergibt (64,2) endgültig

$$I = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3}. \tag{64,3}$$

Die erhaltene Formel gibt offensichtlich den Wert der Gesamtenergie *in einem gegebenen Zeitpunkt*. Da sich $\ddot{p}$ periodisch mit der Zeit ändert, so ändert sich entsprechend auch die Gesamtenergie I. Vom praktischen Gesichtspunkt aus hat nur die Kenntnis der *mittleren* und nicht der momentanen Energie grundlegendes Interesse, weil infolge der hohen Frequenz der Lichtschwingungen (für den sichtbaren Teil des Spektrums von der Größenordnung $10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$) alle Geräte, und unter diesen auch das Auge, den Schwingungen nicht folgen können und nur die mittlere Energie registrieren. Wir wollen jetzt *diese mittlere Energie* für einen genügend großen Zeitraum, beispielsweise für 1 s, ausrechnen. Sie ist gleich dem Mittel über eine Periode

$$\overline{I} = \frac{\overline{2\ddot{p}^2}}{3c^3}. \tag{64,4}$$

Ändert sich das Dipolmoment nach dem Gesetz der harmonischen Schwingungen $p = p_0 \cos\omega t = p_0 \cos 2\pi\nu t$, dann ist

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos\omega t = -4\pi^2\nu^2 p_0 \cos 2\pi\nu t. \tag{64,4'}$$

Setzen wir diesen Wert für $\ddot{p}$ in (64,3) ein, dann erhalten wir

$$I = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2\omega t = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

Der Mittelwert $\overline{I}$ wird

$$\overline{I} = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 2\pi\nu t},$$

und da $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2}$

$$\overline{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2. \tag{64,5}$$

Es möge jetzt die positive Ladung des Dipols im Koordinatenursprung ruhen und die negative Ladung Schwingungen auf der x-Achse durchführen. Dann ist $p = ex$; die während einer Periode ausgestrahlte mittlere Energie läßt sich dann auf Grund der Formel (64,4) in der Form

$$\overline{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\ddot{x}^2} \tag{64,6'}$$

darstellen. Sind die Schwingungen harmonisch, so ist $x = a \cdot \cos \omega t = a \cos 2\pi\nu t$, und an Stelle von (64,5) erhalten wir

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4\nu^4 e^2 a^2}{3c^3}. \tag{64,6}$$

§ 65. Das elektromagnetische Spektrum eines nichtharmonischen Oszillators

Streng harmonische, rein sinusförmige Schwingungen sind eine mathematische Abstraktion und existieren nirgends in der Natur. Im Falle mechanischer, quasielastischer Schwingungen gilt das Kraftgesetz nur für kleine Ablenkungen. Bei großen Ablenkungen treten in dem Ausdruck für die Kraft Glieder höherer Ordnung der Verschiebung auf und in dem mechanischen Spektrum neben der Grundfrequenz ihre Oberschwingungen. Untersuchen wir jetzt, wie das Spektrum einer elektromagnetischen Welle aussieht, das bei Schwingungen entsteht, die nicht harmonisch sind, sondern nach irgendeinem verwickelteren Gesetz entstehen. Diese Schwingungen wollen wir einstweilen noch als streng periodisch im mathematischen Sinne annehmen.

Die mittlere Energie eines nichtharmonisch schwingenden Oszillators wollen wir nach der Formel (64,6') berechnen:

$$\overline{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\ddot{x}^2}. \tag{65,1}$$

Sofern sich die Verschiebung x als eine *periodische* Funktion der Zeit erweist, können wir sie in eine Fouriersche Reihe entwickeln

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t}. \tag{65,2}$$

Wir bilden nun die zweite Ableitung nach der Zeit von x, mitteln und setzen das Resultat in (65,1) ein. Die zweite Ableitung nach der Zeit t wird

$$\ddot{x} = -\{A_1\omega_0^2 e^{i\omega_0 t} + A_2 (2\omega_0)^2 e^{i2\omega_0 t} + \cdots + A_{-1}\omega_0^2 e^{-i\omega_0 t} + A_{-2} (2\omega_0)^2 e^{-i2\omega_0 t} + \cdots\}. \tag{65,3}$$

Für die Berechnung des Mittels über einen großen Zeitraum genügt es, das Mittel über eine einzige Periode $T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ zu finden. Das mittlere Quadrat $\overline{\ddot{x}^2}$ wird deshalb

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega_0} \ddot{x}^2\,dt. \tag{65,4}$$

Wir setzen hier $\ddot{x}^2$ ein, das wir durch Quadrieren von (65,3) erhalten, und werden gliedweise integrieren. Hierbei müssen wir Integrale der Form

$$A_k A_l \int\limits_0^{2\pi/\omega_0} e^{i(k+l)\omega_0 t}\,dt$$

finden. Durch unmittelbare Ausrechnung können wir uns leicht davon überzeugen, daß alle diese Integrale gleich null sind, mit Ausnahme solcher Fälle, bei denen $l = -k$ ist. Schließlich finden wir

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2\,\{A_1 A_{-1}\omega_0^4 + A_2 A_{-2}(2\omega_0)^4 + \cdots + A_k A_{-k}(k\omega_0)^4 + \cdots\} \tag{65,5}$$

oder, weil nach § 46 $2A_k A_{-k} = \frac{a_k^2}{2}$,

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{2}\,\{\,a_1^2\,\omega_0^4 + a_2^2\,(2\omega_0)^4 + \cdots + a_k^2\,(k\omega_0)^4 + \cdots\}.$$

Setzen wir dies in die Formel (65,1) für die mittlere Strahlung ein, dann erhalten wir

$$\overline{I} = \frac{e^2 a_1^2}{3c^3}\,\omega^4 \pm \frac{e^2 a_2^2}{3c^3}(2\omega_0)^4 + \frac{e^2 a_3^2}{3c^3}(3\omega_0)^4 + \cdots \tag{65,6}$$

oder, wenn wir von der Kreisfrequenz zur linearen übergehen, $\omega = 2\pi\nu$,

$$\overline{I} = \frac{16\pi^4\nu_0^4}{3c^3}e^2 a_1^2 + \frac{16\pi^4(2\nu_0)^4}{3c^3}e^2 a_2^2 + \frac{16\pi^4(3\nu_0)^4}{3c^3}e^2 a_3^2 + \cdots. \tag{65,6'}$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit (64,6), dann sehen wir, daß die mittlere Strahlung eines Oszillators, der eine periodische, aber nicht harmonische Bewegung ausführt, aus einer Summe von Gliedern besteht, von denen sich jedes als die mittlere Strahlung eines harmonischen Oszillators erweist, wobei die Frequenzen dieser Oszillatoren die Reihe ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, . . . bilden. Dies zeigt, daß *das elektromagnetische Spektrum eines nichtharmonischen Oszillators dieselben Frequenzen wie sein mechanisches Spektrum enthält.*

Die charakteristische Besonderheit dieses Spektrums besteht darin, daß in ihm die Grundfrequenz und ihre *harmonischen Obertöne* eingehen; wird das Spektrum in einer Frequenzskala dargestellt, so ergibt sich eine *Reihe im gleichen Abstand befindlicher Linien.* Es zeigt sich nun, daß die elektromagnetischen Wellen, die von der Antenne eines Radiosenders ausgestrahlt werden, gerade ein solches Spektrum besitzen. Die Schwingungen der Ionen (Atomkerne) in den Molekülen ergeben ein Spektrum im Ultraroten, dessen Linien dieses Gesetz ungefähr befolgen und sich ihm mit wachsenden Oberschwingungen noch mehr nähern. Die durch Elektronenbewegung bedingten (sichtbaren und ultravioletten) Spektren folgen diesem Gesetz überhaupt nicht, da sich ihre Linien beim Übergang zu höheren Frequenzen ziemlich schnell bis zum völligen Zusammenfließen annähern (siehe Abschnitt VIII). Wie wir

später sehen werden, sind die Linien in sichtbaren und ultravioletten Spektren vollständig anderen Gesetzen unterworfen, deren Erklärung wir erst auf Grund der Quantentheorie geben können.

§ 66. Die Dämpfung von Schwingungen

Bis jetzt nahmen wir an, daß die Energie des Oszillators konstant bleibt, d. h., daß der Oszillator für unbegrenzt lange Zeit ungedämpft elektromagnetische Schwingungen ausführt. Eine solche Vorstellung entspricht aber strenggenommen nicht der Wirklichkeit, da bei den freien Schwingungen des Oszillators die elektromagnetische Welle die Energie fortträgt. Infolgedessen nimmt der Energievorrat des Oszillators ständig ab, und die Schwingungen müssen abklingen.

Suchen wir nun zuerst das Gesetz der Energieabnahme in Abhängigkeit von der Zeit. Die verschiedenen experimentellen Daten weisen darauf hin, daß die Dämpfung strahlender Atome gering ist. So führte beispielsweise die Untersuchung der Interferenz des Lichtes bei großen Gangunterschieden zu dem Schluß, daß die Länge des Wellenzuges, der von einem Atom ohne Dämpfung ausgestrahlt werden kann, mehr als 100 Millionen Wellenlängen entspricht. Aus dieser Tatsache ist zu entnehmen, daß sich die Schwingungen eines Elektrons wenig von harmonischen Schwingungen unterscheiden. Wir wissen aber, daß für den Fall harmonischer Schwingungen die mittlere Energie, die von der elektromagnetischen Welle in der Zeiteinheit fortgetragen wird,

$$\bar{I} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3} \tag{64,6}$$

ist. Die Energieabnahme des Oszillators in der Zeiteinheit wird gleich dieser Größe $\bar{I}$ sein:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}$$

oder

$$dE = -\frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}\, dt\,. \tag{66,1}$$

Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators ist gleich

$$E = \frac{m a^2 \omega^2}{2}\,. \tag{44,14}$$

Dividieren wir (66,1) durch (44,14), dann erhalten wir

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3}\, dt\,. \tag{66,2}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \gamma \tag{66,3}$$

ein, dann kann (66,2) in der Form

$$\frac{dE}{E} = -\gamma\, dt$$

geschrieben werden. Hieraus erhalten wir durch Integration

$$E = E_0 e^{-\gamma t}. \tag{66,4}$$

Wir sehen, daß die Energie eines Oszillators nach einem Exponentialgesetz mit der Zeit abnehmen muß.

Die von uns mit der Beziehung (66,3) eingeführte Konstante γ hat einen bestimmten physikalischen Sinn. Wir erkennen, daß die Maßeinheit dieser Konstante $[s^{-1}]$ ist, da das im Exponenten von (66,4) stehende Produkt γt eine dimensionslose Größe sein muß. Die zu γ reziproke Größe muß sich deshalb als ein Zeitintervall erweisen. Bezeichnen wir dieses mit τ_m, dann ist

$$\tau_m = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3mc^3}{8\pi^2\nu^2 e^2}. \tag{66,5}$$

Die Beziehung (66,4) können wir jetzt in der Form

$$E = E_0 e^{-t/\tau_m} \tag{66,4'}$$

schreiben. Hier ist ersichtlich, daß bei $t = \tau_m$ $E = \frac{E_0}{e}$ gerade τ_m das Zeitintervall ist, in dessen Verlauf die Energie des Oszillators auf den $e = 2{,}718$ten Teil absinkt. Da nach (66,4′) mit wachsendem t sich die Energie dem Wert null asymptotisch nähert, so kann keine bestimmte Zeitgröße angegeben werden, in deren Verlauf die Schwingungen noch fortgesetzt werden. Als vereinbartes Maß dieser Größe wird passend die Größe τ_m benutzt, die Relaxationszeit genannt wird. Die Dämpfungskonstante γ ist die reziproke Größe der Relaxationszeit.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung dieser Zeit zu erhalten, berechnen wir ihren Zahlenwert für die Aussendung der blauen Linie des Wasserstoffspektrums (der sogenannten H_β-Linie), die der Wellenlänge $\lambda = 4861{,}33 \cdot 10^{-8}$ cm entspricht. In diesem Falle ist

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4861{,}33 \cdot 10^{-8}} = 3{,}87 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}.$$

Setzen wir diesen Wert ω und auch die Werte der Universalkonstanten e, e/mc und c in die Formel (66,5) ein, dann finden wir

$$\tau_m \approx 10^{-7}\ \text{s}.$$

Dies zeigt, daß die *absolute* Größe der Leuchtzeit sehr klein ist, aber ihre *relative* Größe, gerade das Verhältnis von τ zur Schwingungsperiode, angenähert gleich $6 \cdot 10^7$ ist, d. h. einen sehr großen Wert darstellt. Ein Elektron muß 60 Millionen Schwingungen ausführen, bevor sich seine Energie auf den e-ten Teil vermindert.

Eine unmittelbare experimentelle Bestimmung der Größe der Relaxationszeit wurde zuerst mit Hilfe der Kanalstrahlen durchgeführt. Ein Bündel leuchtender Wasserstoffkanalstrahlen trat durch eine Öffnung in der Kathode in einen Raum ein, in dem ein so hohes Vakuum unterhalten wurde, daß die Atome praktisch ohne Zusammenstoß „ausstrahlen“ konnten. Mit Hilfe der Intensitätsabnahme längs des leuchtenden Bündels konnte τ_m bei bekannter Geschwindigkeit der Kanalstrahlteilchen bestimmt werden. Es zeigte sich, daß die Größenordnung dieser Zeit mit der oben angegebenen (10^{-8} s für $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ cm) übereinstimmt.

§ 67. Strahlungsdämpfung

Wir stellten fest, daß die Energie eines schwingenden Dipols mit der Zeit nach dem Gesetz (66,4) oder (66,4′) abnimmt. Ist das schwingende Elektron quasielastisch gebunden, dann kann die Summe der potentiellen und kinetischen Energie des Oszillators errechnet werden. Diese Summe ist jedoch wegen der Dämpfung nicht konstant. In der Mechanik gibt es einen analogen Fall: Finden die Schwingungen eines mechanischen Oszillators in einem zähen Medium statt, dann wird sich der Vorrat seiner mechanischen Energie (kinetischen + potentiellen) in kurzer Zeit vermindern. Es tritt in der Energiebilanz ein Defizit auf: die Energie verteilt sich in nichtreversibler Weise, sie verwandelt sich schließlich in Wärme. Wir sahen jedoch im § 42, daß dieses Defizit berücksichtigt werden kann, wenn wir irgendeine entgegenwirkende Kraft R, d. h. eine Reibungskraft, einführen, die zu einer Streuung der Energie führt. Auf diese Weise erscheint auf der rechten Seite der Schwingungsgleichung neben der quasielastischen Kraft kx noch eine Reibungskraft.

Auf analoge Weise können wir die Energiebilanz auch im Falle gedämpfter *elektromagnetischer* Schwingungen eines Oszillators aufstellen: wir können uns vorstellen, daß diese Schwingungen durch eine dissipative Kraft gebremst werden, die zweckentsprechend die „Kraft der Strahlungsreibung“ genannt werden kann. Offensichtlich erscheint diese Kraft infolge einer Rückwirkung des Strahlungsfeldes des Oszillators auf diesen Oszillator selbst.

Befassen wir uns nun mit der Aufstellung eines Ausdruckes für diese Kraft. In der Mechanik wird gewöhnlich angenommen, daß die Reibungskraft von der Geschwindigkeit, d. h. der ersten Ableitung von x nach der Zeit, abhängt. Bei nicht zu großen Geschwindigkeiten ist die Reibungskraft einfach proportional $\dot{x}$. Wir haben jedoch keinerlei Gründe, diese Abhängigkeit ohne vorherige Untersuchung auch auf die Kraft der Strahlungsreibung zu übertragen. Bei der Aufstellung dieser Kraft verfahren wir am einfachsten auf folgende Weise: Wir berechnen den mittleren Wert der Arbeit der Kraft der Strahlungsreibung für ein Zeitintervall, das im Vergleich zu einer Schwingungsperiode genügend groß ist. Die Arbeit der Kraft R innerhalb des differentiellen Zeitintervalles dt ist gleich $R dx = R\dot{x} dt$; der Mittelwert der Arbeit während des Zeitintervalles von null bis τ wird deshalb

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau R\dot{x}\,dt.$$

Wenn wir die Kraft der Strahlungsreibung zur Beschreibung des Energieverlustes einführen, dann muß offensichtlich der Mittelwert der Arbeit dieser Kraft gleich dem Mittelwert der Energie sein, die der Oszillator in demselben Zeitintervall ausstrahlt. Nach der Formel (64,6′) wird der letztere Wert durch

$$\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\ddot{x}^2} = \frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \ddot{x}^2\,dt$$

gegeben. Dann haben wir

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau R\dot{x}\,dt = -\frac{2e^2}{3c^3\tau}\int_0^\tau \ddot{x}^2\,dt. \tag{67,1}$$

Nach einfacher Umformung und partieller Integration finden wir

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \ddot{x}^2\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \ddot{x}\,\ddot{x}\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \ddot{x}\,d\dot{x}$$

$$= \frac{1}{\tau}(\ddot{x}\dot{x})\Big|_0^\tau - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{x}\,d\ddot{x} = \frac{(\dot{x}\,\ddot{x})_\tau - (\dot{x}\,\ddot{x})_0}{\tau} - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{x}\,\dddot{x}\,dt.$$

Da sich die Geschwindigkeit $\dot{x}$ und die Beschleunigung $\ddot{x}$ in endlichen Grenzen ändern, so können wir bei genügend groß gewähltem Zeitintervall das erste Glied beliebig klein machen. Die Gleichung (67,1) wird dann

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau R\dot{x}\,dt = \frac{2e^2}{3c^3\tau}\int_0^\tau \dddot{x}\,\dot{x}\,dt$$

ergeben. Um diese Gleichung zu befriedigen, genügt es,

$$R = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} \tag{67,2}$$

zu setzen. Dies ist aber der uns interessierende Ausdruck für die Kraft der Strahlungsreibung.[1]) Wir wollen jedoch anmerken, daß wir hier zum ersten Male auf eine Kraft gestoßen sind, die von der *dritten* Ableitung des Weges nach der Zeit abhängt.

Da wir nunmehr den Ausdruck für die Kraft der Strahlungsreibung kennen, müssen wir diese Kraft bei der Aufstellung der Schwingungsgleichung für den elektromagnetischen Oszillator berücksichtigen. Diese Gleichung schreiben wir in allgemeiner Form folgendermaßen:

$$m\ddot{x} = -kx + R.$$

Setzen wir für R den Ausdruck (67,2) ein, dann erhalten wir die Schwingungsgleichung unter Berücksichtigung der Strahlungsreibung

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}. \tag{67,3}$$

Wir erhalten eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Suchen wir ihre Lösung in der Form $x = e^{i\omega t}$, dann kommen wir zu der charakteristischen Gleichung dritten Grades. Wir können jedoch bei folgender Überlegung die Methode der sukzessiven Approximation anwenden. Bei der nullten Näherung können wir auf der rechten Seite der Gleichung (67,3) das zweite kleine Glied vernachlässigen. Wir kommen dann zu der Schwingungsgleichung des Oszillators ohne Berücksichtigung der Reibung

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{67,4}$$

deren Lösung $x = e^{i\omega_0 t}$ ist, worin $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Setzen wir diese Lösung in (67,3)

[1]) Es ist offensichtlich, daß diese Schlußfolgerung nur einen hinreichenden, aber keinen notwendigen Charakter hat. Der strengere auf die Betrachtung der Feldwirkung fußende Beweis führt zu demselben Ausdruck. (Siehe W. HEITLER, „Quantentheorie der Strahlung", Oxford, 1940.)

ein und bedenken, daß $\dddot{x} = -i\omega_0^3 e^{i\omega_0 t} = -\omega_0^2 \dot{x}$ ist, dann erhalten wir

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\dot{x}. \tag{67,5}$$

Setzen wir wieder

$$\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} = \gamma \tag{66,3}$$

und schreiben die Gleichung (67,5) um in die Form

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{67,6}$$

worin $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und ω_0 die Frequenz der ungedämpften Oszillatorschwingung ist.

Die Lösung der Gleichung (67,6) versuchen wir in der Form

$$x = e^{int}.$$

Setzen wir diese Lösung in (67,6) ein, dann erhalten wir nach Division durch e^{int}

$$-n^2 + i\gamma n + \omega_0^2 = 0.$$

Hieraus erhalten wir für n

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Wir setzen

$$\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \equiv \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}. \tag{67,7}$$

Da γ eine kleine und ω_0 eine große Zahl ist, gilt

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \ll 1 \tag{67,8}$$

und deshalb mit genügender Genauigkeit

$$\omega_k = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right), \tag{67,9}$$

ω_k ist hier die Frequenz der *gedämpften* Schwingungen. Offensichtlich wird sich ω_k um so weniger von ω_0 unterscheiden, je geringer die Dämpfungskonstante γ ist. Im Falle optischer Frequenzen ist die Dämpfung so klein, daß $\omega_k \approx \omega_0$ angenommen werden kann. Daher können wir in dem gegebenen Falle mit genügender Annäherung

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0$$

schreiben, und die Lösung $x = e^{int}$ erhält die Form

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (67,3) ist

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}). \tag{67,10}$$

Hier steht auf der linken Seite eine reelle Größe, die Verschiebung x; damit auch die rechte Seite reell ist, müssen die komplexen Koeffizienten A und B konjugiert komplex sein:

$$B^* = A.$$

Bezeichnen wir den allgemeinen Modul A und B mit $\frac{a}{2}$ und die Phase mit δ, so ist

$$A = \frac{1}{2}\, a e^{i\delta}, \qquad B = \frac{1}{2}\, a e^{-i\delta},$$

und (67,10) ergibt

$$x = \frac{1}{2}\, a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left\{ e^{i(\omega_0 t + \delta)} + e^{-i(\omega_0 t + \delta)} \right\} = a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$= a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta). \qquad (67,11)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Schwingungsbewegung, bei der die Amplitude mit der Zeit nach dem Exponentialgesetz $e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ abklingt. Dieses Gesetz entspricht offenbar dem Gesetz der Energieabnahme

$$E = E_0 e^{-\gamma t},$$

da die Energie dem Quadrat der Amplitude proportional ist.

§ 68. Das FOURIERsche Integral und das kontinuierliche Spektrum

Die gedämpften Schwingungen eines Oszillators stellen einen Vorgang dar, den wir nicht als periodisch bezeichnen können, da er nicht die Grundbedingung der Periodizität, nämlich die unbegrenzte Wiederholung ein und derselben Amplitude in gleichen Zeitintervallen, befriedigt. Tatsächlich sind bei gedämpften Schwingungen gleiche Amplituden allgemein nicht anzutreffen, und außerdem beginnt der Vorgang in einem bestimmten Augenblick, breitet sich also nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ aus, sondern nur von 0 bis $+\infty$. Somit erscheinen gedämpfte Schwingungen als Beispiel eines nichtperiodischen Vorganges.

Betrachten wir jetzt die wichtige Frage der spektralen Zerlegung nichtperiodischer Vorgänge. Weiter oben sahen wir, daß eine beliebige, einen periodischen Vorgang darstellende Funktion in eine FOURIERsche Reihe zerlegt werden kann, sich also als eine Superposition streng harmonischer Schwingungen mit den Frequenzen $\nu_0 = \frac{1}{T}$, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... erweist, wobei T die Grundperiode der Zerlegung ist. Was mathematisch mit Hilfe der FOURIERschen Reihe ausgeführt wurde, kann im Versuch mit Hilfe eines entsprechenden Analysators, beispielsweise eines Beugungsgitters, verwirklicht werden, wenn es sich um Lichtschwingungen handelt. Die spektrale Zerlegung eines periodischen Vorganges ergibt also, auf welchem Wege sie auch ausgeführt sein möge, ein *Linienspektrum*.

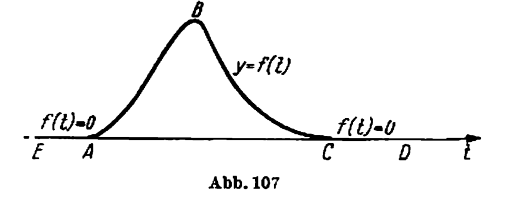


Abb. 107

Wir mögen jetzt irgendeine Funktion $f(t)$ haben, die in dem Intervall AC (Abb. 107) durch die Kurve ABC dargestellt wird und an den Grenzen des Intervalles, d. h. in den Punkten A und C, null ist. Diese Funktion stellt offenbar einen nichtperiodischen Vorgang dar. Wir können sie in dem Intervall AC in eine FOURIERsche Reihe zerlegen, wobei $T = AC$ genommen wird. Benutzen wir eine genügende

Anzahl Glieder dieser Reihe, dann erhalten wir den richtigen Verlauf der Funktion, *jedoch nur in den Grenzen des Intervalles AC*, denn links von A und rechts von C gäbe unsere Reihe eine periodische Wiederholung der Kurve ABC. Wir können nun das Intervall beispielsweise links bis E und rechts bis D erweitern und der Funktion in den Abschnitten AE und CD den Wert null zuschreiben. In diesem verbreiterten Intervall können wir jetzt von neuem die Fouriersche Zerlegung vornehmen, wobei die Grundperiode der Zerlegung schon $T = ED$ sein wird. Offensichtlich kann das Intervall der Zerlegung ED unbegrenzt erweitert werden, wenn sich die Punkte E und D ins Unendliche bewegen. Hierbei wird die Grundperiode der Zerlegung T unbegrenzt anwachsen und die entsprechende Grundfrequenz $\nu_0 = \frac{1}{T}$ unbegrenzt abnehmen. Infolgedessen werden sich die Argumente der aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe $e^{\pm i 2\pi s \nu_0 t}$ mit wachsendem s immer mehr einander nähern, und es kann gezeigt werden, daß bei einer unbegrenzten Verbreiterung des Grundintervalles der Zerlegung die Reihe letzten Endes in ein Integral übergeht, das von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen ist.

Diese Überlegungen werden noch klarer, wenn wir sie in Formeln kleiden. $f(t)$ sei die gegebene nichtperiodische Funktion; wir zerlegen sie in dem endlichen Intervall von $-\frac{T}{2}$ bis $+\frac{T}{2}$ in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i 2\pi s \nu_0 t}, \qquad \nu_0 = \frac{1}{T}. \tag{68,1}$$

Nach der bekannten Formel für die Koeffizienten der Zerlegung ist

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\, e^{-i 2\pi s \nu_0 t}\, dt. \tag{68,2}$$

Ersetzen wir hier die Bezeichnung für die Zeit t durch a und bedenken, daß die Grundfrequenz $\nu_0 = \frac{1}{T}$ ist, dann kann die Formel (68,2) umgeschrieben werden in

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(a)\, e^{-i 2\pi \frac{s}{T} a}\, da. \tag{68,3}$$

Diesen Ausdruck für A_s können wir in die Reihe (68,1) einsetzen, die hierbei die Form

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_s \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} f(a)\, e^{-i \frac{2\pi s a}{T}}\, da \right\} e^{i \frac{2\pi s t}{T}} \tag{68,4}$$

annimmt.

Wir bezeichnen nun $\frac{s}{T}$ mit ν_s. Da s eine ganze Zahl ist, so ändern sich die in die Zerlegung (68,4) eingehenden Frequenzen $\frac{s}{T} = \nu_s$ bei aufeinanderfolgender Änderung von s um endliche Stufen

$$\Delta\nu = \frac{s+1}{T} - \frac{s}{T} = \frac{1}{T}.$$

Bedenken wir, daß die Reihe (68,4) in der Form

$$f(t) = \sum \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} f(a)\, e^{-i2\pi\nu a}\, da \right\} e^{i2\pi\nu t} \Delta\nu \tag{68,5}$$

dargestellt werden kann.

Wir führen jetzt den Grenzübergang durch und erweitern das Intervall $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$ von $-\infty$ bis $+\infty$. Wie in den mathematischen Lehrbüchern streng bewiesen wird, wandelt sich die Summe der rechten Seite von (68,5) in das Integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, e^{-i2\pi\nu a}\, da \right\} e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$$

um. Dieses kann in der Form

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \tag{68,6}$$

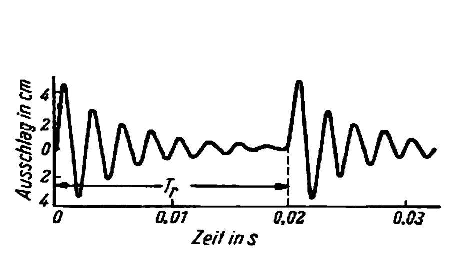
geschrieben werden, worin

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\, e^{-i2\pi\nu a}\, da$$

ist oder, wenn wir zu den früheren Bezeichnungen zurückkehren und von neuem a durch t ersetzen,

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt\,. \tag{68,7}$$

Dies ist die Formel, die die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Frequenz bei der Zerlegung einer nichtperiodischen Funktion ausdrückt.



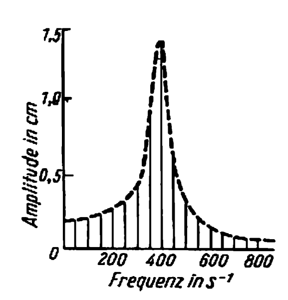


Abb. 108. Zerlegung eines periodischen Vorgangs

Die Formeln (68,6) und (68,7) erlauben, die spektrale Zerlegung nichtperiodischer Vorgänge, insbesondere gedämpfter Schwingungen, auszuführen.

Vom physikalischen Gesichtspunkt besteht zwischen der Zerlegung einer periodischen Funktion in eine FOURIER-Reihe und der Zerlegung einer nichtperiodischen

Funktion in ein *Fourier-Integral* ein wesentlicher Unterschied. *Die Fourier-Reihe* besteht aus Gliedern, die einfache periodische Funktionen mit den *sich diskret ändernden Frequenzen* ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... enthalten; in dem *Fourierschen Integral* wird die Integration nach Frequenzen ausgeführt, d. h., es wird die *stetige* Veränderung der Frequenz vorausgesetzt. Im ersten Fall haben wir es mit der Zerlegung in ein Linienspektrum zu tun, im zweiten mit einem kontinuierlichen Spektrum. Dieser Unterschied ist in den Abb. 108 und 109 illustriert, wo links die beiden Schwingungskurven und rechts ihre Spektren dargestellt sind. Bei letzteren sind auf der Abszisse die Frequenzen in s^{-1} und auf der Ordinate

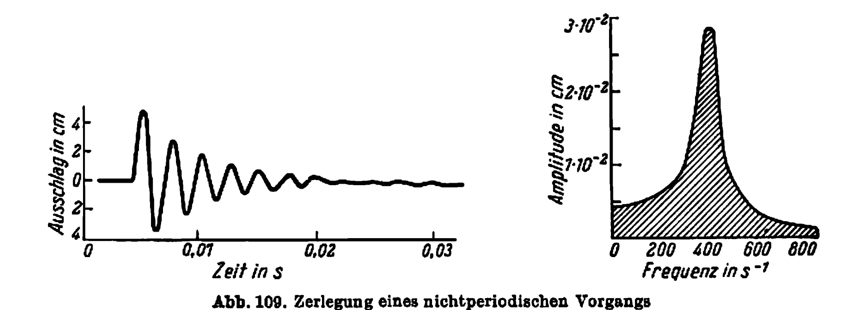


Abb. 109. Zerlegung eines nichtperiodischen Vorgangs

die Amplituden, d. h. die Fourierschen Koeffizienten, aufgetragen. Die linke Kurve (Abb. 108) stellt einen nicht sinusförmigen, aber periodischen Vorgang dar; ihr Spektrum ist ein Linienspektrum. Die linke Kurve (Abb. 109) stellt ein Glied der vorigen Kurve dar; dies Glied erscheint nicht als periodische Kurve, da wir hier keine unbegrenzte Wiederholung gleicher Amplituden über gleiche Zeitintervalle haben. Auf der rechten Seite wird gezeigt, daß hierbei die einzelnen Linien so weit genähert sind, daß die Zerlegung einen kontinuierlichen Streifen ergibt, der ein ganzes *Frequenzintervall* umfaßt, d. h. einen Teil des *kontinuierlichen Spektrums.*

§ 69. Die natürliche Breite der Spektrallinien

Die gedämpften Schwingungen eines Oszillators

$$x = a e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta)$$

stellen sich auf Grund des in den vorigen Paragraphen Gesagten als ein nichtharmonischer und auch nichtperiodischer Prozeß dar.

Deshalb muß zu seiner mathematischen Zerlegung in ein Spektrum nicht eine Reihe, sondern das Fouriersche Integral benutzt werden. Hieraus folgt, daß das Spektrum *kontinuierlich* ist. Genauer gesagt, zeigt die Ausrechnung, daß sich die Spektrallinie infolge der Schwingungsdämpfung *verbreitert,* sie schließt ein Stück des kontinuierlichen Spektrums ein, dessen Breite $\Delta\nu$ durch die Dämpfung γ be-

stimmt wird. Um dies zu zeigen, müssen wir vor allem die Funktion $f(t)$ im Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ angeben:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqq 0, \\ a e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i 2\pi \nu_0 t} & \text{für } t \geqq 0. \end{cases} \tag{69,1}$$

Die spektrale Zerlegung der Funktion $f(t)$ ergibt sich durch die Formel

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)\, e^{i 2\pi \nu t}\, d\nu, \tag{69,2}$$

worin die Amplitude $a(\nu)$ durch die Formel

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i 2\pi \nu t}\, dt \tag{69,3}$$

bestimmt wird. Setzen wir hier $f(t)$ aus (69,1) ein und bedenken, daß $f(t) = 0$ in dem Intervall von $-\infty$ bis 0 ist, dann erhalten wir

$$a(\nu) = \int_0^{+\infty} a e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{i 2\pi (\nu_0 - \nu) t}\, dt = a \int_0^{\infty} e^{\left[i 2\pi (\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}\right] t}\, dt.$$

Die Berechnung dieses Integrals ergibt

$$a(\nu) = \frac{a}{i 2\pi (\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{e^{i 2\pi (\nu_0 - \nu) t}}{e^{\frac{\gamma}{2} t}} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i 2\pi (\nu_0 - \nu)}. \tag{69,4}$$

Um die Verteilung der Intensität im Spektrum in Abhängigkeit von der Frequenz zu finden, muß das Quadrat des Moduls von $a(\nu)$ berechnet werden:

$$|a(\nu)|^2 = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i 2\pi (\nu_0 - \nu)} \cdot \frac{a}{\frac{\gamma}{2} + i 2\pi (\nu_0 - \nu)} = \frac{a^2}{4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{69,5}$$

Benutzen wir jetzt die Formel (64,4) und mitteln über ein großes Zeitintervall, so ergibt sich als Resultat $\overline{I}_\nu = \frac{16\pi^4 \nu^4 e^2}{3c^3} |a(\nu)|^2$ [siehe Formel (64,6)]; setzen wir noch für $|a(\nu)|^2$ den Ausdruck (69,5), dann erhalten wir

$$\overline{I}_\nu = \frac{16\pi^4 \nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{16\pi^4 \nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{\nu_0^2}}. \tag{69,6}$$

Wir führen die Bezeichnung $\frac{\nu}{\nu_0} = X$, $\frac{\gamma}{\nu_0} = \Gamma$ ein und schreiben die Formel (69,6) in der Form

$$\overline{I}_\nu = \frac{16\pi^4 \nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2 (1 - X)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \tag{69,7}$$

Die Formeln (69,6) und (69,7) geben die Intensitätsverteilung in Abhängigkeit

von der Frequenz, d. h. das Bild des Spektrums eines gedämpften Oszillators. In der Abb. 110 ist der Gang des Multiplikators

$$f(X) = \frac{1}{4\pi^2(1-X)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

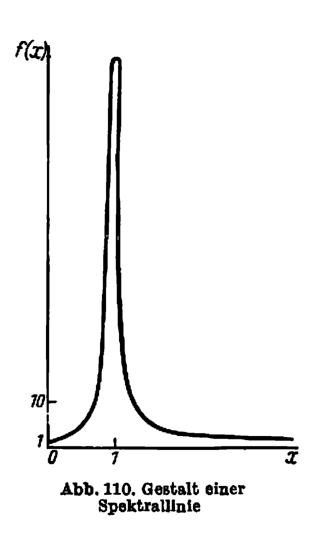


Abb. 110. Gestalt einer Spektrallinie

dargestellt. Wie ersichtlich, hat die Kurve bei

$$X = 1 \text{ oder } \nu = \nu_0,$$

d. h. für die Frequenz der Eigenschwingungen des ungedämpften Oszillators, ein scharfes Maximum.

Der maximale Wert ist

$$f(X) = \frac{1}{\frac{1}{4}\Gamma^2}.$$

Ein Wert von $f(X)$, der gleich der Hälfte des maximalen Wertes ist, wird bei der Bedingung

$$2\pi(1-X) = \frac{1}{2}\Gamma$$

gefunden. Bedenken wir, daß $X = \frac{\nu}{\nu_0}$ und $\Gamma = \frac{\gamma}{\nu_0}$ ist, und bezeichnen in diesem Falle $\nu_0 - \nu$ durch $\Delta\nu_{1/2}$, dann wird

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi}. \tag{69,8}$$

$\Delta\nu_{1/2}$ wird die Halbwertbreite der Spektrallinie genannt; sie wird vollkommen durch die Dämpfung γ bestimmt.

Die Halbwertbreite $\Delta\nu_{1/2}$ ist unter realen Bedingungen sehr klein. In Abb. 110 ist die Kontur der Spektrallinie für $\Gamma = \frac{1}{5}$ dargestellt; indessen ist für schmale Spektrallinien Γ von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4}, so daß die Breite der Linie, wie sie in der Zeichnung dargestellt wurde, übermäßig vergrößert ist.

Denken wir an die Verbindung zwischen γ und der Relaxationszeit $\tau\left(\gamma = \frac{1}{\tau}\right)$, dann können wir (69,8) in der Form

$$\tau\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{4\pi} \tag{69,9}$$

schreiben.

§ 70. Andere Beispiele einer spektralen Zerlegung nichtperiodischer Vorgänge

Wir betrachten jetzt noch zwei Beispiele einer spektralen Zerlegung nichtperiodischer Vorgänge.

a) Eine Schwingung möge während eines begrenzten Zeitintervalles Δt stattfinden, aber in diesem begrenzten Intervall einem harmonischen Gesetz unterworfen sein (Abb. 111a). Solche Schwingungen sollen *quasimonochromatisch* heißen. Es ist offensichtlich, daß alle wirklichen Schwingungen, die wir praktisch als monochromatisch und ungedämpft ansehen, in Wirklichkeit quasimonochromatisch

sind, da sie nur begrenzte Zeit dauern. Es sei T die Periode und $\nu_0 = \frac{1}{T}$ die Frequenz dieser Schwingung. Untersuchen wir jetzt ihre spektrale Zerlegung.

Da die Schwingung *nicht* von $-\infty$ bis $+\infty$ währt, stellt sie sich als ein *nichtperiodischer* Vorgang dar, für dessen spektrale Zerlegung das Integral, nicht aber

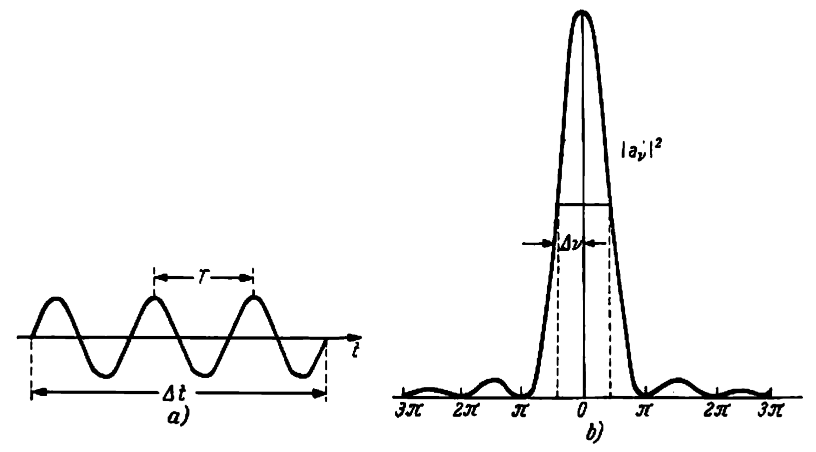


Abb. 111. Quasimonochromatische Schwingung

die FOURIERsche Reihe benutzt wird. Die der Zerlegung unterliegende Funktion lautet:

$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{von } -\frac{\Delta t}{2} \text{ bis } +\frac{\Delta t}{2}, \\ 0 & \text{von } -\infty \text{ bis } -\frac{\Delta t}{2} \text{ und von } +\frac{\Delta t}{2} \text{ bis } +\infty. \end{cases} \tag{70,1}$$

Die gesuchte Zerlegung ist

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i2\pi\nu t}\, d\nu,$$

wobei die Amplitude a_ν durch

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

ausgedrückt wird. Nehmen wir (70,1) und beachten, daß $f(t) \neq 0$ nur innerhalb der Grenzen von $-\frac{\Delta t}{2}$ bis $+\frac{\Delta t}{2}$ gilt, dann erhalten wir

$$a_\nu = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = A_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}\, dt = A_0 \frac{\sin \pi(\nu_0-\nu)\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)}. \tag{70,2}$$

Dieses Resultat kann auch in der Form

$$a_\nu = A_0 \Delta t \cdot \frac{\sin \pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}{\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t} \tag{70,3}$$

dargestellt werden oder, wenn wir $A_0 \Delta t = A$ und $\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t = \xi$ setzen,

$$a_\nu = A \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Die Funktion $\frac{\sin \xi}{\xi}$ hat den folgenden Verlauf: ihr Hauptmaximum liegt bei $\xi = 0$, wo $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$ ist; sie wird null bei $\xi = \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm m\pi$. Dazwischen hat sie Nebenmaxima bei solchen Werten von ξ, die die Bedingung $\operatorname{tg} \xi = \xi$ erfüllen. Diese Werte sind $\xi = 1{,}430\,\pi = 4{,}49$; $2{,}459\,\pi = 7{,}73$; $3{,}47\,\pi = 10{,}90$ usw. An den Orten der Maxima betragen die Werte $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$:

ξ	0	4,49	7,73	10,90
$\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$	1	0,047	0,016	0,008

Aus dieser Tabelle folgt, daß mit einem 5% nicht übersteigenden Fehler der ganze Verlauf der Funktion $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$ als in dem Intervall $\xi = \pm \pi$ liegend angesehen werden kann. Jenseits der Grenzen dieses Intervalles kann die Funktion in den angegebenen Genauigkeitsgrenzen als zu null zurückgekehrt betrachtet werden. Da

$$|a_\nu|^2 = A^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 = (A_0 \Delta t)^2 \left[\frac{\sin \pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}{\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}\right]^2,$$

hat $|a_\nu|^2$ das Hauptmaximum bei $\nu = \nu_0$ (Abb. 111b), d. h. bei der Frequenz der quasimonochromatischen Schwingung, und wird null bei

$$|\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t| = \pi. \tag{70,4}$$

Obwohl die Frequenz $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ mit der größten Intensität auftritt, so sehen wir doch, daß das Spektrum das kontinuierliche Frequenzintervall $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$ umfaßt. Aus (70,4) folgt unmittelbar die Beziehung zwischen $\Delta\nu$ und der Dauer Δt der gedämpften Schwingungen

$$\Delta\nu \Delta t = 1. \tag{70,5}$$

Berücksichtigen wir nicht nur das Hauptmaximum, sondern auch das sekundäre Maximum, dann tritt an Stelle der Bedingung (70,4) die Bedingung

$$|\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t| = m\pi,$$

was $\Delta\nu \Delta t = 2, 3, \ldots, m$ ergibt, so daß wir an Stelle von (70,5) die Ungleichung

$$\Delta\nu \Delta t \geqq 1 \tag{70,6}$$

schreiben können. Diese Ungleichung zeigt, daß, je größer die Dauer Δt der quasimonochromatischen Schwingung ist, um so enger das spektrale Intervall $\Delta\nu$ sein wird, und umgekehrt.

b) Als zweites Beispiel betrachten wir eine einmalige Anregung, wie sie durch die Funktion

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}$$

charakterisiert werden kann (siehe die obere Kurve der Abb. 112).

Der Parameter β, der die Maßeinheit [s^{-1}] hat, charakterisiert die Schärfe des Anstoßes. Als Maß dieser Schärfe dient der Zeitraum $\Delta t = \frac{1}{\beta}$, in dessen Verlauf sich die Amplitude der Anregung um das e-fache ändert. Die Amplitude der spektralen Zerlegung wird nach der bekannten Formel

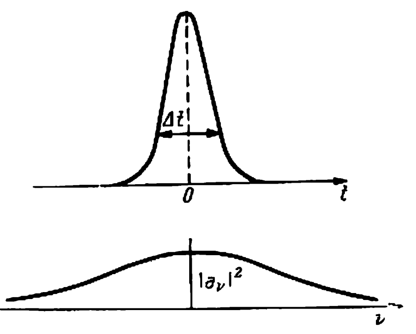


Abb. 112. Einzelimpuls und sein Spektrum

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t)} dt$$

berechnet.

Der Exponent unter dem Integral kann auf folgende Weise umgebildet werden:

$$-(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t) = -\left[\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2\right] + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 = -\left(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 - \frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2},$$

so daß

$$a_\nu = e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2} dt.$$

Setzen wir

$$\beta t + i\frac{\pi\nu}{\beta} = z,$$

dann erhalten wir

$$a_\nu = \frac{e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}},$$

woraus

$$|a_\nu|^2 = \frac{\pi}{\beta^2} e^{-2\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}$$

folgt. Die Verteilung der Energie im Spektrum hängt offensichtlich von dem exponentiellen Multiplikator ab. Die Breite der Kurve wird durch die Bedingung

$$2\frac{\pi^2(\Delta\nu)^2}{\beta^2} = 1$$

bestimmt oder mit $\beta = \frac{1}{\Delta t}$

$$|\sqrt{2}\pi\Delta\nu\Delta t| = 1,$$

das heißt

$$\Delta\nu\Delta t \approx 1.$$

Wie auch schon in den früher betrachteten Fällen steht die Breite des kontinuierlichen Spektrums im umgekehrten Verhältnis zur Dauer Δt des Impulses.

Für alle in den letzten beiden Paragraphen betrachteten Beispiele ist der folgende allgemeine Schluß charakteristisch: Zwischen der Dauer der Anregung $f(t)$ und der Ausdehnung des Frequenzspektrums besteht eine reziproke Beziehung: je kürzer die Anregungszeit ist, um so breiter ist das Spektrum, und umgekehrt.

L. I. Mandelstam zeigte in seiner Vorlesung die folgende treffende Veranschaulichung. Ein Lichtstrahl möge auf eine photographische Schicht fallen, die sich schnell in ihrer Ebene senkrecht zum Strahl bewegt. Die Länge der Spur, die von dem Strahl auf der Schicht verbleibt, ist auch ein Maß für die Dauer der Anregung $f(t)$. Nun wird die Schicht in einen aus Prisma und Linse bestehenden Spektrographen gebracht. Ist $f(t)$ eine Sinuskurve (d. h. unbegrenzte Anregung), dann haben wir in der Fokalebene einen Punkt, der einer bestimmten Frequenz ν entspricht. Ist jedoch $f(t)$ keine Sinuskurve, dann erscheint auf der Schicht an Stelle einer Frequenz ein ausgedehntes Spektrum. Je kürzer der Strich auf der bewegten Schicht, um so breiter ist das Spektrum ausgedehnt, und umgekehrt.

§ 71. Das Planetenmodell des Atoms

Bis jetzt benutzten wir als Modell einer Lichtquelle nur einen linearen Oszillator, einen Dipol also, der nach dem harmonischen oder nichtharmonischen Gesetz Schwingungen ausführt. Nach dem Planetenmodell Rutherfords wird das Atom als ein Rotator betrachtet, bei dem ein negativ geladenes Teilchen auf einer geschlossenen Bahn um den positiven Kern rotiert. Unschwer können wir uns davon überzeugen, daß die elektromagnetischen Eigenschaften eines solchen Modells nichts wesentlich Neues im Vergleich zu dem bereits bei der Ausstrahlung des linearen Oszillators Gefundenen bringen.

Stellen wir uns zu Anfang als einfachsten Fall ein Elektron vor, das sich gleichmäßig auf einer Kreisbahn um den Kern bewegt. Dieser Umlauf wird eine beschleunigte Bewegung sein, die von einer Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen begleitet sein muß.

Um die Intensität dieser Strahlung zu berechnen, zerlegen wir die gleichförmige Kreisbewegung in zwei harmonische Schwingungen auf den x- und y-Achsen:

$$x = a\cos\omega t\,, \quad y = a\sin\omega t\,.$$

An Stelle eines Elektrons, das sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, können wir offensichtlich die Ausstrahlung zweier Dipole betrachten, die Schwingungen mit der gleichen Frequenz ω und der gleichen Amplitude a in senkrecht zueinander stehenden Richtungen ausführen.

Nach den Formeln des § 64 haben wir für die Intensität der Strahlung zweier Dipole

$$I_x = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\omega t\,, \qquad I_y = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\sin^2\omega t\,.$$

Die Gesamtstrahlung der Kreisbahn wird auf diese Weise

$$I = I_x + I_y = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3} = \frac{32\pi^4\nu^4e^2a^2}{3c^3}\,.$$

Vergleichen wir das erhaltene Resultat mit der Formel für die mittlere Ausstrahlung eines Dipols über eine Periode (64,6), dann sehen wir, daß die Gesamtstrahlung auf

einer Kreisbahn nicht von der Zeit abhängt und zweimal größer ist als die mittlere Strahlung eines Dipols, was auch vollständig verständlich ist, da die Ausstrahlung der beiden Dipole I_x und I_y in zueinander senkrechten Ebenen polarisiert ist.

Viel verwickelter wird der Fall jedoch, wenn die allgemeine Bewegung eines Elektrons, das mit dem Kern durch die COULOMBsche Kraft verbunden ist, auf der KEPLER-Ellipse betrachtet wird. In diesem Falle erscheinen die Komponenten der Bewegung auf den x- und y-Koordinatenachsen schon nicht mehr als einfache harmonische Schwingungen. Sie können jedoch immer in eine FOURIERsche Reihe zerlegt werden und stellen somit das Ergebnis der Superposition einfacher harmonischer Schwingungen dar. Nehmen wir die Hauptachsen der Ellipse als Koordinatenachsen, dann haben wir

$$x = a\cos\omega t + a'\cos 2\omega t + a''\cos 3\omega t,$$
$$y = b\sin\omega t + b'\sin 2\omega t + b''\sin 3\omega t.$$

Berechnen wir wie im § 65 die mittleren Intensitäten, die den Schwingungen in bezug auf die x- und y-Achsen entsprechen, und addieren diese Intensitäten (denn die Schwingungen in zueinander senkrechten Richtungen interferieren nicht), dann zeigt sich, daß die Strahlung einer Summe von Oszillatoren mit den Frequenzen ω, 2ω, 3ω, ... entspricht.

Auf diese Weise strahlt ein sich auf einer KEPLERschen Ellipse bewegendes Elektron ein ganzes Frequenzspektrum aus, das aus der Grundfrequenz und ihren harmonischen Obertönen besteht.

§ 72. Das magnetische Bahnmoment und das Theorem von LARMOR

Ein Elektron, das auf einer Bahn umläuft, stellt einen Kreisstrom dar. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik muß ein solcher Kreisstrom ein bestimmtes magnetisches Moment besitzen, d. h. sich in einem magnetischen Felde wie ein magnetischer Dipol verhalten. Andererseits muß vom mechanischen Standpunkt der Elektronenkreisstrom infolge der schnellen Drehung des Elektrons die Eigenschaften eines Kreisels besitzen. Es gibt eine bestimmte Beziehung zwischen den magnetischen Eigenschaften einer Elektronenbahn, die durch ihr magnetisches Moment charakterisiert werden, und zwischen ihren mechanischen Eigenschaften, als deren Maß der Drehimpuls erscheint. Wir wollen diese Beziehung ableiten.

Wie aus der Elektrodynamik bekannt ist, ist das magnetische Moment eines geschlossenen Stromes

$$M = \frac{1}{c} JS, \tag{72,1}$$

worin J die Stromstärke in elektrostatischen Einheiten, S die vom Strom umflossene Fläche und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Ist die Anzahl der Umläufe des Elektrons auf der Kreisbahn $\nu = \frac{1}{T}$, wo T die Periode eines Umlaufes ist, dann ist offensichtlich

$$J = e\nu = \frac{e}{T}. \tag{72,2}$$

Deshalb ist

$$M = \frac{1}{c} e\nu\pi r^2$$

oder, wenn wir ν durch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ ersetzen,

$$M = \frac{e}{2c}\,\omega r^2 = \frac{e}{2mc}\,mr^2\omega\,. \tag{72,3}$$

Nun stellt $mr^2\omega = mr^2\dot{\varphi}$ offenbar den Drehimpuls l der Elektronenbahn dar. Somit ist

$$M = \frac{e}{2mc}\,l\,. \tag{72,4}$$

Dies ist aber die gesuchte Beziehung.

Stellen wir uns jetzt ein Atom, das ein Bahnelektron enthält, in ein Magnetfeld versetzt vor. Da nun das Atom ein bestimmtes magnetisches Moment besitzt, so muß es sich im Feldinnern wie ein Magnet verhalten und sich mit seinem magnetischen Moment parallel oder antiparallel zum Feld einstellen. Dies wird jedoch dadurch verhindert, daß das Atom gleichzeitig auch als Kreisel erscheint. Hieraus folgt, daß sich ein Atom in einem magnetischen Felde ebenso verhalten muß, wie sich ein gewöhnlicher Kreisel im Schwerefeld der Erde benimmt; das Atom beschreibt eine Präzessionsbewegung um die Feldrichtung. Wenn wir jetzt die Bahn des Elektrons vom Standpunkt eines unbewegten Koordinatensystems betrachten, dann ist sie nicht mehr eben und wird sehr verwickelt. Die Betrachtung vereinfacht sich bedeutend, wenn wir ein Koordinatensystem einführen, das mit der Bahn präzessiert. In einem solchen Koordinatensystem behält die Bahn ihre Form bei, und es bleibt nur die Winkelgeschwindigkeit der Präzession zu bestimmen.

Wir führen zwei Koordinatensysteme ein: das eine von ihnen ist mit der Richtung des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ verknüpft. Dieses System werden wir das „unbewegte" System nennen. Das zweite, sich bewegende System ist einfach mit der Bahn des Elektrons verbunden und präzessiert um das „unbewegte" System. Die Präzessionsachse stimmt mit der Richtung des Feldes überein. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession sei ω_L; die Geschwindigkeit des sich auf der Bahn bewegenden Elektrons sei im nichtbewegten Koordinatensystem v und im bewegten v'. In dem bewegten System wirken auf das Elektron zusätzliche Trägheitskräfte, die Zentrifugalkraft $m\varrho\omega_L^2$, worin ϱ die Entfernung des Elektrons von der Präzessionsachse ist, und die Coriolis-Kraft $\vec{C} = 2m \cdot [\mathfrak{v}'\vec{\omega}_L]$. Nehmen wir an, daß die lineare Geschwindigkeit, die sich dem Elektron durch die Präzessionsbewegung mitteilt, klein im Vergleich zur Bahngeschwindigkeit des Elektrons ohne Präzession sei, d.h., daß

$$\varrho\omega_L \ll v\,,$$

dann können wir die Zentrifugalkraft im Vergleich zur Coriolis-Kraft vernachlässigen. Die Abschätzung des Grades der Annäherung, die aus dieser Annahme folgt, rechtfertigt diese Tatsache vollständig. In den Grenzen derselben Näherung kann weiterhin in dem Ausdruck für die Coriolis-Kraft die Geschwindigkeit v' durch die Geschwindigkeit v ersetzt werden. Somit ist

$$\vec{C} = 2m\,[\mathfrak{v}\vec{\omega}_L]\,. \tag{72,5}$$

Wir wissen ferner, daß auf das sich im Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegende Elektron die Kraft

$$\mathfrak{F} = -\frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{72,6}$$

wirkt. Das Minuszeichen ist dadurch bedingt, daß die Ladung des Elektrons negativ ist. Ist die Richtung des Feldes $\mathfrak{H}$ der Präzessionsachse parallel, so können wir uns leicht davon überzeugen, daß die Kräfte $\vec{C}$ und $\mathfrak{F}$ direkt entgegengesetzt zueinander wirken, wenn wir nach der bekannten Regel für das Vektorprodukt die Richtungen der Kräfte $\vec{C}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen. Damit die Bahn ihre Abmessungen und Form beibehält, müssen sie zahlenmäßig einander gleich sein, d. h. $C = -F$. (72,5) und (72,6) ergeben

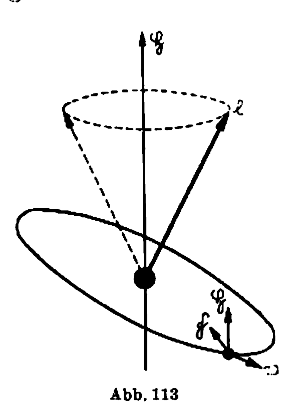
$$2 m v \omega_L \sin(\mathfrak{v}, \vec{\omega}_L) = \frac{e}{c} v \, |\mathfrak{H}| \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}) . \tag{72,7}$$

Da die Präzessionsachse parallel zur Feldrichtung ist, folgt

$$\sin(\mathfrak{v}, \vec{\omega}_L) = \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}) ,$$

und (72,7) ergibt

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} \, |\mathfrak{H}| . \tag{72,8}$$


Abb. 113

Das erhaltene Resultat können wir folgendermaßen formulieren: In einem Koordinatensystem, das in bezug auf das Magnetfeld mit der Kreisfrequenz

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} \, |\mathfrak{H}|$$

präzessiert, beschreibt ein Elektron in einem schwachen Magnetfeld dieselbe Bahn wie ohne Feld. *Die Wirkung des Magnetfeldes auf die Elektronenbahn können wir auf die Übertragung der Präzession mit der Geschwindigkeit* Ω *auf diese Bahn zurückführen* (Abb. 113). Darin besteht das Theorem von LARMOR.

Übung: Eine Lichtquelle liege in einem Magnetfeld von 40000 Oersted. Es ist die LARMOR-Frequenz der Präzession der Elektronenbahn auszurechnen und die Wellenlänge zu bestimmen, die dieser Frequenz entspricht. (Lösung: $\lambda = 0{,}54$ cm.)

§ 73. Der ZEEMAN-Effekt

Es ist bekannt, daß FARADAY am Ende seines Lebens angestrengt nach Erscheinungen suchte, die das elektromagnetische Feld mit dem Licht verknüpfen sollten. Nach seinen eigenen Aussagen strebte er danach, „die Kraftlinien zu beleuchten und das Licht magnetisch zu machen". Bekannt ist auch, daß es ihm gelang, die „Magnetisierung des Lichtes" in Gestalt der von ihm entdeckten Drehung der Polarisationsebene im Magnetfeld zu beobachten (FARADAY-Effekt). In dieser Richtung weiter fortschreitend, versuchte er im Jahre 1862, jedoch ohne Erfolg, den Einfluß des magnetischen Feldes auf die Spektrallinie zu entdecken. 34 Jahre später, im Jahre 1896 gelang es ZEEMAN, mit Hilfe bedeutend stärkerer Felder und genauerer Spektralapparate zu beobachten, daß die Spektrallinien in einige Komponenten zerlegt werden, wenn man die Lichtquelle zwischen die Pole eines Elektromagneten bringt.

Diese Erscheinung wurde von LORENTZ auf Grund der Elektronentheorie quantitativ erklärt. Nach der LORENTZschen Theorie muß die Spektrallinie bei einer Beobachtung senkrecht zur Feldrichtung in drei Komponenten zerlegt werden.

die ein symmetrisches Bild ergeben (Abb. 114b) und bei denen die Entfernung zwischen der Mittellinie und jeder der äußeren Linien in der Frequenzskala

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi mc}\,|\mathfrak{H}|\ \mathrm{s}^{-1} \tag{73,1}$$

sein muß. Die aufgespaltenen Linien müssen linear polarisiert sein: die äußeren Linien senkrecht zum Feld und die mittlere Linie parallel zum Feld. Bei der Beobachtung in der Feldrichtung muß die Mittellinie verschwinden, und die äußeren Linien müssen zirkularpolarisiert bei entgegengesetzter Drehrichtung sein (Abb. 114a).

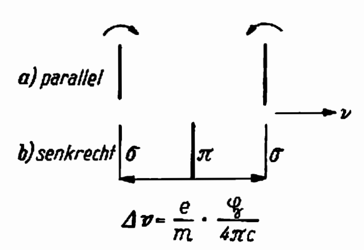


Abb. 114. Zerlegungsschema einer Spektrallinie

In vielen Fällen bestätigten sich alle diese Vorhersagen der Theorie mit erstaunlicher Genauigkeit. In einer großen Anzahl von Fällen war die Aufspaltung bedeutend verwickelter: die Anzahl der Komponenten ist größer als drei, die Größe der Aufspaltung stimmt nicht mit der nach der Formel (73,1) berechneten überein, obwohl sie mit ihr in einfacher Beziehung steht.

Die aus der Lorentzschen Theorie folgende Aufspaltung wird der *normale Zeeman-Effekt* genannt. Das in allen übrigen Fällen beobachtete Bild heißt der *anomale oder der zusammengesetzte Zeeman-Effekt.*

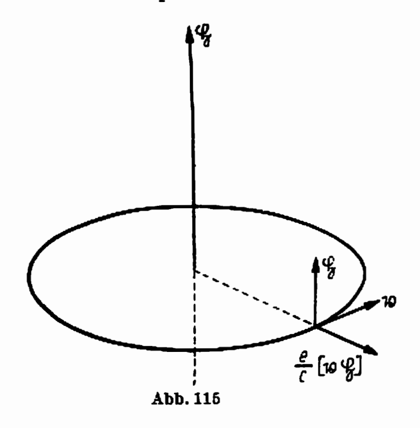


Abb. 115

Suchen wir nun die Erklärung des normalen Zeeman-Effektes vom Gesichtspunkt der klassischen Elektronentheorie. Wir betrachten ein Elektron, das sich auf einer Kreisbahn bewegt. Es möge beispielsweise ein Wasserstoffatom mit einem Kern der Ladung $+e$ sein, um den sich ein Elektron bewegt. Das Magnetfeld sei senkrecht zur Bahnebene gerichtet (Abb. 115).

Die Kraft, die das Elektron in der Bahn hält, ist gleich

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \tag{73,2}$$

Diese Kraft ist gleich der Zentrifugalkraft

$$\frac{e^2}{r^2} = mr\omega_0^2, \tag{73,3}$$

worin ω_0 die Kreisfrequenz des Elektrons ohne magnetisches Feld ist. Bei Einschaltung des Magnetfeldes wirkt auf das Elektron außer der Coulombschen Kraft (73,2) noch die Lorentzsche Kraft, die gleich $\frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$ ist. Benutzen wir jetzt zur Bestimmung der Richtung der Lorentzschen Kraft die bekannte Regel der Rechtsschraube. Wir können aus der Abb. 115 leicht ersehen, daß diese Kraft in Richtung des Radius liegt. Trotzdem zeigt sich der Einfluß des Magnetfeldes

nicht darin, daß sich der Bahnradius vergrößert oder verkleinert, sondern darin, daß sich bei ungeändertem Bahnradius die Winkelgeschwindigkeit der Elektronendrehung ändert.

Diese Behauptung erscheint unerwartet, kann jedoch streng mathematisch bewiesen werden (siehe Anhang III am Ende des Buches). Wir werden hier diese Rechnung nicht ausführen, sondern uns auf die folgenden Erläuterungen beschränken. Beim Einschalten des Magnetfeldes erreicht dieses nicht sofort seinen Endwert, sondern bildet sich erst im Verlaufe eines bekannten Zeitraumes aus. Dieser Zeitraum ist im Vergleich zur Dauer eines Elektronenumlaufs so groß, daß alle Prozesse, ähnlich den adiabatischen in der Thermodynamik, als unendlich langsam betrachtet werden können. Deshalb muß in jedem Augenblick die Gleichheit der Summe der COULOMBschen und der LORENTZschen Kraft einerseits und der Zentrifugalkraft andererseits erfüllt werden. Die letztere ändert sich jedoch, da das Anwachsen des magnetischen Feldes nach dem FARADAYschen Gesetz der elektromagnetischen Induktion (genauer gesagt, nach der zweiten MAXWELLschen Gleichung der Elektrodynamik) das Auftreten eines elektrischen Wirbelfeldes mit einer Symmetrieachse nach sich zieht, die mit der Richtung des Magnetfeldes übereinstimmt. Dieses Wirbelfeld wirkt auf das Elektron; es beschleunigt oder verzögert es. Daß der Prozeß in der beschriebenen Weise stattfindet, ist daraus ersichtlich, daß die LORENTZsche Kraft selbst die Kreisfrequenz nicht ändern kann, da sie senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist und folglich keinerlei Arbeit leistet.

Das Gleichgewicht zwischen den auf das Elektron wirkenden Kräften und der Zentrifugalkraft muß zu jedem Zeitpunkt vorhanden sein, also auch in dem endgültigen Zustand, in dem das Magnetfeld seinen stationären Wert $|\mathfrak{H}|$ erreicht hat. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons in diesem Zustand mit ω, dann haben wir zuerst für die Zahlengröße der LORENTZschen Kraft $\frac{e}{c} r\omega|\mathfrak{H}|$, da $v = r \cdot \omega$ und $\sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}) = 1$; letzteres, weil das Feld senkrecht zur Bahnebene liegt. Zweitens wird die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{e^2}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega|\mathfrak{H}| = mr\omega^2$$

sein oder infolge (73,3)

$$mr\omega_0^2 + \frac{e}{c} r\omega|\mathfrak{H}| = mr\omega^2 ,$$

woraus

$$\omega^2 - \frac{e}{mc}|\mathfrak{H}|\omega - \omega_0^2 = 0 \tag{73,4}$$

folgt. Der Koeffizient bei ω im zweiten Glied ist offensichtlich gleich der doppelten LARMOR-Frequenz ω_L, da

$$\omega_L = \frac{e}{2mc}|\mathfrak{H}| \tag{72,8}$$

und folglich

$$\omega^2 - 2\,\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0 . \tag{73,5}$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung für ω, dann erhalten wir

$$\omega = \omega_L \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L{}^2} . \tag{73,6}$$

Im Vergleich zu ω_0 ist die Größe ω_L klein. Die stärksten Magnetfelder, die bis jetzt hergestellt werden konnten (nach bekannten Versuchen von P. L. KAPITZA), erreichten annähernd 500000 Oersted. In solchen Feldern ist

$$\omega_L = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} |\mathfrak{H}| = 0{,}5 \cdot 1{,}76 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4{,}4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Indessen ist ω_0 für Spektrallinien, die im sichtbaren oder ultravioletten Teil des Spektrums liegen, von der Größenordnung von 10^{16} s^{-1} und $\left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^2$ von der Größenordnung 10^{-8}. Wir können mit vollem Recht die Größe $\omega_L{}^2$ unter der Wurzel in (73,6) im Vergleich zu ω_0^2 vernachlässigen und schreiben

$$\omega = \omega_L \pm \omega_0$$

oder

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_L, \quad \omega_2 = -\omega_0 + \omega_L. \tag{73,7}$$

Die Frequenz des Elektrons, das sich im Magnetfeld entgegen dem Uhrzeigersinne (vom Ende des Vektors betrachtet) bewegt, vergrößert sich um ω_L, und die Frequenz des sich im umgekehrten Sinne bewegenden Elektrons vermindert sich um dieselbe Größe. Gehen wir jetzt von der Kreisfrequenz zur linearen Frequenz über, dann erhalten wir

$$\Delta\nu = \pm \frac{\omega_L}{2\pi} = \pm \frac{e}{4\pi mc} |\mathfrak{H}|. \tag{73,8}$$

Das ist die LORENTZsche Formel (73,1).

§ 74. Der ZEEMAN-Effekt. Der allgemeine Fall

In dem vorigen Paragraphen betrachteten wir den speziellen Fall des Einflusses eines Magnetfeldes auf eine Elektronenbahn, deren Ebene senkrecht zur Feldrichtung liegt. Hierbei überzeugten wir uns, daß in diesem Fall die Änderung der Kreisfrequenz des Elektronenumlaufes gerade gleich der LARMOR-Frequenz ω_L ist [siehe (73,7)]. Wir betrachten nun den allgemeineren Fall und zeigen, daß die Theorie die Erscheinungen einschließlich der Polarisation der Linien genau beschreibt.

Wir nehmen einen Dipol an, dessen positive Ladung im Koordinatenanfangspunkt liegt, während das Elektron mit der Ladung e mit der positiven Ladung durch eine quasielastische Kraft verbunden ist. Die Gleichung der freien Elektronenschwingungen ist

$$m\ddot{\mathfrak{r}} + k\mathfrak{r} = 0.$$

Bei Anwesenheit eines Magnetfeldes erscheint die LORENTZ-Kraft $-\frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$, und die Schwingungsgleichung wird nach der Division durch m und Ersetzen von $\frac{k}{m}$ durch ω_0^2 die Form

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \omega_0^2\mathfrak{r} = -\frac{e}{mc}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{74,1}$$

annehmen. Nehmen wir jetzt an, daß das Magnetfeld längs der z-Achse gerichtet ist, daß also

$$|\mathfrak{H}_x| = |\mathfrak{H}_y| = 0, \quad |\mathfrak{H}_z| = |\mathfrak{H}|.$$

Mit $\frac{e}{mc}\,\mathfrak{H}$, der doppelten LARMOR-Frequenz, ergeben sich die der Vektorgleichung (74,1) entsprechenden skalaren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\omega_L \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\omega_L \dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z \qquad\quad &= 0. \end{aligned}\right| \tag{74,2}$$

Die Lösungen der ersten beiden Differentialgleichungen werden in der Form

$$x = a e^{i\omega t}, \quad y = b e^{i\omega t} \tag{74,3}$$

zu suchen sein, wobei die Amplituden a und b komplex sind. Setzen wir (74,3) in (74,2) ein, dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega_L\omega b &= 0, \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega_L\omega a &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{74,4}$$

Wir erhalten ein System linearer homogener Gleichungen für die Unbekannten a und b. Bekanntlich hat ein solches System nur dann eine von null verschiedene Lösung, wenn die Determinante aus den Koeffizienten gleich null ist, d. h.

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2, & 2i\omega\omega_L \\ -2i\omega_L\omega, & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{74,5}$$

woraus wir nach der Entwicklung der Determinante[1])

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\omega_L^2\omega^2 \tag{74,6}$$

finden. Wir erhalten auf diese Weise die beiden quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega'^2 &= 2\omega_L\omega', \\ \omega_0^2 - \omega''^2 &= -2\omega_L\omega''. \end{aligned} \tag{74,7}$$

Von den vier Lösungen dieser Gleichungen sind nur zwei positiv,

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}, \\ \omega'' &= \omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}. \end{aligned}\right\} \tag{74,8}$$

Bedenken wir, daß $\omega_L \ll \omega_0$, so folgt hieraus

$$\omega' = \omega_0 - \omega_L, \quad \omega'' = \omega_0 + \omega_L,$$
$$\omega'' - \omega' = 2\omega_L = \frac{e}{mc}\,|\mathfrak{H}|,$$

und die Verschiebung der linearen Frequenz in bezug auf ν_0 wird wie früher

$$\Delta\nu = \pm\frac{\omega_L}{2\pi} = \pm\frac{e}{4\pi mc}\,|\mathfrak{H}|. \tag{74,9}$$

Die Frequenzen der Schwingungen, die in den x- und y-Achsen, d. h. senkrecht zum Feld $\mathfrak{H}$, stattfinden, verschieben sich gerade um eine Größe, die durch die LORENTZsche Formel angegeben wird.

[1]) Die Bedingung (74,5) hat folgenden einfachen Sinn: Aus der ersten Gleichung (74,4) erhalten wir $\frac{a}{b} = -\frac{2i\omega_L\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, aus der zweiten $\frac{a}{b} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega_L\omega}$.

Damit die Lösungen beider Gleichungen übereinstimmen, müssen die rechten Seiten der Gleichungen unter sich gleich sein $\frac{-2i\omega_L\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega_L\omega}$. Hieraus erhalten wir sofort (74,6).

Wir können jetzt auch den Zustand der Polarisation beider verschobener Komponenten bestimmen. Aus (74,4) finden wir

$$\frac{a}{b} = -i\frac{2\omega_L\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{74,10}$$

Setzen wir hier $\omega = \omega'$, die Frequenz der *zum „roten Ende"* hin verschobenen Komponente, und bedenken, daß nach der ersten Gleichung (74,7) $2\,\omega_L\omega' = \omega_0^2 - \omega'^2$, dann erhalten wir $\frac{a}{b} = -i$ oder $a = -ib = be^{-i\frac{\pi}{2}}$. Dies bedeutet, daß die Schwingung in der x-Achse in bezug auf die Phase der Schwingung in der y-Achse um $\frac{\pi}{2}$ *zurückbleibt*. Beide Schwingungen ergeben eine Kreisbewegung, die nach der angegebenen Phasenbeziehung im Uhrzeigersinne umläuft, d. h. rechtspolarisiert ist.

Setzen wir analog in (74,10) $\omega = \omega''$, d. h. die Frequenz der zur violetten Seite verschobenen Komponente, und berücksichtigen die zweite Gleichung von (74,7), dann erhalten wir

$$\frac{a}{b} = i \text{ oder } a = be^{i\frac{\pi}{2}},$$

woraus folgt, daß die Komponente ω'' *linkspolarisiert* ist. Die dritte Gleichung des Systems (74,2) endlich,

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

zeigt, daß die Schwingung in der z-Achse ohne Frequenzänderung vor sich geht. Sie ist linear polarisiert. Ein Beobachter, der den Kraftlinien des Magnetfeldes (Längsrichtung) entgegen schaut, kann diese dritte Komponente nicht sehen, da die Ausstrahlung des Dipols in Richtung der Schwingungen gleich null ist.

Somit besteht in der Längsrichtung das Bild des Zeeman-Effektes aus zwei *aufgespaltenen* Linien; beide sind zirkularpolarisiert, die zur roten Seite verschobene Linie ist rechtspolarisiert und die nach der violetten Seite verschobene Linie linkspolarisiert.

Ein Beobachter, der senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes, zum Beispiel in Richtung der x-Achse blickt, sieht eine nichtverschobene Linie, da die Schwingungen in der z-Achse eine maximale Ausstrahlung in der senkrechten Richtung geben. Er sieht aber aus folgendem Grunde dazu noch *zwei* verschobene Komponenten: ein in der x-Achse schwingender Dipol gibt in Richtung dieser Achse keine Strahlung. Aber beide Schwingungen in der xy-Ebene geben zirkularpolarisierte Komponenten. Deshalb wird der Beobachter, der der x-Achse entgegenblickt, die Projektionen der Kreisschwingungen auf der y-Achse sehen, und der Beobachter, der in Richtung der y-Achse blickt, wird die Projektionen der Kreisschwingungen auf der x-Achse sehen. Das Bild des Zeeman-Effektes besteht auf diese Weise aus drei Linien: aus einer nichtverschobenen und aus zwei verschobenen Linien. Alle Linien sind linearpolarisiert: die nichtverschobene entspricht der Schwingung eines elektrischen Vektors in Richtung des Feldes, die verschobenen entsprechen Schwingungen senkrecht zum Feld.

Wie schon am Anfang dieses Paragraphen erwähnt wurde, werden im Falle des *einfachen Zeeman-Effektes* alle dargelegten Ergebnisse der Theorie vollkommen bestätigt. Dagegen kann der zusammengesetzte Effekt nur im Rahmen der Quantentheorie erklärt werden (siehe Bd. II, Abschnitt XV).

VI. DIE STRAHLUNG DES ABSOLUT SCHWARZEN KÖRPERS UND DIE HYPOTHESE DER ENERGIEQUANTELUNG

§ 75. Die klassische Physik und das Problem der Wärmestrahlung

In dem vorigen Abschnitt zeigten wir, auf welche Weise die klassische Physik die elektromagnetische Ausstrahlung der Atome erklärt. Wir sahen, daß einige Folgerungen aus der elektromagnetischen Lichttheorie und der Elektronentheorie gut mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen, z. B. die Verteilung der Strahlung auf die verschiedenen Richtungen, die Breite der Spektrallinien, der normale ZEEMAN-Effekt und eine Reihe anderer Erscheinungen, die in unserer Darlegung nicht weiter berührt wurden. Daneben erkannten wir aber auch, daß einige Folgerungen entweder dem Experiment widersprechen oder nur eine begrenzte Anwendbarkeit haben. So entspricht beispielsweise der Charakter der elektromagnetischen Linienspektren nur im Gebiet langer Wellen (im langwelligen infraroten Gebiet und bei Radiowellen) den Forderungen der klassischen Theorie, während das optische Gebiet des Spektrums ihr scharf widerspricht.

Eine ernste Niederlage jedoch erlitt die klassische Physik, als sie auf das Problem der Wärmestrahlung angewandt wurde. Gerade bei dem Studium dieses Problems wurden zum ersten Male die schwachen Stellen der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik aufgedeckt und die Einführung der Quantenhypothese gefordert, die so entscheidend den ganzen Vorstellungen der klassischen Physik widerspricht.

Um den Leser sofort in das Wesen der Dinge einzuführen, werden wir vor allem zeigen, zu welchen unversöhnlichen Widersprüchen die klassische Physik in dieser Frage führt.

Ein alltäglicher Versuch lehrt uns, daß ein Festkörper, der bis zu einer genügend hohen Temperatur erhitzt wird, glüht und sichtbares Licht ausstrahlt. Bei niedrigeren Temperaturen jedoch strahlt er Energie in Form der sogenannten Wärmewellen aus. Es ist bekannt, daß der äußere Unterschied zwischen den sichtbaren und den Wärmestrahlen nur auf den Besonderheiten des physiologischen Apparates unserer Sinnesorgane beruht und keineswegs mit der Natur dieser oder jener Strahlen in Verbindung steht. Deshalb werden wir im weiteren von Wärmestrahlung sprechen und hierbei nicht spezielle lange Wärmestrahlen im Auge haben, sondern nur die Art ihrer Entstehung damit unterstreichen.

Stellen wir uns jetzt einige auf verschiedene Temperaturen erhitzte Körper vor und setzen diese Körper in einen Hohlraum, der aus ideal reflektierenden

Wänden besteht. Wenn auch im Inneren dieses Hohlraumes ein absolutes Vakuum herrscht, so werden die Körper dennoch Energie durch Strahlung austauschen. Die Strahlung eines jeden Körpers hängt nur von seiner eigenen Temperatur und nicht von den Temperaturen der umgebenden Körper ab, trotzdem werden sich jetzt die wärmeren Körper abkühlen, da sie eine größere Energie ausstrahlen, als sie von den umgebenden Körpern aufnehmen, während sich die weniger erhitzten Körper erwärmen, da sie mehr Energie aufnehmen als abgeben. Da sich außerdem die elektromagnetischen Wellen, die von allen diesen Körpern ausgestrahlt werden, mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, so wird das Innere des Hohlraums immer von Strahlungsenergie erfüllt sein. *Der Versuch zeigt*, daß sich letzten Endes unbedingt ein stationärer Zustand einstellt, bei dem alle Körper die gleiche Temperatur annehmen; sie absorbieren in der Zeiteinheit ebensoviel Energie, wie sie abgeben, und die Strahlungsdichte im Raum zwischen ihnen erreicht irgendeine bestimmte Größe, die der vorhandenen Temperatur entspricht. Diese Tatsache ist so gut bekannt, daß sie als natürliche Folgerung aus den Gesetzen der klassischen Physik erscheint, während sie gerade, wenn man tiefer blickt, vom Standpunkt der *klassischen* Physik als vollkommen unverständlich erscheint.

Erklären wir dies durch ein einfaches Beispiel. Nehmen wir an, daß sich in unserem Hohlraum ein Stück Eisen befindet, dessen Oberfläche derart geschwärzt ist, daß sie alle auf ihr auffallende Energie vollständig absorbiert. Mit großer Genauigkeit ist bekannt, daß ein solches Stück Eisen bei einer Temperatur von 0° C von jedem Quadratzentimeter seiner Oberfläche $3 \cdot 10^5$ erg in der Sekunde ausstrahlen wird und bei Wärmegleichgewicht gleichzeitig auch aus dem umgebenden Raum die gleiche Energie in der Sekunde aufnimmt. Ebenso zuverlässig ist bekannt, daß im Raum zwischen den Wänden des Hohlraumes und der Oberfläche des Eisenstückchens, d. h. *in jenem Teil des Hohlraumes, der nicht von Materieteilchen eingenommen wird*, die Gleichgewichtsdichte der Energie bei 0° C $4 \cdot 10^{-5}$ erg/cm³ ist. Andererseits ist die Dichte der Wärmeenergie im Innern desselben Eisenstückchens bei der gleichen Temperatur angenähert gleich $8 \cdot 10^9$ erg/cm³; sie ist also $2 \cdot 10^{14}$ größer als die Dichte der Strahlungsenergie. Bekanntlich ist diese Wärmeenergie in den Schwingungen der Eisenatome um ihre Gleichgewichtslagen enthalten. Wir kommen auf diese Weise zu dem erstaunlichen Schluß, daß sich im thermodynamischen Gleichgewicht zwischen den schwingenden Atomen der Materie und der elektromagnetischen Ausstrahlung fast die gesamte Energie in den Schwingungen der Atome konzentriert und nur ein ganz verschwindender Bruchteil auf das Konto der sich mit ihnen im Gleichgewicht befindenden Strahlung entfällt.

Gerade diese Tatsache erscheint vom Standpunkt der klassischen Mechanik als vollständig unverständlich. Stellen wir uns das folgende einfache Modell des betrachteten Versuches vor: Auf einer Wasseroberfläche schwimmen durch Federn miteinander verbundene Korken, die in bezug aufeinander schwingen können. Regen wir diese Schwingungen an, dann werden sie ihre Energie dem Wasser mitteilen („ausstrahlen“), auf dessen glatter Oberfläche dann Wellen entstehen. Diese Wellen werden die Wasseroberfläche in den verschiedenen Richtungen zerfurchen, an den Wänden des Wasserbehälters reflektiert werden, immer schwächer erscheinen und infolge der inneren Reibung ihre Energie allmählich in Wärme verwandeln. Es ist völlig klar, daß letztlich die Korken ihre Schwingungen einstellen,

wenn ihre gesamte Energie auf das umgebende Medium übertragen sein wird. In der klassischen Physik ist die Vorstellung unmöglich, daß sich die Korken im Endzustand in intensiver Schwingung befinden, während das Wasser keinerlei Energie empfangen hat. Aber gerade dies findet im Falle des Gleichgewichtes zwischen einem erhitzten materiellen Körper und der Ausstrahlung statt. Wir sahen doch, daß sich fast die gesamte Energie in den Schwingungen der Atome konzentrierte, während auf die Ausstrahlung nur ein verschwindender Energieanteil kam.

Betrachten wir jetzt ein anderes Versuchsmodell. Als mechanisches Modell eines strahlenden Körpers mögen an Stelle von Probekugeln Schrotkörnchen dienen, die auch mit leichten Federn verbunden sind und in eine mit Luft gefüllte Kammer gesetzt werden. Versetzen wir diese Schrotkörner in kräftige Schwingungen und überlassen sie sich selbst, dann werden sie in der Luft akustische Wellen erregen, deren Amplituden sich wegen der inneren Reibung der Luft allmählich verkleinern und schließlich null werden, ebenso wie Wellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche. Im Endzustand werden die Schrotkörner in ihren Gleichgewichtslagen ruhen, und ihr gesamter Anfangsvorrat an Energie wird auf die Luftmoleküle übergegangen sein. Genauer gesagt, die Schrotkörnchen werden noch unendlich kleine Brownsche Bewegungen mit einer ihrer Masse entsprechenden Geschwindigkeit ausführen. Aber auch bei dieser genaueren Fassung wird die gesamte Energie des Systems praktisch den Gasmolekülen übertragen sein.

Die kinetische Gastheorie gibt eine vollständige Erklärung für einen solchen Vorgang. Die kinetische Energie zweiatomiger Luftmoleküle im Gleichgewichtszustand bei einer Temperatur T ist bekanntlich $\frac{5}{2} nkT$, wobei n die Anzahl der Moleküle ist. Die kinetische Energie von n' Schrotkörnern, die eine Brownsche Bewegung ausführen, ist gleich $\frac{3}{2} n'kT$. Die Gesamtenergie des ganzen Systems muß daher im Gleichgewicht $\left(\frac{5}{2} n + \frac{3}{2} n'\right) kT$ sein. Da nun die Anzahl der Moleküle n unermeßlich größer als die Anzahl der Schrotkörnchen n' ist, muß die Gesamtenergie praktisch gleich $\frac{5}{2} nkT$ sein. Im Gleichgewicht wird die Energie vollständig von den Schrotkörnchen auf die Luftmoleküle übergehen.

Wir sehen auf diese Weise, daß das beschriebene Bild eines „ausstrahlenden" Systems von Teilchen und einem Medium, in dem sich die Strahlung ausbreitet, direkt dem widerspricht, was nach der Erfahrung im Falle des Gleichgewichtes zwischen einem materiellen Körper und einem elektromagnetischen Feld (Wärmestrahlung) stattfindet. Die Schwierigkeit, die in Verbindung mit dem Problem der Wärmestrahlung entstand, liegt gerade darin, daß nach der klassischen Physik auch im Falle des Gleichgewichtes der elektromagnetischen Ausstrahlung von materiellen Körpern in einem geschlossenen Hohlraum praktisch die gesamte Energie auf das elektromagnetische Feld übergehen müßte.

§ 76. Die Gleichgewichtsstrahlung im geschlossenen Raum

Beschäftigen wir uns nun mit der Betrachtung des Strahlungsproblems, um uns von der Richtigkeit des gezogenen Schlusses zu überzeugen. Wir stellen uns wieder einen Hohlraum mit wärmeundurchlässigen Wänden vor, die auf irgendeine be-

stimmte Temperatur T erhitzt werden. Die Wände des Hohlraums werden elektromagnetische Strahlung aussenden und Wellen absorbieren, die auf sie aus dem Innern des Hohlraums fallen; bei Gleichgewicht wird in 1 s ebensoviel ausgestrahlt wie absorbiert werden, und da sich die Strahlung mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, wird im Innern des Hohlraums ein elektromagnetisches Feld mit der konstanten Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi} (\overline{\mathfrak{E}^2} + \overline{\mathfrak{H}^2}) \tag{76,1}$$

bestehen.

An Stelle der räumlichen Strahlungsdichte u ist es besonders für praktische Zwecke bequemer, eine andere Größe zu benutzen, die spezifische Intensität oder die Oberflächenhelligkeit der Strahlung. Diese Größe wird auf folgende Weise bestimmt: Wir betrachten in dem Strahlungsfeld eine beliebig orientierte Fläche $d\sigma$, durch welche in allen möglichen Richtungen eine Strahlung hindurchgeht. Wir können eine doppelte Mannigfaltigkeit von Einheitskegeln durch die Fläche $d\sigma$ annehmen und uns weiterhin vorstellen, daß sich die Strahlung innerhalb dieser Kegel ausbreitet. Die Energie, die in der Zeiteinheit durch die Fläche $d\sigma$ im Innern des Kegels $d\Omega$ hindurchströmt, dessen Achse mit der Flächennormalen den Winkel ϑ bildet, ist gleich

$$d\Phi = I\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega\,. \tag{76,2}$$

Die Größe I heißt die spezifische Intensität der Strahlung und ist folglich der Energiestrom, der in der Zeiteinheit durch die Fläche $d\sigma = 1$ cm^2 hindurchgeht und sich im Innern des Raumwinkels in Richtung der Normalen zur Fläche ausbreitet. Um die Größe des Gesamtstromes zu erhalten, der in der Zeiteinheit von einer Seite durch $d\sigma$ hindurchgeht, müssen wir den Ausdruck (76,2) über alle Richtungswinkel φ von 0 bis 2π und über alle Winkel ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ integrieren. Beachten wir, daß $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi$ ist, dann erhalten wir

$$\Phi = d\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta\,.$$

Ist die Strahlung isotrop, d. h. hängt I nicht vom Winkel ab, so ist

$$\Phi = \pi I\, d\sigma\,.$$

Offensichtlich spielt die Größe I für die Strahlung die gleiche Rolle wie die Größe der (energetischen) Oberflächenhelligkeit für die Quelle, weshalb oftmals auch I die Oberflächenhelligkeit der Strahlung genannt wird.

Zwischen der Helligkeit I und der räumlichen Strahlungsdichte u besteht eine einfache Beziehung. Nehmen wir irgendeinen Punkt O im Innern des Strahlungsfeldes und stellen uns eine Kugel vor, in deren Zentrum O liegt. Offensichtlich müssen alle Strahlen, die durch den Punkt O hindurchgehen, durch diese Kugel hindurchdringen, und jeder von ihnen trägt einen Anteil zur räumlichen Strahlungsdichte um O bei. Durch Integration und auf Grund einfacher geometrischer Überlegungen[1]) ist leicht zu zeigen, daß für eine linear polarisierte Strahlung

$$u = \frac{4\pi I}{c} \tag{76,3}$$

gilt.

[1]) Siehe beispielsweise M. PLANCK, „Theorie der Wärmestrahlung".

Weiter muß bedacht werden, daß die Wärmestrahlung im Hohlraum ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Zur Beschreibung seiner spektralen Zusammensetzung müssen wir neben den Integrationsgrößen u und I, in denen die Strahlung aller vorhandenen Frequenzen berücksichtigt wird, noch spektrale Größen einführen. Für das unendlich kleine Frequenzintervall $d\nu$ können wir die spektrale Energiedichte du_ν als dem Intervall $d\nu$ proportional annehmen:

$$du_\nu = \varrho_\nu \, d\nu .$$

Der Koeffizient ϱ_ν heißt die spektrale Raumdichte der Strahlung. Für ein kontinuierliches Spektrum, das alle Frequenzen von 0 bis ∞ umfaßt, haben wir

$$u = \int\limits_0^\infty du_\nu = \int\limits_0^\infty \varrho_\nu \, d\nu .$$

Neben ϱ_ν können wir auch die spektrale Oberflächenhelligkeit I_ν einführen und bestimmen sie in analoger Weise, wie dies bei der Integralgröße gemacht wurde. In einem solchen Fall haben wir zwischen ϱ_ν und I_ν dieselbe Beziehung wie zwischen u und I:

$$\varrho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu . \tag{76,4}$$

Endlich muß noch berücksichtigt werden, daß die Strahlung einer bestimmten Frequenz und einer bestimmten Richtung noch durch ihren Polarisationszustand bestimmt wird. Die Strahlung im Innern des Hohlraums ist vollkommen unpolarisiert. Im Hinblick auf die übertragbare Energie ist aber ein nichtpolarisierter Strahl zwei Strahlen äquivalent, die in zueinander senkrechten Ebenen polarisiert sind und die gleiche mittlere Intensität besitzen. Deshalb gilt für die nichtpolarisierte Strahlung

$$I = 2 \int\limits_0^\infty I_\nu \, d\nu ,$$

und für eine nichtpolarisierte, homogene, isotrope Strahlung haben wir

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi}{c} I_\nu . \tag{76,5}$$

§ 77. Das KIRCHHOFFsche Gesetz

Der erste große Schritt in der theoretischen Untersuchung der Gleichgewichtsstrahlung wurde von KIRCHHOFF getan, der auf thermodynamischem Wege zeigte, daß die spektrale Strahlungsdichte ϱ_ν bei konstanter Temperatur überhaupt nicht von der Natur und den Eigenschaften der im Innern des Hohlraums befindlichen Körper abhängt (wobei zu deren Zahl die Wände des Hohlraumes selbst gerechnet werden), wie beispielsweise von der Beschaffenheit ihrer Oberfläche, der Anwesenheit oder Abwesenheit eines Gebietes selektiver optischer Absorption usw. Diese Besonderheit der Gleichgewichtsstrahlung folgt unmittelbar aus dem zweiten thermodynamischen Hauptsatz. Lassen wir einmal den umgekehrten Fall zu und nehmen an, daß die Strahlungsdichte bei Gleichgewicht auf irgendeine Weise von der Natur der im Innern des Hohlraums befindlichen Körper abhängt. Wir würden das Gleichgewicht verletzen, wenn wir zwei sich im Gleich-

gewicht befindende Systeme verbänden, die sich zwar auf gleicher Temperatur befinden, aber aus verschiedenen Körpern bestehen. Dies würde zur Feststellung einer Temperaturdifferenz zwischen den beiden Systemen führen, die zum Bau eines Perpetuum mobile zweiter Art ausgenützt werden könnte.

Kirchhoff fand weiter die wichtige Beziehung zwischen den Emissions- und Absorptionseigenschaften der Körper und der spektralen Helligkeit oder Intensität I_ν (das bedeutet auch ϱ_ν) bei einer gegebenen Frequenz. Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist es notwendig, vor allem die Termini zu vereinbaren.

Fällt eine Strahlung auf einen Körper, so wird ein Teil an der Trennfläche zwischen Körper und umgebendem Medium reflektiert, während der übrige Teil in das Innere des Körpers eindringt. Diese in das Innere eindringende Strahlungsenergie wird teilweise absorbiert und in Wärme verwandelt, teilweise nach einer bzw. mehreren Reflexionen im Innern des Körpers von neuem nach außen treten. Den Quotienten aus der im Innern des Körpers verbleibenden, sich in Wärme verwandelnden Energie und der gesamten auftreffenden Energie eines gegebenen Frequenzintervalles $\nu, \nu + d\nu$ nennt man das Absorptionsvermögen A_ν des Körpers, A_ν ist also dimensionslos und darf nicht mit dem Absorptionskoeffizienten a_ν verwechselt werden, der die relative Schwächung eines Strahlenbündels pro Längeneinheit mißt. Ein Körper kann einen kleinen Absorptionskoeffizienten besitzen; aber bei bedeutender Ausdehnung ein großes Absorptionsvermögen. Die von 1 cm² in 1 s ausgestrahlte Energie heißt das *Emissionsvermögen des Körpers* und wird mit E_ν bezeichnet. Die von Kirchhoff aufgestellte Beziehung lautet dann folgendermaßen:

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = I_\nu = \frac{c}{8\pi}\varrho_\nu. \qquad (77,1)$$

Das Verhältnis des Emissionsvermögens eines Körpers zu seinem Absorptionsvermögen ist gleich der Oberflächenintensität der sich in ihm im Gleichgewicht befindenden Strahlung. Da die spektrale Dichte ϱ_ν (und auch I_ν) nicht von der Natur des Körpers abhängt, besagt die Beziehung (77,1), daß das Verhältnis des Emissionsvermögens eines Körpers zu seinem Absorptionsvermögen für alle Körper ein und dasselbe ist. Diese Beziehung, die der spektralen Dichte einer im Gleichgewichtszustand befindlichen Strahlung proportional ist, erscheint auf diese Weise als eine universelle Funktion, die nur von der Temperatur und der Frequenz abhängt.

Inmitten aller Körper muß ein solcher Körper eine besonders große Bedeutung haben, dessen Absorptionsvermögen gleich 1 ist. Weil dieser Körper alle *auf ihn fallende* Energie absorbiert, nannte ihn Kirchhoff *absolut schwarz*. Nehmen wir an, daß es uns gelingt, einen solchen Körper herzustellen, dann erhalten wir aus der Beziehung (77,1) für $A_\nu = 1$

$$E_\nu = I_\nu = \frac{c}{8\pi}\varrho_\nu. \qquad (77,2)$$

Dies bedeutet, daß das Emissionsvermögen eines absolut schwarzen Körpers ebenfalls als universelle Funktion der Frequenz und Temperatur erscheint. Wird die theoretisch gefundene Formel durch den Ausdruck $\varrho_\nu(\nu, T)$ gegeben und wird diese Formel durch die experimentelle Prüfung, die nur für einen absolut schwarzen Körper durchgeführt wurde, bestätigt, dann können wir die Energieverteilung im

Spektrum eines beliebigen Körpers berechnen, wenn wir nur sein Absorptionsvermögen kennen. Mit Hilfe des Absorptionsspektrums und geometrischer Überlegungen findet man das leicht. Nunmehr wird auch die große Aufmerksamkeit verständlich, die der theoretischen Berechnung der Funktion $\varrho_\nu(\nu, T)$ gewidmet wurde.

In Wirklichkeit gibt es keinen Körper in der Natur, der als absolut schwarz angesehen werden kann, wie auch keine solche Farbe existiert, die, auf die Oberfläche des Körpers aufgetragen, seinen Reflexionskoeffizienten gleich null machen könnte. Aber das KIRCHHOFFsche Gesetz enthüllt die Möglichkeit für den künstlichen Bau eines absolut schwarzen Körpers. Hierfür genügt es, einen Hohlraum zu nehmen, der von gleichmäßig erhitzten Wänden umgeben wird (zum Beispiel einen elektrischen Muffelofen). Dann wird die im Innern auftretende Gleichgewichtsstrahlung durch eine Energieverteilung im Spektrum charakterisiert, die mit dem absolut schwarzen Körper identisch ist. Wird daher in die Wandung des Hohlraumes eine kleine Öffnung gemacht, dann wird die aus dieser Öffnung austretende Strahlung mit der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers identisch sein. Die praktische Ausführung ähnlicher künstlicher absolut schwarzer Körper wird im § 79 behandelt.

§ 78. Die Strahlungsgesetze eines absolut schwarzen Körpers

Die grundlegende Schlußfolgerung, zu der das KIRCHHOFFsche Gesetz führt, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\varrho_\nu d\nu = F(\nu, T)\, d\nu, \tag{78,1}$$

worin $F(\nu, T)$ irgendeine universelle Funktion ist. Die folgende Aufgabe besteht in der Aufstellung dieser Funktion. Nach einer Reihe wichtiger Arbeiten der russischen Physiker W. A. MICHELSON und B. B. GOLIZYN wurde von W. WIEN der bedeutendste Schritt in dieser Richtung unternommen. Er benutzte außer der Thermodynamik auch noch die elektromagnetische Lichttheorie.

Als Ergebnis stellte er die folgende Formel auf:

$$\varrho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{78,2}$$

Hier ist $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ eine Funktion, die mit Hilfe rein thermodynamischer Überlegungen und ohne jede Hypothese über den molekularen Mechanismus der Emission und Absorption aufzustellen sich als unmöglich erwies.

Trotz dieser Unzulänglichkeit spielte die WIENsche Formel eine sehr wichtige Rolle. Erstens führte sie die Ermittlung der Funktion mit den beiden Veränderlichen ν und T auf eine Funktion mit einer Veränderlichen $\frac{\nu}{T}$ zurück, und dies gab die Möglichkeit, aus einer gegebenen Kurve der Energieverteilung im Spektrum bei irgendeiner Temperatur die Kurve für eine beliebige andere Temperatur auszurechnen. Nehmen wir beispielsweise an, daß uns die Kurve für die Temperatur T gegeben sei und wir die Kurve für die Temperatur T_1 ausrechnen wollen. Für die Frequenz ν_1, die die Bedingung $\frac{\nu_1}{T_1} = \frac{\nu}{T}$ befriedigt, ist $\nu_1 = \frac{T_1 \nu}{T}$, und die WIENsche Formel ergibt

$$\varrho(\nu_1, T_1) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T_1}\right) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \varrho(\nu, T).$$

Auf diese Weise genügt es, die Ordinate eines jeden Kurvenpunktes $\varrho\,(\nu,\,T)$ mit dem Verhältnis T_1^3/T^3 zu multiplizieren, um die Kurve $\varrho\,(\nu_1,\,T_1)$ zu erhalten.

Zweitens ist die WIENsche Formel, da sie mit Hilfe der Thermodynamik abgeleitet wurde, unbedingt zuverlässig, und folglich wird jede andere Formel, die mit Hilfe irgendwelcher Vorstellungen über den Strahlungsmechanismus erhalten wird, unbedingt die in dieser WIENschen Formel ausgedrückten Forderungen befriedigen, d. h. außer Konstanten die dritte Potenz der Frequenz und eine Funktion des Quotienten ν/T enthalten.

Trotz der unbestimmten Funktion $F(\nu,T)$ führt die WIENsche Formel zu einigen vollkommen bestimmten quantitativen Beziehungen.

Hiervon können wir uns überzeugen, wenn wir mit Hilfe dieser Formel die integrale Strahlungsdichte u berechnen:

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu\, d\nu = \int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu .$$

Führen wir die neue Veränderliche $\nu/T = \xi$ ein, dann haben wir

$$u = T^4 \int_0^\infty \xi^3 F\,(\xi)\, d\xi .$$

Bezeichnen wir den Wert, den wir bei der Ausrechnung des Integrals erhalten, mit α, dann erhalten wir

$$u = \alpha T^4 , \tag{78,3}$$

das bekannte *STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz.*

Weiterhin ist es zweckmäßig, von der frequenzabhängigen zur wellenlängenabhängigen Darstellung überzugehen. Zu diesem Zweck müssen wir vor allem bedenken, daß die dem Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ zugehörige Energie gleich $\varrho_\nu \cdot d\nu$ (aber nicht gleich ϱ_ν!) ist; dieselbe, aber durch die Wellenlänge ausgedrückte Energie ist offenbar gleich $\varrho_\lambda\, d\lambda$. Daher gilt für den Übergang von der Frequenz- zur Wellenlängenabhängigkeit die Beziehung

$$\varrho_\nu\, d\nu = \varrho_\lambda\, d\lambda . \tag{78,4}$$

Weiter müssen ν und $d\nu$ durch λ und $d\lambda$ ersetzt werden:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} , \quad |\, d\nu\, | = \frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda . \tag{78,5}$$

Bedenken wir dies, dann erhalten wir

$$\varrho_\lambda\, d\lambda = \varrho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda . \tag{78,6}$$

Benutzen wir jetzt die Maximumbedingung $\frac{d\varrho_\lambda}{d\lambda} = 0$. Nach der Differentiation von (78,6) erhalten wir

$$\frac{c^4}{\lambda^6}\left(\frac{c}{\lambda T}\right) F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{5c^4}{\lambda^6} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0$$

oder, wenn wir die Bezeichnung $\frac{c}{\lambda T} = \eta$ einführen und kürzen,

$$\eta F'\,(\eta) + 5F\,(\eta) = 0 . \tag{78,7}$$

Lösen wir diese Gleichung auf, so erhalten wir für η irgendeinen bestimmten Zahlenwert $\eta = \text{const}$; dies ergibt $\frac{c}{\lambda_{\max} T} = \text{const}$, worin jetzt mit $\lambda_{\max}$ diejenige Wellenlänge bezeichnet wird, die $\varrho_{\lambda_{\max}}$ entspricht. Da c eine konstante Größe ist, wird dann

$$\lambda_{\max} T = \text{const} = b\,. \tag{78,8}$$

Dies ist aber das bekannte *Wiensche Verschiebungsgesetz:* Die der maximalen Energie im Spektrum entsprechende Wellenlänge ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional.

§ 79. Die experimentelle Untersuchung der Wärmestrahlungsgesetze

In § 77 sahen wir, daß das Modell eines absolut schwarzen Körpers die experimentelle Untersuchung einer sich im Gleichgewichtszustand befindenden Strahlung erlaubt, insbesondere die Untersuchung der Energieverteilung dieser Strahlung. Zur praktischen Verwirklichung des Modells eines schwarzen Körpers ist

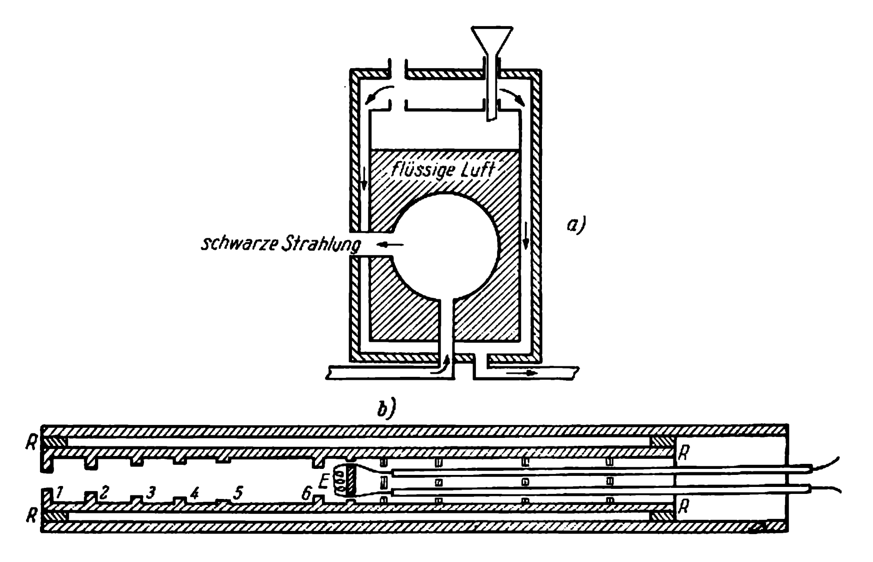


Abb. 116. Zwei Modelle eines schwarzen Körpers: *a)* das einfache Modell mit Temperaturbad; *b)* ein schwarzer Körper für die Untersuchung der Strahlung bei hohen Temperaturen

es notwendig, für das gleichmäßige Erhitzen der Kammerwände und für den Austritt der Strahlung durch eine kleine Öffnung zu sorgen. In Abb. 116a ist ein schwarzer Körper dargestellt, der von Lummer und Pringsheim gebaut wurde. Es handelt sich um ein Metallrohr mit doppelten Wänden. Der Raum zwischen den Wänden wird als „Temperaturbad" zur Aufrechterhaltung einer bestimmten und gleichmäßigen Temperatur benutzt, z. B. zum Durchströmen

von Wasserdampf, oder für tiefe Temperaturen zum Ausfüllen mit Eis, fester Kohlensäure, flüssiger Luft usw.

Für die Untersuchung der Strahlung bei hohen Temperaturen wird ein schwarzer Körper anderer Konstruktion benutzt (Abb. 116b). Ein Zylinder aus Platinblech, durch den ein elektrischer Strom geleitet wird, dient zur gleichmäßigen Erwärmung eines inneren Porzellanzylinders *R*. Die Temperatur im Innern des Zylinders wird mit dem Thermoelement *E* gemessen; die Diaphragmen 1, 2, 3, . . . schützen vor der von außen eindringenden Luft.

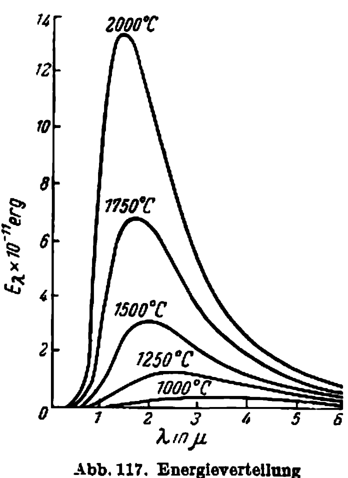


Abb. 117. Energieverteilung des schwarzen Körpers

Mit Hilfe ähnlicher Modelle eines schwarzen Körpers wurden die Gesetze der Strahlung experimentell erforscht, ihre Konstanten genau bestimmt und die spektrale Verteilung der Strahlungsintensität studiert. Eine Reihe von Kurven der Energieverteilung im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers sind für verschiedene Temperaturen in Abb. 117 angeführt. Alle Kurven haben ein scharf ausgeprägtes Maximum und lassen bei steigender Temperatur eine Verschiebung dieses Maximums nach der Seite der kurzen Wellen erkennen, wie es von dem WIENschen Gesetz gefordert wird.

§ 80. Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung auf die Freiheitsgrade

Bei der theoretischen Untersuchung des Strahlungsproblems eines absolut schwarzen Körpers spielte ein allgemeines Theorem der klassischen statistischen Mechanik, das sogenannte Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung auf die Freiheitsgrade, eine wichtige Rolle. Vergegenwärtigen wir uns den Inhalt dieses Theorems. Zu diesem Zwecke betrachten wir als einfachstes Beispiel zuerst ein aus einer großen Anzahl von Teilen bestehendes System, z.B. ein einatomiges Gas. Die Gesamtenergie dieses Gases ist die Summe der kinetischen Energien der *translatorischen* Bewegung seiner Moleküle. Könnten wir die kinetische Energie einzelner Moleküle messen, würden wir für verschiedene Moleküle verschiedene Werte erhalten. Bei konstanter Temperatur jedoch ist die mittlere, einem Molekül entsprechende kinetische Energie eine vollkommen bestimmte Größe. Teilen wir irgendeinen Teil des Gasraumes ab, der eine genügend große Anzahl von Molekülen enthält, dann ist die für diesen Raumteil berechnete mittlere kinetische Energie des Moleküls gleich der mittleren kinetischen Energie, die für den anderen Teil des Raumes ausgerechnet wurde, wenn die Temperatur des Gases überall gleich ist. Dasselbe wird auch dann zutreffen, wenn das Gas ein Gemisch zweier Gase ist, deren Moleküle verschiedene Massen besitzen: die kinetische Energie der einen wie der anderen Moleküle wird die gleiche sein. Dies trifft auch dann zu, wenn beide Gase nicht gemischt sind und sich im Temperaturgleichgewicht befinden.

Die kinetische Energie der Moleküle in einem Mol eines einatomigen Gases ist gleich $E_k = \frac{1}{2} N m v^2$, und da andererseits nach der kinetischen Gastheorie $pv = RT = \frac{1}{3} N m \overline{v^2}$ ist, so wird $m\overline{v^2} = 3\frac{R}{N}T = 3kT$ und

$$E_k = \frac{3}{2} NkT.$$

Werden die Moleküle eines einatomigen Gases als Massenpunkte betrachtet, so ist ein System von N Massenpunkten vollständig durch ihre $3N$ kartesischen Koordinaten bestimmt. Wir sagen dann, das System besitzt $3N$ Freiheitsgrade. Die Schwerpunktkoordinaten des i-ten Massenpunktes seien x_i, y_i, z_i; die ihnen entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten seien $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$. Die kinetische Energie des gesamten Systems können wir als Summe von $3N$ quadratischen Gliedern schreiben:

$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}_1^2 + \cdots + \frac{1}{2} m\dot{x}_N^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}_N^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}_N^2.$$

Nach dem Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung ist die mittlere Energie, die auf jedes Glied dieser Summe, also auf jeden Freiheitsgrad der translatorischen Bewegung entfällt, dieselbe und gleich $\frac{1}{2} kT$. Wird tatsächlich jedem quadratischen Glied dieser Summe ein und dieselbe mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} kT$ zugeschrieben, so wird die Gesamtenergie des Gases in Übereinstimmung mit dem vorigen gleich $\frac{3}{2} NkT$ sein.

Das betrachtete Beispiel ist deshalb so einfach, weil die Moleküle eines einatomigen Gases als Massenpunkte betrachtet werden können, von denen sich ein jeder nur in translatorischer Bewegung befindet. Die auf der Newtonschen Mechanik begründete klassische statistische Mechanik zeigt jedoch, daß dasselbe Resultat auch für den allgemeinsten Fall gilt. Ein Gas möge beispielsweise aus zweiatomigen Molekülen bestehen, von denen ein jedes fünf Freiheitsgrade besitzt: drei Freiheitsgrade für die translatorische Verschiebung des Schwerpunktes und zwei Freiheitsgrade für die Rotation um die beiden Achsen, die senkrecht zur Verbindungslinie der Atome liegen. Die Rotation um die durch die beiden Atome verlaufende Achse braucht nicht berücksichtigt zu werden, wenn die Atome als Massenpunkte betrachtet werden. Auch in diesem Falle muß zur Berechnung der Gesamtenergie des Gases jedem Freiheitsgrade, also sowohl den Freiheitsgraden der translatorischen Bewegung wie den Freiheitsgraden der Rotation, ein und dieselbe Energie $\frac{1}{2} kT$ zugeschrieben werden.

Wir mögen endlich ein beliebiges System haben, das vollständig durch die f Lagrangeschen allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_f$ bestimmt wird, so daß das System f Freiheitsgrade besitzt. Die kinetische Energie eines solchen Systems wird in einer homogenen quadratischen Form dargestellt, die Glieder mit den Quadraten der allgemeinen Geschwindigkeiten und auch Glieder mit ihren paarweisen Produkten enthält. Es können jedoch die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_f$ derart ausgewählt werden, daß die kinetische Energie als Summe von f Gliedern auftritt, die nur die Quadrate der allgemeinen Geschwindigkeiten allein enthalten, also die

Form $\frac{1}{2} a_i \dot{q}_i^2$ haben. Hierbei werden die Koeffizienten a_i bereits nicht mehr gleich den Massen m_i sein. Für Polarkoordinaten wird beispielsweise für das i-te Teilchen

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\vartheta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \sin^2 \vartheta_i \dot{\varphi}_i^2,$$

wobei $a_{i_r} = m_i$, $a_{i_\vartheta} = m_i r_i^2$ und $a_{i\varphi} = m_i r_i^2 \sin^2 \vartheta_i$ sind. Wie auch immer die gewählten Koordinaten sein mögen: Enthält die kinetische Energie *nur* quadratische Glieder, so kommt auf jedes dieser f Glieder, also auf jeden Freiheitsgrad, nach dem erwähnten Theorem der statistischen Mechanik ein und dieselbe *mittlere* kinetische Energie $\frac{1}{2} kT$.

Bis jetzt sprachen wir nur von der kinetischen Energie. Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen die potentielle Energie auf ebenso einfache Weise berechnet werden kann. Besteht beispielsweise das System aus linearen harmonischen Oszillatoren, so wird, da die mittlere potentielle Energie eines linearen harmonischen Oszillators gleich der mittleren kinetischen Energie ist, auf jeden Freiheitsgrad dieselbe Energie $\frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT$ kommen.

In dem allgemeinen Fall, in dem ein System kleine Schwingungen auszuführen befähigt ist, sind immer solche Koordinaten zu finden, bei denen sich nicht nur die kinetische Energie als Summe quadratischer Glieder der Form $\frac{1}{2} a_i \dot{q}_i^2$ darstellt, sondern auch die potentielle Energie die Summe von quadratischen Gliedern $\frac{1}{2} b_i q_i^2$ sein wird; die Anzahl der letzteren ist ebenfalls gleich der Zahl der Freiheitsgrade. Die auf diese Weise ausgewählten *normalen Koordinaten* sind dadurch gekennzeichnet, daß für eine jede von ihnen die zeitliche Abhängigkeit durch eine einfache Sinusfunktion dargestellt wird und die kinetische Energie der entsprechenden Eigenschwingungen gleich der mittleren potentiellen Energie ist (siehe die Übung zu diesem Paragraphen). Die Bewegung des Systems wird in diesem Falle die Superposition von f linearen harmonischen Oszillatoren sein; die Gesamtenergie ist die Summe von $2f$ quadratischen Gliedern. Auf jedes Glied kommt die *mittlere* Energie $\frac{1}{2} kT$, so daß die Gesamtenergie $f kT$ wird. Dies ist das Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung.

Übung: Die kinetische und die potentielle Energie eines Systems, das kleine Schwingungen in den normalen Koordinaten ausführt, wird in der Form

$$T = \frac{1}{2} a_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{q}_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} a_f \dot{q}_f^2, \quad U = \frac{1}{2} b_1 q_1^2 + \frac{1}{2} b_2 q_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} b_f q_f^2$$

dargestellt. Es sind die LAGRANGEschen Gleichungen aufzuschreiben und nachzuweisen, daß ihre Lösungen

$$q_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\, t + \delta_1\right), \quad q_2 = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\, t + \delta_2\right), \cdots$$

lauten. Unter Benutzung dieser Lösungen sind die Ausdrücke für die potentielle und die kinetische Energie für jede ihrer Eigenschwingungen anzugeben und zu beweisen, daß ihre Mittelwerte unter sich gleich sind.

§ 81. Die Formel von RAYLEIGH-JEANS

Zum erstenmal benutzte RAYLEIGH das Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung zur Berechnung der elektromagnetischen Energie in einem geschlossenen Hohlraum. Die folgende Überlegung diente in dem gegebenen Falle als Grundlage. Stellen wir uns einen Hohlraum mit dem Rauminhalt V vor, der keine Materie enthält (also Vakuum) und von ideal reflektierenden Wänden umgeben ist, die auf eine Temperatur T erhitzt werden.

Da die Wände dieses Hohlraums bei beliebiger Temperatur elektromagnetische Wellen in Form von Licht ausstrahlen (bei niedrigen Temperaturen ist es infrarotes Licht), tritt im Innern ein elektromagnetisches Feld auf. Dieses elektromagnetische Feld kann in ein System stehender Wellen verschiedener Frequenzen und Richtungen zerlegt werden. Jede dieser stehenden Wellen stellt einen Elementarzustand des elektromagnetischen Feldes dar. Das Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung behauptet nun, daß auch in diesem Falle bei Gleichgewicht zwischen den Wänden des Hohlraums und dem elektromagnetischen Feld auf eine jede stehende Welle die mittlere Energie kT fallen muß. Wie sich die mittlere Energie eines harmonischen Oszillators aus der mittleren kinetischen Energie $\frac{1}{2}kT$ und der mittleren potentiellen Energie, die ebenfalls gleich $\frac{1}{2}kT$ ist, zusammensetzt, so addiert sich auch hier beim elektromagnetischen Feld stehender Wellen die mittlere Gesamtenergie aus den mittleren Energien des elektrischen und des magnetischen Feldes, von denen jede $\frac{1}{2}kT$ ist.

Die Berechnung der Feldenergie für ein gegebenes Frequenzintervall ν, $\nu + d\nu$ führt somit zur Zahl der stehenden Elementarwellen, also zur Zahl der freien Eigenschwingungen des von einem kontinuierlichen Medium angefüllten Raumes V, die zu dem angegebenen Frequenzintervall gehören. Kennen wir die Gesamtenergie des Feldes im Raume V, die gleich $V\varrho_\nu d\nu$ ist, dann können wir auch die Energiedichte $\varrho_\nu\, d\nu$ finden.

Die Berechnung der Energiedichte des Feldes $\varrho_\nu d\nu$ mit Hilfe des Theorems der gleichmäßigen Energieverteilung wurde von JEANS nach einer von RAYLEIGH angegebenen Methode durchgeführt. Die von ihm erhaltene Formel trägt die Bezeichnung RAYLEIGH-JEANSsche Formel. Obwohl sich diese Formel bei ihrer Anwendung auf das gesamte Spektrum als unrichtig erwies, so spielte sie dennoch in der Entwicklung der Strahlungstheorie und der gesamten modernen Physik eine große Rolle, weil sie gewissenhaft die prinzipiellen Schwierigkeiten der klassischen Physik aufdeckte.

Betrachten wir die Ableitung der RAYLEIGH-JEANSschen Formel und beginnen mit der Berechnung der Anzahl der Eigenschwingungen des Feldes. Nehmen wir zur Einfachheit an, daß der Raum, in dem sich das stationäre (nicht von der Zeit abhängige) Wellenfeld einstellt, die Gestalt eines Kubus mit den Kanten a hat. Wie schon gesagt wurde, kann das stationäre Wellenfeld als eine Gesamtheit stehender Wellen betrachtet werden. Betrachten wir zuerst die Wellen, deren Normale senkrecht zu zwei parallelen Kubusflächen ist. Die einfallenden und die reflektierten Wellen, die parallel zu dieser Richtung nach dieser oder jener Seite verlaufen, bilden stehende Wellen. Hierbei findet man in Abhängigkeit von der

Natur der Wellen an den Wänden des Hohlraums entweder Knoten oder Bäuche. Zum Beispiel besitzt im Falle elektromagnetischer Wellen das elektrische Feld an den Wänden Knoten und das magnetische Feld Bäuche. Jedoch tritt in dem einen wie in dem anderen Fall für die Existenz stehender Wellen die Forderung auf, daß auf der Kantenlänge a eine ganze Zahl von Halbwellen liegt.

Zur Definition werden wir anfänglich nur solche stehenden Wellen betrachten, die an den Wänden Knoten haben. So lautet die Bedingung für die Existenz stehender, zur yz-Ebene paralleler Wellen

$$\frac{2a}{\lambda} = n_1 \quad (n_1 \text{ ganzzahlig}).$$

Analoge Bedingungen gelten für stehende Wellen, wenn die Ebenen gleicher Phase parallel zu den xy- und xz-Ebenen verlaufen:

$$\frac{2a}{\lambda} = n_2, \quad \frac{2a}{\lambda} = n_3.$$

Die betrachteten Systeme stehender Wellen mit zu den Koordinatenachsen parallelen Normalen erscheinen als spezielle Fälle. Im Hohlraum können stehende Wellen mit beliebig gerichteten Normalen existieren.

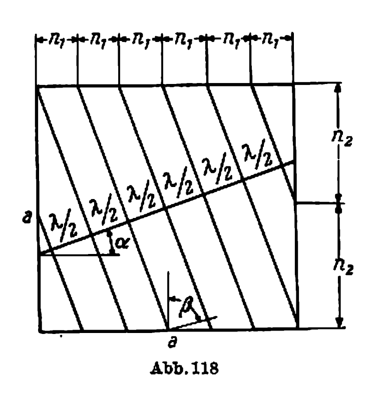


Abb. 118

Betrachten wir diesen allgemeinen Fall ausführlicher. Wir haben eine stehende Welle, deren Normale mit den x- und y-Achsen die Winkel α und β bildet und bei der die Ebene gleicher Phase (beispielsweise die Knotenebene) parallel zu der vertikalen, mit der z-Achse übereinstimmenden Kante des Kubus liegt. In Abb. 118 ist das Quadrat einer Grundfläche des Würfels zu sehen, die der xy-Koordinatenebene parallel ist, sowie ein System paralleler Geraden, das die Spuren der Knotenebenen darstellt.

Die Bedingung für das Auftreten solcher stehender Wellen besteht darin, daß die senkrecht zu den Kubusflächen gemessenen Entfernungen zwischen ihren Knotenebenen ganzzahlig in der Kantenlänge a enthalten sind,

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a\cos\beta}{\lambda} = n_2.$$

Diese Bedingungen erhalten wir aus der Betrachtung der Abb. 118. Offensichtlich müssen in dem allgemeinsten Fall, bei dem die Normale zu den Knotenebenen mit den Koordinatenachsen die beliebigen Winkel α, β, γ bildet, gleichzeitig die drei Bedingungen

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a\cos\beta}{\lambda} = n_2, \quad \frac{2a\cos\gamma}{\lambda} = n_3 \tag{81,1}$$

erfüllt sein.

Quadrieren und addieren wir diese drei Gleichungen, dann erhalten wir

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^2, \tag{81,2}$$

wobei c' die Geschwindigkeit der Verschiebung der Ebene gleicher Phase (Phasengeschwindigkeit) in dem gegebenen Medium bedeutet. Dies ist aber die Gleichung der Kugel mit dem Radius

$$R = \frac{2a\nu}{c'}. \tag{81,3}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß jede Zusammenfassung dreier *ganzer Zahlen* n_1, n_2, n_3 einer bestimmten Frequenz

$$\nu = \frac{c'}{2a}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \tag{81,4}$$

entspricht.

Führen wir jetzt ein kartesisches Koordinatensystem ein, auf dessen Achsen wir mit $\frac{c'}{2a}$ als Einheit die ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 auftragen. Nach (81,4) entspricht jeder Zusammenfassung von Werten dieser Zahlen eine bestimmte Frequenz. In unserem Koordinatensystem, das wir als „Frequenzraum" bezeichnen, wird diese Frequenz als Punkt mit den Koordinaten n_1, n_2, n_3 dargestellt. Offensichtlich entsprechen allen drei Zahlen, deren Summe aus den Quadraten einen konstanten Wert hat, zahlenmäßig gleiche Frequenzen. Nichtsdestoweniger stellen sich diese gleichen Frequenzen als verschiedene Eigenschwingungen unseres Kontinuums dar, weil jeder von ihnen ein System stehender, sich in bezug auf die Richtung unterscheidender Wellen entspricht.

Für unsere Zwecke ist es wesentlich, daß alle unter sich gleichen Frequenzen durch verschiedene Punkte des Frequenzraumes dargestellt werden.

Jetzt können wir die Anzahl der Eigenfrequenzen von 0 bis ν berechnen. Bauen wir hierfür ein System von Punkten auf, das allen möglichen positiven, ganzen Werten n_1, n_2, n_3 entspricht. Dieses Punktsystem bildet offenbar ein kubisches Gitter, bei dem das Volumen eines Elementarwürfels gleich der Raumeinheit ist. Ist die Wellenlänge genügend klein im Vergleich zu den linearen Abmessungen a des Hohlraums, dann wird die Summe der Rauminhalte aller Elementarzellen (Kuben) mit genügender Genauigkeit gleich dem Rauminhalt eines Achtels des Bereiches mit dem Radius R sein, der durch die Bedingungen (81,3) und (81,4) bestimmt ist. Da der Rauminhalt einer jeden Zelle gleich 1 ist, können wir umgekehrt auch behaupten, daß der Inhalt eines Oktanten (mit der angegebenen Genauigkeit) gleich der *Anzahl* der Elementarzellen ist.

Wenn wir jetzt wissen, wieviel darstellende Punkte auf eine Zelle entfallen, dann finden wir damit auch die Zahl der in den Grenzen von 0 bis ν liegenden Eigenfrequenzen unseres Hohlraums. Ebenso wie im Falle des kubischen Ionengitters (siehe § 35), wo auf jede Zelle ein Ion kommt, können wir behaupten, daß auch in dem gegebenen Fall auf jeden Elementarkubus ein darstellender Punkt entfällt. Die gesuchte Anzahl der Frequenzen der Eigenschwingungen ist dann zahlenmäßig gleich dem Rauminhalt des Oktanten, d. h.

$$N = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\nu}{c'}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\,\frac{a^3\nu^3}{c'^3}.$$

Dies ist auch die Anzahl der Eigenschwingungen innerhalb der Grenzen 0 und ν. Die Anzahl der Schwingungen innerhalb der Grenzen ν und $\nu + d\nu$ ist gleich der Anzahl der darstellenden Punkte, die sich im Innern des achten Teiles der Kugelschicht mit den Radien $\frac{2a\nu}{c'}$ und $\frac{2a(\nu+d\nu)}{c'}$ befinden. Diese Anzahl

der darstellenden Punkte ist nach dem Vorhergehenden gleich dem Rauminhalt der angegebenen Schicht, d. h. gleich

$$dN = \frac{4\pi\nu^2}{c'^3} a^3 d\nu .$$

Wenn es sich um elektromagnetische Felder handelt[1]), die uns hier nur interessieren, dann müssen wir bedenken, daß einer jeden Frequenz ν *zwei* Wellen mit zueinander senkrechten Polarisationsebenen entsprechen. Daher ist die gefundene Zahl zu verdoppeln, und wir erhalten, wenn wir den Rauminhalt a^3 des Kubus mit V bezeichnen,

$$dN = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu .$$

Dies ist die Anzahl der freien Eigenschwingungen unseres Raumes V. Nach dem Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung ist jeder Eigenschwingung die mittlere Energie kT zuzuschreiben. Folglich wird die Gesamtenergie im Raum V

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} V\, kT\, d\nu$$

sein, und wir erhalten die Energiedichte nach einfacher Division durch V:

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT\, d\nu . \qquad (81,5)$$

Dies aber ist die RAYLEIGH-JEANSsche Formel.

Für die praktische Anwendung ist es bequemer, von der Frequenz- zur Wellenlängendarstellung überzugehen. Nach dem Vorhergehenden haben wir für das Wellenlängenintervall λ, $\lambda + d\lambda$

$$\varrho_\nu d\nu = \varrho_\lambda d\lambda \qquad (78,4)$$

und

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda . \qquad (78,5)$$

Aus der Formel (81,5) erhalten wir mit Hilfe dieser Beziehungen

$$\varrho_\lambda d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4} d\lambda . \qquad (81,6)$$

Für die Oberflächenintensität I_λ der Strahlung finden wir aus (81,6) mit Hilfe der Beziehung $I_\lambda = \frac{8\pi}{c} \varrho_\lambda$

$$I_\lambda d\lambda = c\, kT\lambda^{-4} d\lambda . \qquad (81,7)$$

Zum Schluß wollen wir noch vermerken, daß die RAYLEIGH-JEANSsche Formel als Funktion der Wellenlänge (81,6) leicht aus Dimensionsbetrachtungen erhalten werden kann. Es ist offensichtlich, daß die Zahl der freien Eigenschwingungen $f(\lambda)\, d\lambda$ des Raumes V, die sich auf das Wellenlängenintervall λ, $\lambda + d\lambda$ beziehen, dem Raum V und dem Intervall $d\lambda$ proportional sein muß:

$$f(\lambda) d\lambda = C\varphi(\lambda)\, V\, d\lambda ,$$

worin C eine konstante Zahl ist. Da aber $f(\lambda)\, d\lambda$ eine dimensionslose Größe sein muß und $V d\lambda$ die Dimension L^4 hat, muß $\varphi(\lambda)$ die Dimension L^{-4} besitzen. Somit ist $\varphi(\lambda) = \lambda^{-4}$ und

$$f(\lambda) d\lambda = C\lambda^{-4}\, V\, d\lambda .$$

---

[1]) Anm. d. Redaktion: In diesem Falle ist $c' = c$.

Diese Formel gilt für ein beliebiges kontinuierliches Medium und dementsprechend für eine beliebige Wellenart. Schreiben wir nach dem Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung jeder Eigenschwingung die mittlere Energie kT zu, dann erhalten wir für die Gesamtenergie des Raumes V

$$CkT\lambda^{-4} V\,d\lambda$$

und für die Energiedichte

$$\varrho_\lambda d\lambda = CkT\lambda^{-4} d\lambda,$$

einen Ausdruck also, der bis auf den Zahlenfaktor C mit der RAYLEIGH-JEANSschen Formel übereinstimmt. Dieser Faktor kann auf rein rechnerischem Wege erhalten werden. Interessant ist es, daß bei einer Ausfüllung des Volumens V mit einem Gas, in welchem nur Longitudinalwellen möglich sind, für $C = 4\pi$ erhalten wird; für ein elektromagnetisches Feld, in dem nur Transversalwellen bestehen, gibt es aber zwei unabhängige Wellentypen mit zueinander senkrechten Polarisationsebenen, und es ist $C = 8\pi$; endlich erhalten wir für einen festen Körper, in dem sowohl beide Formen von Transversalwellen als auch die Longitudinalwellen möglich sind, $C = 12\pi$.

Übung: Es ist die Berechnung der Anzahl von Eigenschwingungen in einem Raum durchzuführen, der die Gestalt eines Parallelepipeds mit den durch die inkommensurablen Zahlen l_1, l_2, l_3 ausdrückbaren Kanten besitzt. Es ist zu zeigen, daß auch in diesem Falle die RAYLEIGH-JEANSsche Formel für die Energiedichte erhalten wird.

§ 82. Die „Ultraviolettkatastrophe“

Wir analysieren jetzt die RAYLEIGH-JEANSsche Formel und zeigen, wieweit ihre Resultate mit dem Experiment übereinstimmen. Vermerken wir vor allem, daß die RAYLEIGH-JEANSsche Formel

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT\,d\nu \tag{82,1}$$

das thermodynamische WIENsche Gesetz $\varrho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$ befriedigt, da sie in der Form

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} k \frac{T}{\nu} d\nu$$

geschrieben werden kann.

Trotzdem führt die RAYLEIGH-JEANSsche Formel zu einem Widerspruch. Dies ist der Fall, wenn wir mit Hilfe von (82,1) die integrale Strahlungsdichte

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2\,d\nu = \infty$$

berechnen. Es zeigt sich, daß ein Gleichgewicht zwischen den materiellen Körpern und der Strahlung nur bei unendlicher Strahlungsdichte eintreten könnte (siehe Ende § 75). Mit anderen Worten, die Oszillatoren eines strahlenden Körpers müßten

so lange Energie ausstrahlen, wie ihre Temperatur nicht auf den absoluten Nullpunkt gefallen ist. Im § 75 wurde bereits auseinandergesetzt, daß gerade ein solches Resultat erhalten werden muß, wenn die Anwendbarkeit der klassischen Mechanik auf mikroskopische Strahlensysteme zulässig ist. Andererseits widerspricht dieses Resultat in schärfstem Maße dem Versuch, der zeigt, daß ein Gleichgewicht zwischen der Strahlung und materiellen Körpern bei beliebigen Temperaturen möglich ist und daß bei diesem Gleichgewicht gerade umgekehrt die Energiedichte der Strahlung im Vergleich zu der in den materiellen Körpern enthaltenen Energiedichte sehr klein ist.

Trotz der offenkundigen Unzulänglichkeit der Rayleigh-Jeansschen Formel ist ihr Vergleich mit den Versuchsergebnissen interessant. Hierzu ist es am bequemsten, diese Formel in der Form (81,6) oder (81,7) zu benutzen, wo die Wellenlängenabhängigkeit benutzt wird. Wenn wir uns zur Abb. 117 wenden, auf der die experimentellen Kurven der Energieverteilung im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers bei verschiedenen Temperaturen angegeben sind, dann sehen wir, daß alle diese Kurven ein Maximum haben und steil nach kurzen Wellenlängen abfallen. Demgegenüber ergibt die Rayleigh-Jeanssche Formel einen monotonen und schnellen (λ^{-4}!) Anstieg nach kurzen Wellenlängen hin. Für lange Wellen oder für hohe Temperaturen stimmt sie gut mit dem Experiment überein. Dies wird schematisch in der Abb. 119 gezeigt.

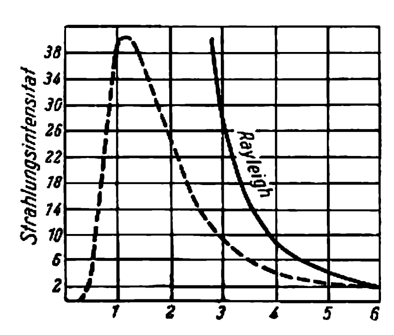


Abb. 119. Vergleich der experimentellen Kurve der Energieverteilung im Spektrum (gestrichelte Linie) mit der Kurve nach Rayleigh-Jeans

Da die auf der klassischen Physik beruhende Rayleigh-Jeanssche Formel im scharfen Widerspruch zu dem Versuch steht, kommen wir zu dem Schluß, daß im Spektrum der Wärmestrahlung der größte Teil der Energie auf den kurzwelligen Teil des Spektrums entfällt. Dieser Zustand wurde von P. S. Ehrenfest als „Ultraviolettkatastrophe“ bezeichnet.

Wenn wir die Bilanz ziehen, dann sehen wir, daß die klassische Physik in der Theorie der Wärmestrahlung eine entscheidende Niederlage erlitten hat. Nach einem bildlichen Ausdruck von Lorentz kann man mit Hilfe der Gleichungen der klassischen Physik nicht erklären, warum ein erlöschender Ofen neben der Ausstrahlung infraroter Wellen nicht auch gleichzeitig gelbe Strahlen aussendet.

§ 83. Die Plancksche Formel

Die Rayleigh-Jeanssche Formel ist, wie wir sahen, auf den allgemeinsten Gesetzen der klassischen Physik begründet und erfordert für ihre Ableitung keinerlei besondere Hypothesen. Im Jahre 1896 schlug Wien eine andere Formel vor, die mit den experimentellen Ergebnissen in eben demjenigen Spektralgebiet ausge-

zeichnet übereinstimmt, in dem die RAYLEIGH-JEANSsche Formel unbenutzbar ist.[1]) Diese WIENsche Formel wird für I_λ folgendermaßen geschrieben:

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}, \qquad (83,1)$$

worin c_1 und c_2 Konstante sind. Für die Ableitung seiner Formel mußte WIEN einige Hypothesen über den Aussendungsmechanismus der Strahlung machen, gemäß dem die Frequenzverteilung der Strahlung analog der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Gasmolekülen erfolgt.

Die WIENsche Formel erwies sich jedoch als nur auf den kurzwelligen Teil der Energieverteilungskurve im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers anwendbar. Am Ende des 19. Jahrhunderts existierten somit zwei Formeln, von denen eine jede den experimentellen Daten in einem begrenzten Spektralbereich entsprach, aber keine die ganze experimentelle Kurve beschrieb. Um 1900 gelang es PLANCK, eine anfänglich rein empirische Formel zu finden, die gut mit den Versuchsdaten übereinstimmte und in beiden Grenzfällen (für lange und für kurze Wellen) entsprechend in die RAYLEIGH-JEANSsche bzw. in die WIENsche Formel überging. Die PLANCKsche Formel für I_λ lautet

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}. \qquad (83,2)$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß sich diese Formel tatsächlich als das Ergebnis einer Interpolation der RAYLEIGH-JEANSschen und der WIENschen Formeln darstellt. Wir können für $\lambda T \gg 1$ (lange Wellen oder hohe Temperaturen) das exponentielle Glied im Nenner der PLANCKschen Formel in eine Reihe entwickeln und erhalten hierfür, wenn wir uns auf die ersten beiden Glieder der Entwicklung beschränken,

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \cdots.$$

In diesem Falle ergibt die PLANCKsche Formel

$$I_\lambda = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T,$$

was offensichtlich mit der RAYLEIGH-JEANSschen Formel

$$I_\lambda = ck\lambda^{-4} T \qquad (81,7)$$

übereinstimmt.

Umgekehrt ist für den Fall $\lambda T \ll 1$ (kurze Wellen oder niedrige Temperaturen) $\frac{c_2}{\lambda T} \gg 1$, und in dem Nenner der PLANCKschen Formel können wir die 1 im Vergleich

---

[1]) WIEN erhielt seine Formel auf der Grundlage der Hypothese, daß die Energieverteilung in bezug auf die Frequenz der MAXWELLschen Verteilung der Gasmoleküle entspricht. Dieser Gedanke wurde vor WIEN von dem Physiker W. A. MICHELSON ausgedrückt, der in seiner weiteren Ableitung einige Voraussetzungen machte und zu einer Formel geführt wurde, die nicht mit dem Experiment übereinstimmte. Jedoch gehört die Grundidee der Ableitung der WIENschen Formel zweifellos W. A. MICHELSON.

zum Exponentialglied vernachlässigen. Hierbei ergibt die PLANCKsche Formel unmittelbar

$$I_\lambda = c_1 e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \cdot \lambda^{-5},$$

d. h., sie geht in die WIENsche Formel (83,1) über.

Über den Grad der Übereinstimmung zwischen der PLANCKschen Formel und den experimentellen Daten können wir auf Grund der Abb. 120 urteilen, in der auf der Ordinatenachse die prozentualen Abweichungen aufgetragen sind. Durch die

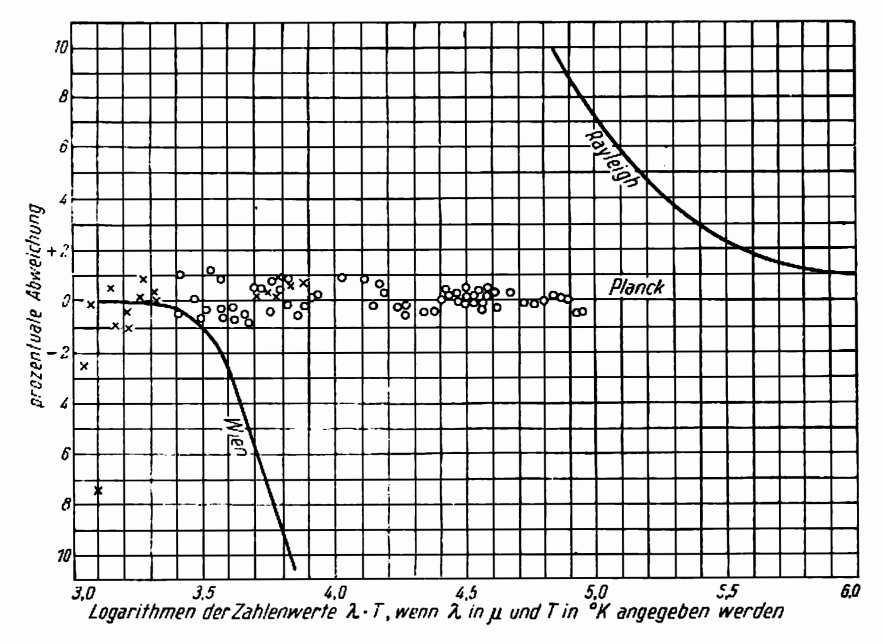


Abb. 120. Experimentelle Prüfung der PLANCKschen Formel

Kreise und Kreuze werden die experimentellen Ergebnisse angegeben. Die in derselben Abbildung aufgetragenen Kurven sind nach der WIENschen und RAYLEIGH-JEANSschen Formel berechnet und illustrieren gut den asymptotischen Charakter dieser Formeln.

§ 84. Die Hypothese der Energiequanten

Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, liefert die PLANCKsche Formel einen mathematischen Ausdruck für das Gesetz der Energieverteilung im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers. Es zeigte sich, daß für die Ableitung dieser Formel eine Hypothese notwendig war, die der Vorstellungswelt der klassischen Physik grundlegend widerspricht. Die Energie atomarer und molekularer Systeme sollte nur bestimmte, diskrete Werte annehmen können.

Bei der Ableitung seiner Formel betrachtete PLANCK die strahlenden materiellen Zentren als lineare harmonische Oszillatoren, die eine elektrische Ladung tragen, mit deren Hilfe sie Energie mit dem umgebenden elektromagnetischen Feld austauschen können. Die Hypothese, die PLANCK seiner Ableitung zugrunde legte, hat die folgende moderne, genauere Formulierung: *Die Oszillatoren können sich nur in einigen ausgewählten Zuständen befinden, in welchen ihre Energie ein ganzzahliges Vielfaches eines kleinsten Energiequantums ε_0 ist:*

$$\varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ \ldots,\ n\varepsilon_0,\ \ldots;$$

bei der Emission wie bei der Absorption gehen die Oszillatoren aus einem dieser Zustände unter Vermeidung der Zwischenstadien durch einen Sprung in einen anderen Zustand über.

Auf der Grundlage dieser Hypothese leitete PLANCK die Formel für die spektrale räumliche Strahlungsdichte ϱ_ν in der folgenden Form ab:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}. \tag{84,1}$$

Die richtige Strahlungsformel muß jedoch das thermodynamische WIENsche Gesetz $\varrho_\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ befriedigen. Damit die Formel (84,1) diesem Gesetz entspricht, muß

$$\varepsilon_0 = h\nu \tag{84,2}$$

angenommen werden, worin ν die Schwingungsfrequenz des Oszillators $\left(\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ und h eine Universalkonstante der Dimension [Energie $\times$ Zeit] ist. Die mechanische Größe, die eine solche Dimension besitzt, heißt Wirkung.

Setzen wir (84,2) in (84,1) ein, dann erhalten wir

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{84,3}$$

Dies ist die PLANCKsche Formel, wie sie gewöhnlich in der theoretischen Physik benutzt wird.

Aus (84,3) folgt der Ausdruck für die spektrale Strahlungsintensität $I_\nu = \frac{c}{8\pi}\varrho_\nu$,

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{84,4}$$

Um von der Formel (84,4) zur Formel für I überzugehen, die für praktische Anwendungen benutzt wird, müssen die Beziehungen

$$I_\nu\, d\nu = I_\lambda\, d\lambda, \quad |d\nu| = \frac{c\,d\lambda}{\lambda^2}$$

benutzt werden.

Die Formel (84,4) ergibt hierbei

$$I_\lambda d\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \, d\lambda \,. \tag{84,5}$$

Setzen wir

$$hc^2 = c_1 \,, \quad \frac{hc}{k} = c_2 \,,$$

so führt die Formel (84,4) zur Form

$$I_\lambda d\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \, d\lambda \,, \tag{84,6}$$

die mit der Formel (83,2) des vorigen Paragraphen übereinstimmt.

Die universelle Konstante h – die PLANCKsche Konstante – spielt bekanntlich in der modernen Physik eine außerordentlich wichtige Rolle. Ihr Wert kann experimentell nach den verschiedensten Methoden bestimmt werden. Die Strahlungsgesetze eines absolut schwarzen Körpers insbesondere ergeben

$$h = 6{,}53 \cdot 10^{-27} \,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{s} \,.$$

Die Methoden der genauen Bestimmung von h werden im Abschnitt IX betrachtet werden. Hier vermerken wir nur, daß gerade der äußerst kleine Wert von h (in der Größenordnung von 10^{-27} erg · s) die Ursache dafür ist, daß die von den Gesetzen der Atomphysik geforderte Unstetigkeit bei der Untersuchung makroskopischer Erscheinungen überhaupt nicht zum Ausdruck kommt.

Für den Fall $h\nu \ll kT$, d. h. für kleine Frequenzen (lange Wellen) oder hohe Temperaturen, haben wir angenähert

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} \,,$$

und die PLANCKsche Formel (84,3) ergibt

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \,,$$

d. h. die RAYLEIGH-JEANSsche Formel (82,1) für ϱ_ν. Für den Fall $h\nu \gg kT$, d. h. für hohe Frequenzen oder niedrige Temperaturen, führt die PLANCKsche Formel (84,3) zu einem Ausdruck, der mit der WIENschen Formel für ϱ_ν übereinstimmt:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} . \tag{84,7}$$

Wir vermerken noch, daß die integrale Strahlungsdichte

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu \, d\nu$$

endlich wird, wenn wir für ϱ_ν die PLANCKsche Formel (84,2) benutzen.

Die Ausrechnung (siehe die Übung zu diesem Paragraphen) ergibt

$$u = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu = 1{,}08\,\frac{48\pi k^4}{c^3h^3}\,T^4 .$$

Die Planck sche Formel beseitigt die „Ultraviolettkatastrophe" (§ 82). Der Grund hierfür ist leicht zu verstehen. Wie wir im § 82 sahen, ist die Aufstellung des Integrals $\int_0^\infty \varrho_\nu\,d\nu$ in dem Falle, daß für ϱ_ν die Rayleigh-Jeans sche Formel genommen wird, dadurch bedingt, daß diese Formel auf dem Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung auf die Freiheitsgrade begründet ist. Nach diesem Theorem entfällt auf jeden Freiheitsgrad ein und dieselbe mittlere Energie $\bar{E} = kT$. Stellen wir jetzt die Rayleigh-Jeans sche und die Planck sche Formel für ϱ_ν einander gegenüber:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT ,$$

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} .$$

Da nach § 81 $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ die Anzahl der Freiheitsgrade einer Strahlung mit den Frequenzen zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist, folgt aus der Planck schen Formel, daß die auf einen Freiheitsgrad entfallende mittlere Energie *für stehende Wellen mit verschiedenen Frequenzen nicht gleich ist*,

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} . \tag{84,8}$$

Wir sehen, daß $\bar{E}$ in diesem Falle schnell mit wachsendem ν abnimmt und damit die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty \varrho_\nu\,d\nu$ erklärt. Wir wollen noch bemerken, daß die Annahme der Formel (84,8) für die mittlere auf einen Freiheitsgrad entfallende Energie auch eine ernste Schwierigkeit in der klassischen Theorie der Wärmekapazität beseitigt, wie von Einstein gezeigt wurde.

Aus den angegebenen Tatsachen ist ersichtlich, daß die Planck sche Formel einen tiefen Bruch mit der klassischen Physik kennzeichnet, da sie in Widerspruch zu dem Theorem der gleichmäßigen Energieverteilung steht. Aber dieses Theorem erscheint als eine unvermeidliche Folgerung der statistischen Mechanik, die auf der klassischen Mechanik in ihrer Hamilton schen Form beruht. Somit war das Jahr 1900, in dem zum ersten Male die Hypothese von den Energiequanten formuliert wurde, nicht nur das erste Jahr eines neuen Jahrhunderts in der Kalenderrechnung, sondern auch der Anfang einer neuen Ära in der Entwicklung der theoretischen Physik.

Übung: Unter Benutzung der PLANCKschen Formel für ϱ_ν ist die integrale Strahlungsdichte (Dichte der Gesamtstrahlung)

$$u = \int_0^\infty \varrho_\nu \, d\nu$$

auszurechnen und zu zeigen, daß

$$u = \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right).$$

Die in der Klammer stehende, schnell konvergierende Reihe ist gleich 1,08, so daß

$$u = 1{,}08 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4.$$

Dies ist die Ableitung des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes aus der PLANCKschen Formel. (Hinweis: Zuerst ist es notwendig, sich davon zu überzeugen, daß

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \cdots + e^{-\frac{nh\nu}{kT}} + \cdots.$$

Nach solcher Umformung ist die Integration leicht durchzuführen.)

VII. DIE ENERGIENIVEAUS DER ATOME

§ 85. Das Planetenmodell des Atoms und die Bohrschen Postulate

Wir sahen im Abschnitt III, daß das Atom aus einem positiv geladenen schweren Kern, den Elektronen umlaufen, aufgebaut ist. Nach der klassischen Mechanik kann sich ein solches System nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn sich die Elektronen auf irgendwelchen Bahnen um den Kern bewegen. Vom Gesichtspunkt der *klassischen Elektrodynamik* jedoch wäre ein solches Atom immer instabil, da die Elektronen bei einer beschleunigten Bewegung Energie ausstrahlen und sich folglich allmählich immer mehr dem Kern nähern müßten. Damit müßte sich auch die Umlaufsfrequenz stetig ändern, und wir erhielten ein kontinuierliches Spektrum an Stelle der scharfen Spektrallinien. Die Tatsache, daß so etwas nicht beobachtet wird und daß die Atome scharfe Spektrallinien aussenden, deutet auf ihre bemerkenswerte und der klassischen Elektrodynamik widersprechende Stabilität hin.

In dem vorigen Abschnitt sahen wir, daß das Postulat von der Existenz stabiler stationärer Zustände der Oszillatoren als notwendige Voraussetzung für die Ableitung der richtigen Strahlungsformel eines absolut schwarzen Körpers erscheint. N. Bohr (1913) gebührt das Verdienst einer präzisen Formulierung dieser Annahme und ihrer Verallgemeinerung *auf beliebige Atomsysteme*. Hierdurch wurde zum ersten Male mit vollkommener Schärfe die Nichtanwendbarkeit der klassischen Physik auf die inneratomaren Bewegungen festgestellt. Die Idee der Quanten, die von Planck für den Energieaustausch zwischen Strahlungsfeld und linearen Oszillatoren ausgesprochen wurde, erwarb sich als Ausdruck der charakteristischen Besonderheit der inneratomaren Prozesse eine universelle Bedeutung.

Auf Grund der von ihm entwickelten Quantentheorie vom Bau des Atoms stellte Bohr die folgenden beiden Postulate auf:

1. Atome und Atomsysteme können sich dauernd nur in bestimmten Zuständen – den stationären Zuständen – befinden, in denen sie weder Energie emittieren noch absorbieren, obwohl in diesen Zuständen Bewegungen geladener Teilchen stattfinden. Die Atomsysteme haben Energiewerte, die eine *diskrete* Reihe $E_1, E_2, \ldots, E_n$ bilden. Diese Zustände werden durch ihre Stabilität charakterisiert; eine Energieänderung infolge einer Absorption oder Emission elektromagnetischer Strahlung oder infolge eines Zusammenstoßes kann nur bei einem vollständigen Übergang (Sprung) aus einem dieser Zustände in einen anderen stattfinden.

2. Bei dem Übergang aus einem stationären Zustand in einen anderen emittieren oder absorbieren die Atome nur eine Strahlung streng bestimmter Frequenz. Die

Strahlung, die bei dem Übergang aus dem Zustand E_m in den Zustand E_n, oder umgekehrt, emittiert, oder absorbiert werden kann, ist monochromatisch, und ihre Frequenz ν wird durch die Bedingung

$$h\nu = E_m - E_n\,, \quad E_m > E_n \tag{85,1}$$

bestimmt (BOHRsche Frequenzbedingung).

Diese beiden Postulate widersprechen scharf den Forderungen der klassischen Elektrodynamik, da nach dem ersten Postulat die Atome nicht emittieren, obwohl die sie aufbauenden Elektronen eine beschleunigte Bewegung ausführen (z. B. auf einer geschlossenen Bahn), und nach dem zweiten Postulat die Frequenzen der Spektrallinien nichts mit den Frequenzen der periodischen Bewegungen der Elektronen gemein haben.

§ 86. Die Versuche von Franck und Hertz

Die in dem vorigen Paragraphen formulierten BOHRschen Quantenpostulate fanden in den Versuchen von J. FRANCK und G. HERTZ ihre unmittelbare experimentelle Bestätigung. Wir wollen jetzt diese Versuche beschreiben.

Das Prinzip dieser Versuche besteht in folgendem: Die Atome oder Moleküle eines mehr oder weniger verdünnten Gases werden mit Elektronen beschossen; hierauf wird die Geschwindigkeitsverteilung vor und nach den Zusammenstößen untersucht. Waren die Zusammenstöße elastisch, so wird sich die Geschwindigkeitsverteilung als Folge der Zusammenstöße nicht ändern, umgekehrt aber wird bei nichtelastischen Zusammenstößen ein Teil der Elektronen ihre Energie verlieren und sie an Atome abgeben, mit denen sie zusammenstoßen; die Geschwindigkeitsverteilung wird sich ändern.

Aus dem Ergebnis dieser Versuche von FRANCK und HERTZ folgt:

1. Bei Elektronengeschwindigkeiten, die geringer als eine gewisse kritische Geschwindigkeit sind, findet ein vollständig elastischer Zusammenstoß statt, das Elektron übergibt dem Atom keine Energie, sondern wird von ihm zurückprallen und nur die Richtung seiner Geschwindigkeit verändern.

2. Bei solchen Geschwindigkeiten, die der kritischen entsprechen, findet ein unelastischer Stoß statt, das Elektron verliert seine Energie und übergibt sie dem Atom, welches hierbei in einen anderen stationären Zustand, der durch eine höhere Energie charakterisiert wird, übergeht.

Ein Atom nimmt entweder keine Energie auf (elastischer Stoß), oder wenn es welche aufnimmt, so nur in solchen Beträgen, die gleich der Energiedifferenz zweier stationärer Zustände sind.

Bevor wir zu einer genaueren Beschreibung dieser Versuche und ihrer Ergebnisse übergehen, wollen wir einige Fragen betrachten, die mit diesen Versuchen verknüpft sind. Die grundlegenden Forderungen an die Versuchsanordnung zur Untersuchung der Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Atomen bestehen in folgendem:

1. Die Elektronenquelle muß eine genügend große Zahl langsamer Elektronen mit einer bestimmten Anfangsverteilung der Geschwindigkeiten liefern.

2. Diesen Elektronen muß mittels eines von außen her wirkenden Beschleunigungspotentials eine beliebige und bekannte Geschwindigkeit mitgeteilt werden können.

3. Die beschleunigten Elektronen müssen die Zusammenstöße mit den zu untersuchenden Atomen oder Molekülen an einem bestimmten Ort der Apparatur ausführen.

Für die Erzeugung von Strahlen langsamer Elektronen, die den angegebenen Forderungen genügen, werden nur Glühkathoden benutzt. Die Elektronen, die aus diesen Kathoden austreten, werden durch ein an die Kathode angelegtes Potential V, das beliebig verändert werden kann, beschleunigt. Die Geschwindigkeit v in cm/s, welche das zunächst ruhende Elektron unter der Wirkung des Beschleunigungspotentials von V Volt erlangt, ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{eV}{300}.$$

Setzen wir

$$\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^7 \,\mathrm{CGSM} \cdot \mathrm{g}^{-1} = 5{,}27 \cdot 10^{17} \,\mathrm{CGSE} \cdot \mathrm{g}^{-1},$$

so erhalten wir

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{V}{300}} = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

Auf diese Weise wird bei einem Beschleunigungspotential von 1 Volt die Elektronengeschwindigkeit ungefähr $6 \cdot 10^7$ cm/s. Hieraus ist ersichtlich, daß die Bezeichnung „langsame Elektronen“ nur einen relativen Wert besitzt.

Um die Abhängigkeit der Stromstärke von der Beschleunigungsspannung zu untersuchen und hiernach die Kurve zu zeichnen, tragen wir auf der Abszisse das Beschleunigungspotential und auf der Ordinate die Stromstärke auf und erhalten eine Kurve (die sogenannte V-A-Charakteristik), deren typische Gestalt in Abb. 121 dargestellt ist. Die folgenden charakteristischen Züge lenken unsere Aufmerksamkeit auf die Kurve:

1. Bei einem bestimmten Potential wird die Stromstärke unabhängig von der Spannung; dies ist der „Sättigungsstrom“, dessen Entstehung sich daraus erklärt, daß alle Elektronen, die in der Zeiteinheit bei einer gegebenen Glühtemperatur aus der Kathode austreten, zur Anode übergehen.

2. Bei einem Beschleunigungspotential, das gleich null ist, fällt der Strom nicht auf null, sondern bleibt auch weiterhin bei Potentialen negativen Vorzeichens unabhängig von der Spannung, bei Bremspotentialen also bis zu einem gewissen Potential $-K$. Bei weiterer Vergrößerung des Bremspotentials nimmt der Strom ab und fällt allmählich bis auf null.

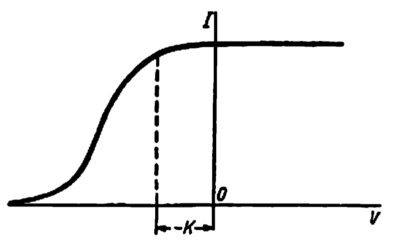


Abb. 121. Strom-Spannungs-Charakteristik eines Glühkathodenrohres

Zur Erklärung dieser Besonderheiten ist vor allem zu bedenken, daß die Kathode und die Anode in einem Glühkathodenrohr aus verschiedenen Metallen bestehen. Deshalb gibt es zwischen Anode und Kathode auch bei Abwesenheit einer äußeren Spannung unbedingt ein *Kontaktpotential*. Ist jetzt auch das äußere Beschleunigungspotential gleich null, so bleiben die Elektronen doch diesem Kontaktpotential unterworfen. Zu seiner Kompensation ist ein bestimmtes *Bremspotential* K anzulegen.

Wenn dieses Potential angelegt wird, bleibt die Stromstärke immer noch von null verschieden, da die Elektronen nicht mit der Geschwindigkeit null aus der Kathode austreten, sondern noch endliche Geschwindigkeiten besitzen, die sich nach dem MAXWELLschen Gesetz verteilen. Nur wenn das Bremspotential einen solchen Wert erreicht, daß es selbst von den schnellsten Elektronen nicht überwunden werden kann, wird die Stromstärke gleich null. Die Idee der in den nächsten Paragraphen dargestellten Versuche besteht nun darin, daß den Elektronen, die eine bestimmte Beschleunigung erhalten haben, die Möglichkeit von Zusammenstößen mit den Atomen von Gasen gegeben wird, die bei gewissen Drücken in das Gefäß eingeführt werden. Um den Charakter dieser Zusammenstöße festzustellen, zu erfahren, ob elastische oder unelastische Zusammenstöße stattfinden, ist es notwendig, nach den Zusammenstößen die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zu untersuchen. Dies wird mit Hilfe des Bremspotentials durchgeführt.

D sei die Glühkathode (Abb. 122), an die das Beschleunigungspotential V gelegt wird. Die beschleunigten Elektronen sind auf die Platte A gerichtet, vor welcher das Gitter N angeordnet ist. Wird dies Gitter auf das Potential $+V_1$ gebracht, dann werden sich die Elektronen in dem Raum zwischen N und A in einem Bremsfeld bewegen. Nur die Elektronen, die eine kinetische Energie besitzen, die zur Überwindung des Bremsfeldes genügt, erreichen die Platte A. Letztere ist über das Galvanometer G mit der Erde verbunden. Auf diese Weise wird durch das Galvanometer der Strom angezeigt, der den die Platte A erreichenden Elektronen entspricht. Das Bremspotential P, das ein Auftreten des Elektrons auf die Elektrode A verhindert, ist nicht durch die Gesamtgeschwindigkeit v des Elektrons, sondern durch ihre normal zu A liegende Komponente v_s bestimmt (Abb. 122). Die Platte A können nur solche Elektronen erreichen, für die die Beziehung

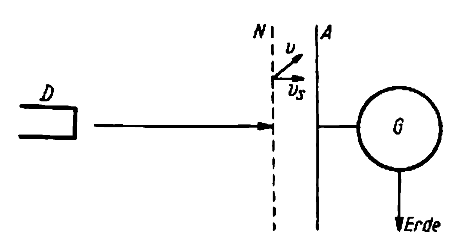


Abb. 122. Schema der Methode mit Bremspotential

$$\frac{1}{2}mv_s^2 \geqq \frac{1}{300}eP \qquad (86,1)$$

gilt.

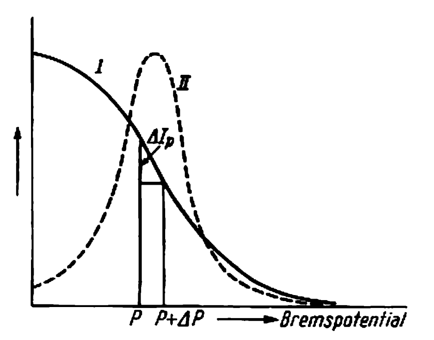


Abb. 123. Strom-Spannungs-Charakteristik nach der Methode mit Bremspotential

Vergrößern wir P allmählich und wird gleichzeitig der Strom im Galvanometer G gemessen, so erhalten wir als Ergebnis eine bestimmte Strom-Spannungs-Charakteristik I (Abb. 123). Diese Strom-Spannungs-Charakteristik erlaubt auf folgende Weise die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen auszurechnen: ist das Bremspotential gleich P, dann ist die Stromstärke I_p der Anzahl von Elektronen proportional, die eine Energie besitzen, die gleich oder größer P Elektronenvolt ist. Bei einem Bremspotential $P + \Delta P$ ist die Stromstärke $I_p - \Delta I_p$ der Anzahl von Elektronen mit einer Energie größer oder gleich $P + \Delta P$ Elektronenvolt proportional. Auf

diese Weise ist die Größe $\frac{\Delta I_p}{\Delta P} \Delta P$ ein Maß für die Anzahl der Elektronen, die auf das Energieintervall zwischen P und $P + \Delta P$ entfallen. Stellen wir darum die Anzahl der Elektronen, die Energien zwischen P und $P + \Delta P$ besitzen, in der Form $f(P) \cdot dP$ dar, wobei $f(P)$ eine Funktion der Elektronenverteilung in bezug auf die Energie ist, dann ist offensichtlich

$$f(P) = \frac{dI}{dP}.$$

Hieraus folgt, daß zur Auffindung der Kurve der Energieverteilung (Geschwindigkeitsverteilung) der Elektronen die Durchführung der graphischen Differentiation der Strom-Spannungs-Charakteristik I (Abb. 123) notwendig ist.

Die Kurve, die als Ergebnis der Differentiation der Strom-Spannungs-Charakteristik I erhalten wird, ist durch die gestrichelte Kurve II dargestellt (Abb. 123).

§ 87. Die elastischen Stöße

Franck und Hertz zeigten vor allem, daß die Zusammenstöße zwischen den Elektronen und den Atomen dann vollständig elastisch sind, wenn die Energie der Elektronen eine gewisse kritische Größe nicht übersteigt. Dies bedeutet, daß das Elektron im Hinblick auf den Zusammenstoß nur die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, nicht aber seine Energie verliert. Zum Beweise wurden mehrere Versuche durchgeführt, von denen wir jedoch nur einen beschreiben werden.

Im Zentrum einer Metallscheibe A (Abb. 124a) befindet sich eine Öffnung, in welcher der Heizfaden D angebracht ist. Die Scheibe ist an Fäden in einem Raum auf-

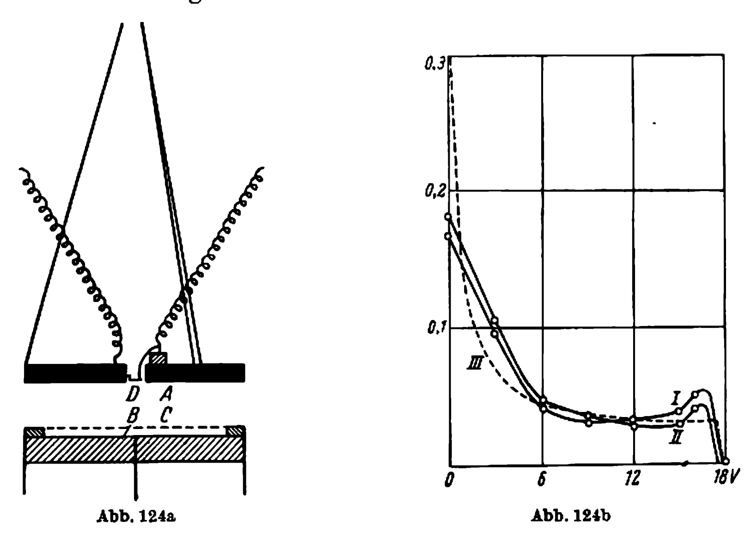


Abb. 124a Abb. 124b

gehängt, in dem ein beliebiger Gasdruck eingestellt werden kann. Mit Hilfe einer besonderen, durch einen Schliff zu betätigenden Einrichtung kann die Scheibe ohne Veränderung des Vakuums gehoben und gesenkt werden. In dem Raum zwischen einer zweiten Scheibe B und dem Gitter C kann ein Bremsfeld aufgebaut werden,

mit dessen Hilfe die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zu messen ist. Der Gasdruck ist derart ausgewählt, daß im Raum zwischen dem Gitter C und der Auffangplatte B die Elektronen nach Möglichkeit keine Zusammenstöße erleiden. In Abb. 124b ist die Energieverteilung der Elektronen in Helium bei einem Druck von 1,3 Torr und bei einem Beschleunigungspotential von 18 V dargestellt. Die Kurve I ist bei einer Entfernung AC von 4 mm und die Kurve II bei einer Entfernung von 18 mm gemessen. Obwohl die Elektronen im zweiten Fall eine größere Zahl von Zusammenstößen als im ersten erleiden, stimmen beide Kurven fast genau überein. Hieraus folgt, daß die Stöße zwischen Elektronen und Heliumatomen bei 18 eV noch vollkommen elastisch erfolgen.

Die punktierte Kurve III in Abb. 124b ist die theoretische Kurve, die unter der Annahme berechnet wurde, daß die Geschwindigkeiten der Elektronen infolge der Zusammenstöße ihre Richtungen so ändern, daß die durch die Maschen des Gitters C hindurchlaufenden Elektronen alle möglichen Richtungen innerhalb der Halbkugel besitzen. Wie ersichtlich, liegt diese Kurve nahe den experimentellen Kurven.

Der Charakter der Kurven erfordert noch eine ergänzende Erläuterung.

Wenden wir unsere Aufmerksamkeit der Tatsache zu, daß die Funktion der Energieverteilung der Elektronen ihren höchsten Wert bei einer Energie annimmt, die gleich null ist. Der Grund hierfür ist rein geometrischer Art. Die Kurve III ist, wie bereits gesagt, unter der Annahme berechnet worden, daß die Elektronen, die infolge der Zusammenstöße ihre Geschwindigkeit nicht ändern, im Raum zwischen dem Gitter C und der Anode alle möglichen Richtungen besitzen. Bei der Bremsfeldmethode mit ebenen Elektroden ist jedoch nur die normale Geschwindigkeitskomponente von Einfluß (siehe § 86). Bei vollkommen gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung auf die Richtungen wird die Anzahl der Elektronen, die innerhalb des Raumwinkels $d\Omega = 2\pi \sin\alpha\, d\alpha$ einfallen (Abb. 125),

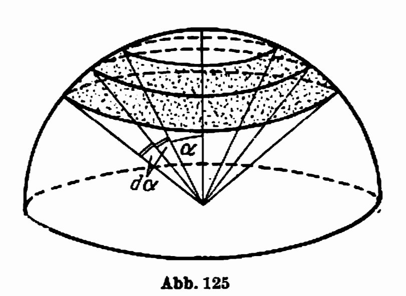


Abb. 125

$$dN = N_0 d\Omega = 2\pi N_0 \sin\alpha\, d\alpha$$

sein. Hieraus folgt, daß die größte Anzahl von Elektronen auf den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entfällt. Für solche Elektronen aber ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit gleich null. Dies erklärt auch den Kurvenanstieg beim Übergang zur Energie null. Das geringe Maximum, das sich bei den experimentellen Kurven bei einer Energie ergibt, die etwas geringer als 18 eV ist, wird unzweifelhaft dadurch bedingt, daß die Richtungsverteilung der durch das Gitter hindurchlaufenden Elektronen nicht vollkommen willkürlich ist. Ein merklicher Teil der Elektronen behält die Geschwindigkeit nahe der Normalrichtung bei.

§ 88. Unelastische Stöße. Das kritische Potential

Für den Existenznachweis unelastischer Zusammenstöße wurde von Franck und Hertz die folgende Einrichtung benutzt. Die Elektronen aus dem Heizfaden D (Abb. 122) werden durch ein an den Faden gelegtes negatives Potential beschleu-

nigt. In dem Raum zwischen D und N erleiden die Elektronen zahlreiche Zusammenstöße und fallen schließlich auf die Auffangplatte A. Das mit A verbundene Galvanometer G mißt den Auffangstrom. Das Gitter N, das gegen A schwach positiv aufgeladen ist (in der Mehrzahl der Fälle bis zum Potential + 0,5 V), befindet sich unmittelbar vor der Scheibe A. Es ist dazu bestimmt, alle die Elektronen herauszuziehen, die ihre Energie durch unelastische Zusammenstöße fast vollständig verloren haben. Der Versuch wurde in Quecksilberdämpfen bei dem verhältnismäßig hohen Druck von ungefähr 1 Torr durchgeführt und bestand in der Messung des Anodenstromes in Abhängigkeit von dem an den Faden D gelegten Beschleunigungspotential.

Bei einer Steigerung des Beschleunigungspotentials von null an wuchs der Strom anfänglich (Abb. 126), wobei die Stromkurve die übliche Form der Strom-Spannungs-Charakteristik eines Glühkathodenrohres hatte. Bei einem Potential von ungefähr 4,1 V jedoch fiel der Strom plötzlich steil ab und begann darauf von neuem bis zum Potential 9,0V anzuwachsen, wo wieder ein steiler Stromabfall und ein neues Anwachsen bis zum Potential von 13,9 V zu beobachten war. Auf diese Weise stellte die Kurve eine Reihe scharfer Maxima dar, die in einem Abstand von 4,9V voneinander stehen. Die Tatsache, daß die Entfernung zwischen zwei benachbarten Maxima immer (mit einer Genauigkeit bis zu 0,1 V) 4,9 V betrug, und das erste Maximum bei 4,1 V beobachtet wurde, läßt sich leicht erklären. Zu dem von außen angelegten Beschleunigungspotential wird das Kontaktpotential hinzugefügt, welches die ganze Kurve nach links verschiebt, ohne die Entfernung zwischen den Maxima zu verändern.

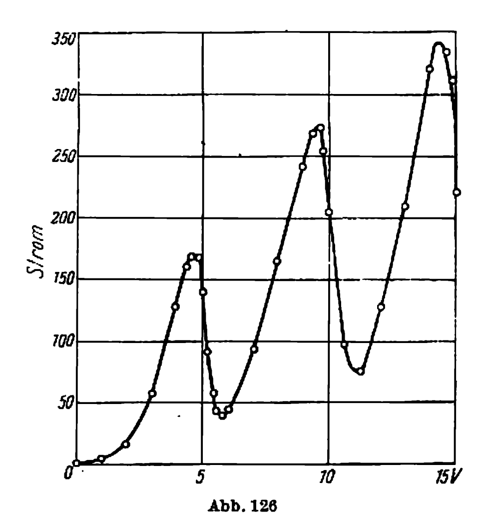


Abb. 126

Die Deutung der Kurvenmaxima auf der Grundlage des im § 86 Gesagten begegnet keinen Schwierigkeiten. Solange die Energie der Elektronen nicht 4,9 eV erreicht, erleiden sie mit den Quecksilberatomen elastische Zusammenstöße, und der Strom wächst mit Vergrößerung des Potentials nach dem üblichen Gesetz. Bei dem Potential von 4,9V wird der Stoß unelastisch, und die Elektronen geben an die Quecksilberatome bei dem Zusammenstoß ihre gesamte Energie ab. Diese Elektronen gelangen nicht auf die Platte A, da sie umgekehrt von dem bis auf + 0,5 V geladenen Gitter N_1 herausgezogen werden, der Anodenstrom fällt also steil ab.

Überschreitet die Elektronenenergie merklich 4,9 V, so behalten solche Elektronen, trotzdem sie einen Teil ihrer Energie bei einem unelastischen Zusammenstoß verloren haben, einen genügenden Energieüberschuß und erreichen daher trotz des positiv geladenen Gitters die Platte A; der Strom beginnt von neuem zu steigen.

Wir wollen noch bemerken, daß, wie auch immer die Energie der ihren ersten unelastischen Stoß erleidenden Elektronen sein möge, diese die Anode A mit ein und

derselben Energie erreichen. Stellen wir uns weiter vor, daß das Potential der Kathode gleich null, das Potential der Anode A gleich $+ V_P$, das kritische Potential gleich V_A (in dem gegebenen Fall $V_A = 4{,}9$ V) ist, und nehmen wir an, daß das Gitter entfernt ist. Der Potentialabfall V_P verteilt sich auf die gesamte Strecke von D bis A. Das Elektron möge einen unelastischen Stoß an einem Ort erleiden, an dem das Potential gleich V_x ist. Auf dem Wege zu diesem Punkt hat es die Energie eV_x erworben und gibt bei dem unelastischen Stoß die Energie eV_A ab. So wird es nach dem Stoß die Energie $e(V_x - V_A)$ besitzen. Auf dem verbleibenden Wege bis zur Scheibe A wird die Potentialdifferenz $V_P - V_x$ sein; auf diesem Wege erhält das Elektron noch die Energie $e(V_P - V_x)$ und wird folglich bei dem Auftreffen auf die Platte A die Energie

$$e(V_x - V_A) + e(V_P - V_x) = e(V_P - V_A)$$

besitzen. Wie wir sehen, hängt diese Energie überhaupt nicht von der Stelle ab, an welcher der erste unelastische Zusammenstoß stattfindet. Ist das beschleunigende Potential genügend groß, so daß $V_P - V_A > 4{,}9$ V ist, so kann das Elektron auf dem restlichen Wege noch ein oder zwei unelastische Zusammenstöße (in Abhängigkeit von der Größe $V_P - V_A$) erleiden, und hierin liegt der Grund für die periodische Wiederholung der Maxima.

Wir sehen, daß die Energie von 4,9 eV eine besondere Bedeutung für die Quecksilberatome hat. Eine kleinere Energie können sie nicht aufnehmen, da bei geringerer Energie der sie bombardierenden Elektronen ein vollkommen elastischer Stoß stattfindet; sie nehmen die Energie von insgesamt 4,9 eV auf. Aber dies bedeutet in bezug auf das erste Bohrsche Postulat, daß das Quecksilberatom nicht beliebige, sondern nur diskrete Energievorräte besitzen kann. Wird der Energievorrat des „nichtangeregten" Quecksilberatoms mit E_1 bezeichnet, so ist der folgende mögliche Energiewert des Atoms $E_1 + 4{,}9$ eV. Das Beschleunigungspotential 4,9 V heißt das „erste kritische Potential" oder das „Resonanzpotential" des Quecksilberatoms. Solche Resonanzpotentiale finden sich auch für andere Atome. Beispielsweise ist für Kalium das Resonanzpotential 1,63 V, für Natrium 2,12 V, für Helium 21 V.

Wir können uns vorstellen, daß außer der Energie, die dem ersten kritischen Potential entspricht, die Atome auch andere, höhere Energiestufen der Anregung besitzen. Diese höheren Anregungsstufen können ebenfalls mit Hilfe des Elektronenstoßes gefunden werden. Die experimentelle Methode muß jedoch für diesen Zweck entsprechend geändert werden. Dieser Frage wenden wir uns in den folgenden Paragraphen zu.

§ 89. Die Vervollkommnung der experimentellen Methoden

Trotz vieler Vorzüge besitzt die beschriebene Methode wesentliche Mängel. Insbesondere kann sie nicht dicht beieinanderliegende Maxima zerlegen, und gerade die Fälle, bei welchen eng benachbarte Anregungsstufen vorliegen, sind nicht selten. Die Rechnung zeigt, daß die Form der Kurven wesentlich von der Größe des Potentialabfalles innerhalb der Strecke einer freien Weglänge λ abhängt, also von der Größe $\lambda \frac{dV}{dx}$. Je kleiner dieser Wert, je schärfer die Maxima, um so genauer werden die kritischen Potentiale bestimmt und um so sorgfältiger die nahe beieinanderliegenden Anregungsstufen aufgelöst. Die Bestimmung

höherer Anregungsstufen wird unmöglich, wenn Bedingungen vorliegen, daß $\lambda \frac{dV}{dx}$ ziemlich klein ist. Zur Vermeidung dieses Mangels änderten FRANCK und HERTZ die Methode so um, daß die Aufnahme von Energie durch das Elektron in einem Teil des Gerätes vor sich geht und die Zusammenstöße in einem anderen Teil. Zu diesem Zweck genügte es, ein zweites „Gitter" N_1 einzuführen, das sich in einer Entfernung von dem Glühfaden D befindet, die im Vergleich zur mittleren freien Weglänge klein ist. So fallen die Elektronen, die ihre gesamte Energie auf der Strecke DN_1 erhalten haben, in den feldfreien Raum zwischen den beiden Metallgittern ein und erleiden dort zahlreiche Zusammenstöße mit den Gasatomen. Bei dem Austritt der Elektronen aus diesem Raum durch die Öffnungen des Gitters N werden diejenigen, die ihre gesamte Energie verloren haben, vom Gitter, das auf einem Potential von + 0,5 V liegt, herausgezogen, und es wiederholt sich der im vorigen Paragraphen beschriebene Vorgang (Abb. 127).

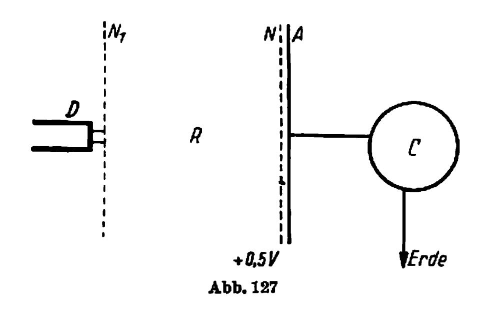


Abb. 127

Die eleganteste Methode wurde von HERTZ vorgeschlagen, der das folgende Schema benutzte (Abb. 128). Die Elektronen aus dem Heizfaden D werden auf der Strecke DN_1 beschleunigt und laufen durch die Öffnungen des Gitters N_1 in den feldfreien Raum R, der von dem zylindrischen Gitter N_2 umgeben ist. Nach zahlreichen Zusammenstößen diffundieren die Elektronen durch die Öffnungen des Gitters N_2 in den Raum zwischen N_2 und dem massiven Metallzylinder P. Mit einem Galvanometer wird der Zylinderstrom zwischen N_2 und P zweimal gemessen: ohne Feld und bei einem Bremspotential von + 0,2 V. Ohne Feld fallen auf P alle Elektronen, die in den Raum N_2P diffundierten, und im zweiten Fall sind alle die Elektronen „ausgesondert", die ihre Energie durch unelastische Stöße verloren haben. Die Differenz beider Stromwerte, dividiert durch die Größe des Anfangsstromes, muß offenbar ein Maximum für den kritischen Wert des Beschleunigungspotentials ergeben, da in diesem Falle eine große Anzahl von Elektronen ihre Energie verlieren und der Strom bei Anwesenheit eines Bremsfeldes sehr klein wird. Mit dieser Methode war es möglich, Maxima zu trennen, die Bruchteile eines Volts auseinanderliegen, sowie besonders schwach ausgeprägte Maxima zu beobachten.

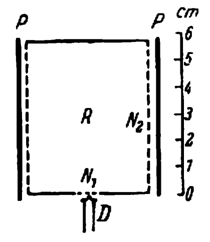


Abb. 128. Schema der HERTZschen Methode

§ 90. Die gleichzeitige Bestimmung aller Anregungsstufen

Wir erwähnten schon, daß die beschriebenen Methoden auch zur Bestimmung hoher Energiestufen angewandt werden können. Zu diesem Zweck müssen die Versuchsbedingungen so gewählt werden, daß der Gasdruck möglichst klein ist. Dies ist wesentlich, da bei hohem Druck die Zahl der Zusammenstöße eines Elek-

trons mit den Gasatomen sehr groß ist. Es genügt dem Elektron, Energie aufzunehmen, die gleich dem ersten kritischen Potential ist oder dieses etwas übertrifft, so daß die Wahrscheinlichkeit einer Anregung sehr groß wird. Bei genügend niedrigem Druck und genügend hohem Beschleunigungspotential kann eine Anregung auch bis zu den höchsten stationären Zuständen stattfinden.

Die unmittelbar aus dem Versuch erhaltenen Ergebnisse für die kritischen Potentiale geben jedoch noch nicht die wahren Werte der Energiestufen wieder, weil die Möglichkeit einer doppelten oder mehrfachen Energieabgabe noch nicht ausgeschlossen ist. Dies ist an folgendem Beispiel klar ersichtlich. Durch unmittelbare Beobachtungen wurden in Quecksilberdampf die folgenden Werte für die kritischen Potentiale erhalten: 4,9; 9,8; 11,2; 13,5; 14,7; 16; 17,6; 19,3; 20,2; 21,2 V. Tatsächlich erscheinen alle diese Potentiale als Kombinationen zweier Grundpotentiale: $a = 4{,}9\,\text{V}$ und $b = 6{,}7\,\text{V}$, wobei das zweite für sich allein überhaupt nicht zu beobachten ist. Es ist leicht zu sehen, daß $9{,}8 = 2a$; $11{,}2 \approx a + b$; $13{,}5 = 2b$; $17{,}6 \approx a + 2b$; $21{,}2 = 3a + b$ usw. ist. Die Deutung der erhaltenen Maxima ist nicht einfach.

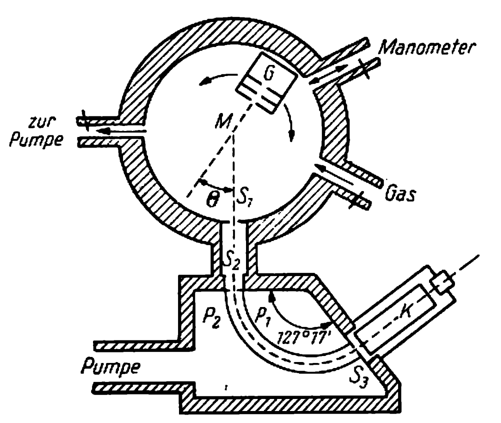


Abb. 129. Schema zur Bestimmung aller Anregungsstufen

Bedeutend anschaulicher können jene hohen Energieniveaus mit Hilfe einer Methode bestimmt werden, die von ROSHDANSKI und MAC MILLAN vorgeschlagen wurde. Dieser Versuch besteht in folgendem: Ein streng homogenes Bündel von Elektronen mit Energien, die die höchste Anregungsstufe der untersuchten Atome überschreiten, wird in ein sehr verdünntes Gas eingestrahlt. Bei unelastischen Zusammenstößen verlieren die verschiedenen Elektronen Energiebeträge, die den möglichen Anregungsstufen der Atome entsprechen. Da das Gas einen sehr geringen Druck hat, ist die Wahrscheinlichkeit wiederholter Zusammenstöße sehr gering. Wird jetzt das Elektronenbündel nach den Zusammenstößen in sein Geschwindigkeitsspektrum zerlegt, so gibt dieses Spektrum sofort alle Energieverluste an, die stattgefunden haben, und damit auch alle möglichen Energiestufen. Der Versuch selbst wird auf folgende Weise durchgeführt: Ein Elektronenbündel mit der Energie von 50 eV wird mit Hilfe der „Elektronenkanone" G erzeugt (Abb. 129). Dieses Bündel ist in den Metallzylinder gerichtet, der Helium von sehr geringem Druck enthält. Durch die Spalte S_1 und S_2 können nur solche Elektronen hindurchgehen, die im Zentrum M des Zylinders Zusammenstöße erlitten haben und hierbei in die Richtung Θ abgelenkt wurden. Zwei zylindrisch gebogene Elektroden P_1 und P_2, in deren Zwischenraum die Elektronen weiter fallen, stellen ein „Geschwindigkeitsfilter" dar (siehe § 9). Nach dem Passieren des Spaltes S_3 fallen die Elektronen in den FARADAY-Becher K, dessen Ladung mit Hilfe eines

Elektrometers gemessen werden kann. Da bei einer bestimmten Potentialdifferenz am Filter P_1 P_2 nur Elektronen genau bestimmter Geschwindigkeit hindurchgehen können, ist es möglich, unmittelbar die Energieverteilung der Elektronen,

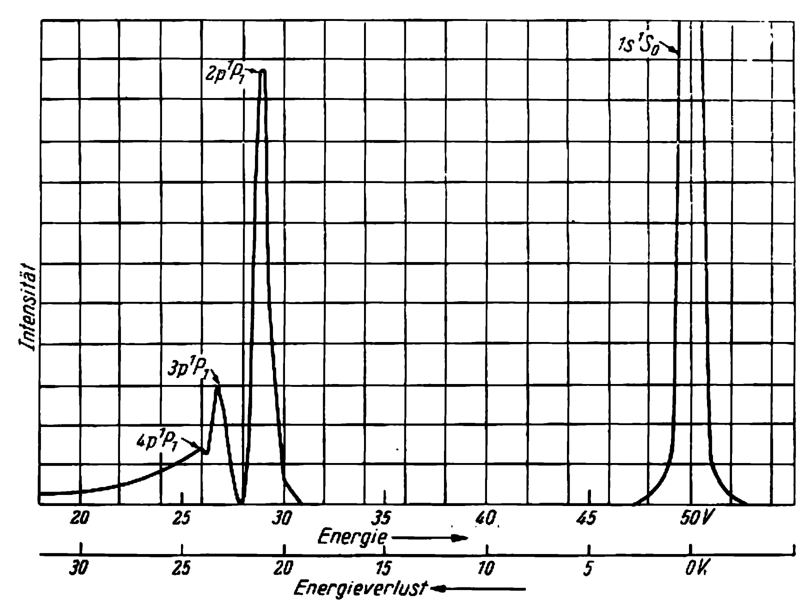


Abb. 130. Geschwindigkeitsspektrum

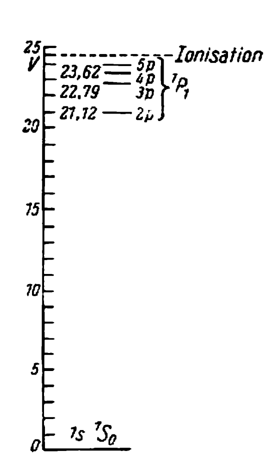


Abb. 131. Energieniveau-Schema von Helium

die unter dem Winkel Θ gestreut wurden, zu finden, wenn die Feldstärke im Raum P_1 P_2 geändert wird. Eine Änderung des Winkels Θ wird mit Hilfe einer Verschiebung der Elektronenkanone G in den durch Pfeile angezeigten Richtungen (Abb. 129) bewirkt. Das nach dem Zusammenstoß mit den Heliumatomen auf diesem Wege gefundene Energiespektrum von Elektronen mit der Anfangsenergie 50 eV ist in der Abb. 130 dargestellt. Wie ersichtlich, gibt es in diesem Spektrum neben dem Maximum, das der Anfangsenergie von 50 eV entspricht, weitere Maxima bei 28,8; 27,2; 26,38 eV. Hieraus folgt, daß die Elektronen bei den unelastischen Zusammenstößen mit den Heliumatomen nur ganz bestimmte Energiemengen verlieren können, und zwar: $50 - 28{,}8 = 21{,}2$; $50 - 27{,}2 = 22{,}8$; $50 - 26{,}4 = 23{,}6$ eV.

Verabreden wir, die Energie der Heliumatome bis zum Zusammenstoß als null anzunehmen (normaler Zustand) und die möglichen Energiezustände durch horizontale Geraden darzustellen, die auf entsprechender Höhe anzuordnen sind, dann erhalten wir ein Schema der „Energieniveaus“ des Heliumatoms, wie

es in Abb. 131 dargestellt ist. Die Energien verschiedener Niveaus, die in diesem Schema angegeben sind, wurden aus spektroskopischen Daten errechnet. Die Übereinstimmung mit den Werten, die aus den Stoßversuchen ermittelt wurden, ist vollständig befriedigend. Auf diese Weise können die Versuche als eine äußerst klare experimentelle Bestätigung des ersten BOHRschen Postulates betrachtet werden.

§ 91. Die Bestimmung der Ionisationspotentiale

Wie bereits gezeigt wurde, erlauben alle beschriebenen Methoden, die Unterschiede der Energiewerte in den verschiedenen stationären Zuständen zu finden. Zum Beispiel können wir sagen, daß für ein Quecksilberatom die Differenz E_2-E_1 gleich 4,9 eV ist. Jedoch können die Energiewerte $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ selbst nicht durch diese Methoden aufgefunden werden. Um diese Werte zu finden, genügt es offenbar zu bestimmen, welche Energie aufgewandt werden muß, um von einem Atom in einem bestimmten Energiezustand das Elektron vollkommen abzutrennen. Mit anderen Worten, die Auffindung der absoluten Energiewerte $E_1, \ldots, E_n$ stimmt mit der Bestimmung der Ionisationspotentiale in verschiedenen Energiezuständen überein.

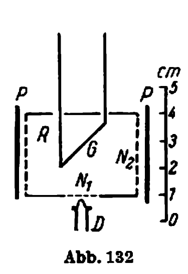


Abb. 132

Für die Bestimmung der Ionisationspotentiale wurde eine Vielzahl von Methoden vorgeschlagen. Wir beschreiben nur die HERTZsche Methode, die sich durch besondere Einfachheit und Genauigkeit auszeichnet. Eine kleine Ergänzung zu dem im § 89 beschriebenen HERTZschen Schema erlaubt es, mit Hilfe desselben Gerätes auch die Ionisationspotentiale aufzufinden. Diese Ergänzung besteht in dem zweiten Heizfaden G (Abb. 132), der sich im Innern des Raumes R befindet. Wird das Gitter N_2 mit dem Zylinder P verbunden und eine Potentialdifferenz zwischen G und N_2 gelegt, so zeigt das Galvanometer einen Glühelektronenstrom zwischen G und N_2. Bei größerem Heizstrom im Faden G wird der Glühelektronenstrom anwachsen, jedoch nur bis zu einer bestimmten Grenze, nach welcher der Anstieg endet. Dies deutet darauf hin, daß bei starken Heizströmen in dem Raum um G eine Raumladung gebildet wird, die einen weiteren Elektronenaustritt aus dem Faden verhindert.

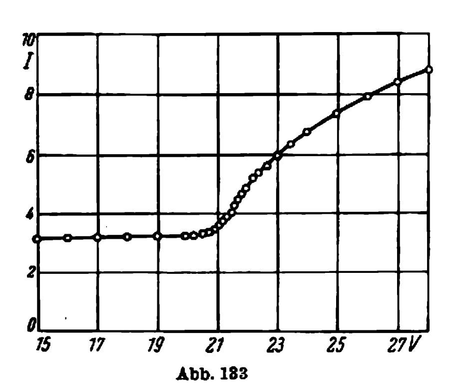


Abb. 133

Stellen wir uns jetzt vor, daß Elektronen aus der Kathode D, die durch entsprechende Potentiale beschleunigt werden können, in diesen Raum gelangen. Ist die Energie dieser Elektronen ausreichend, um die Gasatome in R zu ionisieren, dann werden bei jedem Ionisationsvorgang (im Vergleich zu den Elektronen) schwere, sich langsam bewegende positive Ionen auftreten, die einen Teil der Raumladung kompensieren. Daher wird der Glühelektronenstrom dann zwischen G und N_2 stark anwachsen.

Wenn wir beobachten, bei welchem Beschleunigungspotential zwischen D und N_1 dieser Stromanstieg beginnt, dann können wir das Ionisationspotential bestimmen. In Abb. 133 ist als Beispiel eine Kurve für Neon angeführt; das starke

Tabelle IX. Ionisationspotentiale der Elemente

Ordnungszahl	Element	Erstes Ionisationspotential in eV	Ordnungszahl	Element	Erstes Ionisationspotential in eV
1	H	13,539	14	Si	7,39
2	He	24,45	15	P	10,3
			16	S	10,31
3	Li	5,371	17	Cl	12,96
4	Be	9,50	18	Ar	15,70
5	B	8,34			
6	C	11,217	19	K	4,32
7	N	14,474	20	Ca	6,09
8	O	13,565	21	Sc	6,57
9	F	18,6	22	Ti	6,81
10	Ne	21,482	23	V	6,76
			24	Cr	6,74
11	Na	5,116	25	Mn	7,40
12	Mg	7,61	26	Fe	7,83
13	Al	5,96			

Anwachsen des Stromes bei 21 V fällt sofort ins Auge. Auf diesem Wege wurden für eine große Anzahl von Atomen des periodischen Systems die Ionisationspotentiale gefunden (siehe Tabelle IX).

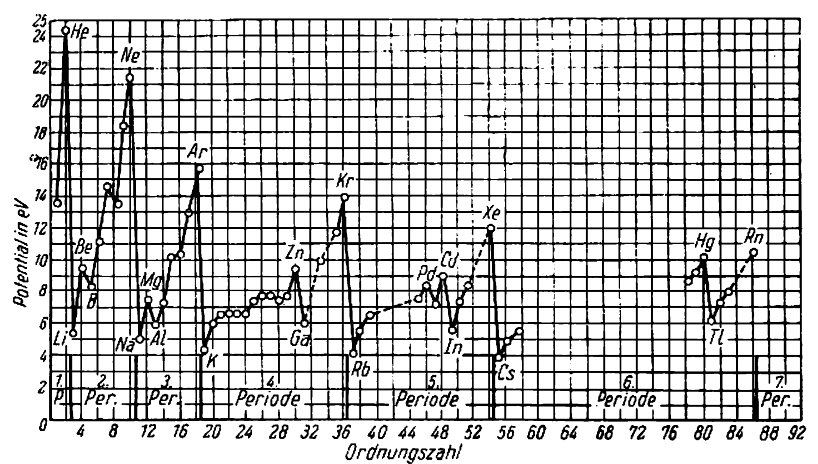


Abb. 134. Das erste Ionisationspotential

Das Ionisationspotential erscheint als eine typische äußere Atomeigenschaft, da es sich um die Loslösung äußerer Elektronen handelt. Wie alle übrigen peri-

pheren Eigenschaften, haben die Ionisationspotentiale eine periodische Abhängigkeit von der Ordnungszahl (Abb. 134). Aus Abb. 134 ist ersichtlich, daß auf den Kurvenmaxima die Edelgase liegen, die auch in chemischer Hinsicht durch besondere Trägheit charakterisiert werden. Im Gegensatz hierzu besitzen die Alkali-Metalle (Li, Na, K, Rb, Cs), die einwertig und im höchsten Grade zu chemischen Reaktionen befähigt sind, minimale Ionisationspotentiale.

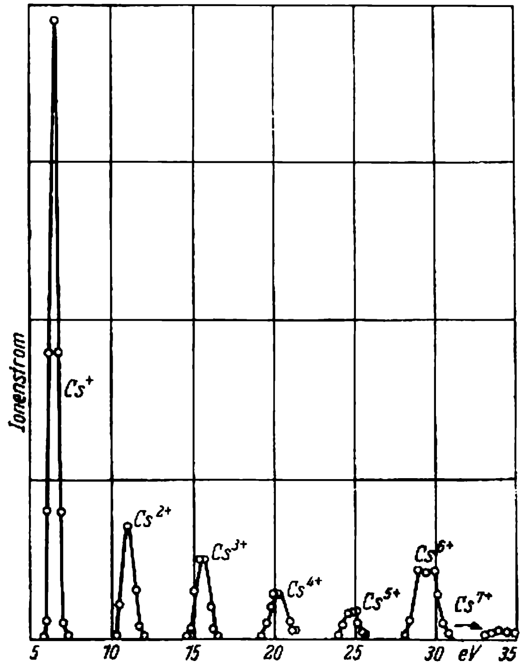


Abb. 135. Analyse des Cäsium-Dampfes. Für Cs^{6+} und Cs^{7+} wurde ein zehnfacher Ordinatenmaßstab gewählt.

Bis jetzt haben wir nur die ersten Ionisationspotentiale betrachtet, d. h. die Abtrennungsenergie eines Elektrons aus dem neutralen Atom. Interessant ist die Abtrennung eines zweiten, dritten usw. Elektrons. Die Versuchseinrichtungen des beschriebenen Typus erlauben auf das Auftreten positiver Ionen zu schließen (Anfangsionisation), sie geben jedoch keine Möglichkeit, über die Natur der Ionen etwas auszusagen, insbesondere darüber, ob die Ionen mit einer oder mit mehreren Ladungen erscheinen.

Für die Untersuchung der aufeinanderfolgenden Stadien und die Bestimmung der positiven Ionen werden massenspektrometrische Methoden benutzt (siehe § 16). Da das Massenspektrometer das Verhältnis der Ladung zur Masse $\frac{E}{M}$ bestimmt, entspricht ein Ion mit der Ladung $E = ne$ der Masse $\frac{M}{n}\left(\frac{ne}{M} = \frac{e}{M/n}\right)$. Die in Abb. 135 angegebene Kurve stellt das Massenspektrum von Ionen dar, die in Cäsiumdämpfen bei Beschießung mit Elektronen von 700 eV entstanden sind. Die sieben in der Abbildung sichtbaren Maxima entsprechen sieben aufeinanderfolgenden Ionisationsstufen des Cäsiumatoms. Die Werte der entsprechenden Ionisationspotentiale sind:

Ion	Cs^{+}	Cs^{2+}	Cs^{3+}	Cs^{4+}	Cs^{5+}	Cs^{6+}	Cs^{7+}
Ionisationspotential (eV)	3,9	27,4	62	113	171	275	410

§ 92. Die Strahlung angeregter Atome

Ein Atom, das bei einem Zusammenstoß mit einem Elektron einen Überschuß an Energie aufgenommen hat, behält ihn einige Zeit und gibt ihn dann wieder ab, wobei es wieder in den Normalzustand zurückkehrt. Ist der Gasdruck ge-

nügend klein, so besteht die wahrscheinlichste Art dieses umgekehrten Überganges in der Energieabgabe in Form von Lichtstrahlung. Hierdurch eröffnet sich ein neuer Weg zur experimentellen Prüfung der Bohrschen Postulate. Betrachten wir beispielsweise ein Quecksilberatom. Sein erstes kritisches Potential ist gleich 4,9 eV, d. h.

$$E_2 - E_1 = 4{,}9\,\text{eV}.$$

Nach dem zweiten Bohrschen Postulat muß die gesamte Energie bei dem Übergang in den Normalzustand in Form eines Lichtquants ausgestrahlt werden:

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Hieraus erhalten wir für λ

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} \approx 2500 \cdot 10^{-8}\,\text{cm} = 2500\,\text{Å}.$$

Wenn diese Theorie richtig ist, dann müssen die Quecksilberdämpfe, die der Beschießung mit Elektronen von 4,9 eV ausgesetzt sind, ein Spektrum geben, das nur aus einer ultravioletten Linie $\lambda \approx 2500$ Å besteht. Im Versuch beobachtet man tatsächlich nur die eine ultraviolette Linie $\lambda = 2537$ Å.

Diese Linie entsteht bei dem Übergang aus dem ersten Anregungszustand in den Grundzustand, wovon wir uns durch optische Anregungsversuche überzeugen können. Beleuchten wir verdünnten Quecksilberdampf mit dem monochromatischen Licht der Wellenlänge $\lambda \approx 2537$ Å, so müssen nach dem Vorhergehenden die absorbierenden Atome in den Zustand mit der Energie von 4,9 eV übergehen und bei dem umgekehrten Übergang in den Normalzustand nur eine einzige Linie *mit derselben Wellenlänge* ausstrahlen, wenn zwischen E_1 und E_2 keinerlei Zwischenniveaus mehr liegen. Der Versuch bestätigt auch diesen Schluß. Solche Spektrallinien heißen Resonanzlinien, da ihre Wellenlänge genau gleich der Absorptionswellenlänge bei optischer Anregung ist. Ist die Wellenlänge der *Resonanzlinien* bekannt, so können wir auch das erste kritische Potential berechnen.

Ein analoges Bild ergibt sich bei anderen einatomigen Gasen oder Dämpfen. In Abb. 136 wird als Beispiel das Spektrum von Magnesiumdämpfen angeführt, die



Abb. 136. Spektrum von Magnesiumdampf, der durch Elektronen mit der Energie von 3,2 eV angeregt wird

durch Elektronenstöße bei einem Beschleunigungspotential von 3,2 eV angeregt wurden. Wie ersichtlich, besteht das Spektrum bei einem Potential von 3,2 eV aus



Abb. 137. Spektrum von Magnesiumdampf, der durch Elektronen mit der Energie von 6,5 eV angeregt wird

der einen Linie 4571 Å (das Resonanzpotential 2,65 eV). Aus der Abb. 137 sieht man, daß bei dem Anregungspotential von 6,5 eV bereits zwei Linien entstehen; die frühere Linie mit 4571 Å und eine neue mit der Wellenlänge 2852 Å. Bei noch

höheren Potentialen (10 V) können wir das gesamte Spektrum der Magnesiumdämpfe erhalten.

§ 93. Die spontane Emission

In dem vorigen Paragraphen gingen wir von den Existenzbeweisen der Energieniveaus und von ihrer unmittelbaren Bestimmung zur Betrachtung der Übergänge zwischen den verschiedenen Niveaus über. Wegen der Bedeutung dieser Übergangsprozesse müssen wir sie jetzt genauer vom theoretischen Gesichtspunkt analysieren. Diese Analyse erlaubt uns, einige eigentümliche Besonderheiten der Quantenerscheinungen zu erklären. Als unmittelbare Anwendung der Resultate geben wir die einwandfreie Schlußfolgerung aus der PLANCKschen Formel, die von EINSTEIN gezogen wurde.

Betrachten wir ein Atom, das sich im freien Raum befindet und keinen äußeren Einflüssen unterworfen ist. Das Atom kann sich in den verschiedenen Quantenzuständen befinden, die der diskreten Reihe von Energieniveaus entsprechen. Zur Vereinfachung betrachten wir nur zwei dieser Zustände mit den Energien E_1 und E_2 (Abb. 138). Diese Zustände werden wir kurz mit Zustand 1 und Zustand 2 bezeichnen.

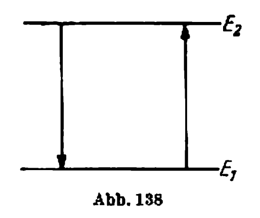


Abb. 138

Befindet sich das Atom in irgendeinem Moment t in dem angeregten Zustand 2, so kann es in dem folgenden Zeitintervall dt entweder in demselben Zustand verbleiben oder in den niederen Zustand 1 übergehen und hierbei den Energieüberschuß $E_2 - E_1$ in Form von Strahlung abgeben. Der Übergang findet stets unter der Wirkung irgendwelcher innerer Anregungen statt, die wir im einzelnen nicht analysieren wollen. Wir nehmen solchen Übergang deshalb als „unwillkürlich" oder „spontan" an und betrachten ihn als zufällige Erscheinung. Dies besagt, daß wir *nicht mit Sicherheit* vorhersagen können, ob *in dem gegebenen Atom* im Verlaufe von 1 s, die dem Zeitpunkt t folgt, ein Übergang stattfinden oder nicht stattfinden wird, sondern nur die *Übergangswahrscheinlichkeit* abschätzen können. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit eines spontanen Überganges $2 \to 1$ in der Zeiteinheit mit A_{21}. Da der spontane Übergang ein zufälliger Vorgang ist, kann man annehmen, daß A_{21} nicht von der Zeit abhängt.

Wir mögen eine sehr große Zahl von Atomen haben, die ein so stark verdünntes Gas bilden, daß die Wechselwirkungen zwischen den Atomen vernachlässigt werden können. Von diesen Atomen befinden sich N_2 Atome im Zustand 2. In dem Zeitraum zwischen t und $t + dt$ wird ein Teil von ihnen spontan in den Zustand 1 übergehen. Da solche Übergänge Erscheinungen des Zufalls sind, können wir nicht zeigen, welche Atome den Übergang ausführen, sondern können bei Kenntnis der Wahrscheinlichkeit A_{21} nur vorhersagen, wieviel Atome im Mittel den Übergang ausführen. Die Anzahl der Übergänge im Zeitintervall dt wird offensichtlich

$$dZ_{21} = A_{21} N_2 \, dt. \tag{93,1}$$

Da bei jedem dieser Übergänge entsprechend der BOHRschen Frequenzbedingung die Energie $E_2 - E_1 = h\nu$ ausgestrahlt wird, so muß in eben demselben Zeitraum die Energie

$$h\nu \, dZ_{21} = A_{21} N_2 h\nu \, dt \tag{93,2}$$

ausgestrahlt werden.

Nun können wir das Gesetz der Abnahme der Zahl angeregter Atome mit der Zeit und die mittlere „Lebenszeit" der Atome in angeregtem Zustand finden.

Es ist offensichtlich, daß die Zahl der Übergänge dZ_{21} im Zeitraum dt gleich der Verringerung der Zahl der Atome ist, die sich zur Zeit t im angeregten Zustand befanden, $dZ_{21} = -dN_2$. Die Formel (93,1) ergibt deshalb

$$-dN_2 = A_{21} N_2 \, dt. \tag{93,3}$$

Nach der Integration erhalten wir

$$N_2 = N_{20} e^{-A_{21} t}, \tag{93,4}$$

worin N_{20} die Anzahl der Atome ist, die sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand 2 befanden.

Beachten wir die Formel (93,2), so finden wir die in der Zeiteinheit emittierte Energie, d. h. die Leuchtintensität

$$J = A_{21} N_{20} e^{-A_{21} t} h\nu = J_0 e^{-A_{21} t}, \tag{93,5}$$

worin $J_0 = A_{21} N_{20} h\nu$ ist. Das Leuchten eines angeregten Gases muß also mit der Zeit nach einem Exponentialgesetz abnehmen.

Die mittlere Lebensdauer im angeregten Zustande werden wir jetzt auf folgende Weise ausrechnen. Die Anzahl Atome, die den Übergang $E_2 \rightarrow E_1$ in dem Zeitraum zwischen t und $t + dt$ durchführt, ist gleich $A_{21} N_2 dt$. Dies ist aber zugleich auch die Anzahl der Atome, die t s in angeregtem Zustand „durchlebt". Die Summe ihrer Lebensdauer ist deshalb gleich $t A_{21} N_2 dt$, und die Summe der Lebensdauer aller Atome, die einen Übergang in der Zeit von 0 bis ∞ erleidet, wird dann $\int_0^\infty t A_{21} N_2 dt$. Hieraus folgt für die mittlere Lebensdauer τ

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t A_{21} N_2 \, dt}{N_{20}}$$

oder, wenn wir (93,4) beachten,

$$\tau = A_{21} \int_0^\infty t e^{-A_{21} t} dt. \tag{93,6}$$

Nach partieller Integration und Einsetzen der Grenzwerte [vgl. (24,2)] finden wir

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}. \tag{93,7}$$

Beachten wir (93,7) und bezeichnen $N_{20} A_{21} h\nu$ wieder mit J_0, dann kann die Formel (93,5) für die Intensität in die Form

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{93,8}$$

umgeschrieben werden.

Im § 66 betrachteten wir bereits die abklingende Strahlung eines linearen Oszillators vom Gesichtspunkt der klassischen Elektrodynamik und kamen zur Formel (66,4′), die *formal* mit der Formel (93,8) identisch ist. In der Formel (66,4′) fand sich auch die Zeit τ, die wir dort als die Relaxationszeit bezeichneten, als eine das Abklingen charakterisierende Konstante. Jedoch unterscheidet sich der physika-

lische Sinn der „mittleren Lebensdauer" in angeregtem Zustande scharf von der „Relaxationszeit". Nach der klassischen Elektrodynamik vollführen alle strahlenden Dipole gleichzeitig erzwungene Schwingungen, und die Zeit τ, die der Abnahme des Amplitudenquadrates auf den e-ten Teil entspricht, ist für alle Dipole gegebener Art gleich.

Hier aber betrachten wir die Strahlung als die Gesamtheit unabhängiger Quantenübergänge, die in verschiedenen angeregten Atomen in den verschiedensten Zeitpunkten stattfinden. Ob in einem *gegebenen Zeitpunkt* ein Übergang stattfindet oder nicht, wird durch die Gesetze des Zufalls bestimmt: eines der angeregten Atome kann schon nach sehr kurzer Zeit in den normalen Zustand zurückkehren, ein anderes Atom kann in demselben Zustand sehr lange verbleiben. Wie es aber bei Massenvorgängen immer zu sein pflegt, hat die *mittlere* Lebenszeit für die Atome einer bestimmten Art einen genauen konstanten Wert.

Die experimentelle Prüfung des Abklinggesetzes beim Leuchten und die Bestimmung der mittleren Lebensdauer in angeregtem Zustande wurden von Wien direkt bei seinen Versuchen mit Kanalstrahlen durchgeführt. Ein Bündel homogener Kanalstrahlen trat durch einen Spalt der Breite 0,1 bis 0,25 mm in einen Raum ein, in dem ein hohes Vakuum unterhalten wurde. Die angeregten Atome konnten praktisch ohne Zusammenstöße „ausstrahlen". Hierbei erhielt man ein leuchtendes und auf seinem Wege abklingendes Kanalstrahlenbündel, das auf den Spalt eines Quarzspektrographen abgebildet wurde. Das Quarzprisma zerlegte das Bündel in sein Spektrum, so daß das Abklingen des Leuchtens für jede Spektrallinie einzeln verfolgt werden konnte. Ist v die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen und y die Entfernung irgendeines Punktes vom Anfang des Bündels, so ist $t = \frac{y}{v}$ und $e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{y}{v\tau}}$. Es wäre so möglich, die Zeit τ zu bestimmen, wenn man die Abnahme der Intensität längs des Kanalstrahlenbündels ermittelt.

Nach dieser Methode wurde für die rote Wasserstofflinie H_α ($\lambda = 6562$ Å) $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ s gefunden; für die Resonanzlinie des Quecksilbers ($\lambda = 2537$ Å) wurde $\tau = 9{,}8 \cdot 10^{-8}$ s in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis der auf indirektem Wege ausgeführten Berechnung von τ gefunden.

§ 94. Die erzwungene Emission und Absorption

Bis jetzt betrachteten wir die Atome, indem wir ihre Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld, in welchem sie sich befanden, nicht berücksichtigten. Die spektrale Dichte dieser Strahlung sei ϱ.

Die klassische Schwingungstheorie (begründet für Schwingungen beliebiger Art) zeigt, daß ein Dipol, der in ein Feld versetzt ist, das auf ihn mit irgendeiner sich periodisch ändernden Kraft wirkt – in Abhängigkeit von der Phasenlage zwischen den Schwingungen des Feldes und des Dipols selbst –, entweder Energie aus dem Feld absorbieren oder umgekehrt sie dem Feld abgeben kann. Im ersten Fall findet eine *positive Absorption* statt, im zweiten Fall eine *negative Absorption* oder eine erzwungene (im Unterschied zur spontanen) Ausstrahlung.

Wir wenden nun das *Korrespondenzprinzip* an (siehe § 107), nach dem zwischen den klassischen und den Quantengesetzen eine *Analogie* existieren muß. Dann

können wir schließen, daß auch das Atom, das sich in einem Strahlungsfeld befindet, sowohl positive Absorption als auch erzwungene Strahlung zeigen muß. Die Notwendigkeit der letzteren ist bei einer flüchtigen Betrachtung nicht offensichtlich.

Wenn wir ihr keine Aufmerksamkeit schenken, dann erhalten wir nicht die PLANCKsche Formel, sondern die WIENsche Formel, wovon wir uns leicht überzeugen können, wenn wir die Überlegungen des § 95 ohne Berücksichtigung der erzwungenen Schwingung machen. Hieraus folgt insbesondere, daß in dem Gebiet der kurzen Wellen, in dem die WIENsche Formel anwendbar ist, die erzwungene Ausstrahlung keine wesentliche Rolle spielt. Dies ist auch unschwer zu verstehen. Den kurzen Wellen, also den hohen Frequenzen ν, entspricht ein großer Unterschied der Energieniveaus $h\nu$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom oder Molekül infolge seiner Zusammenstöße mit anderen Atomen bis zu diesen hohen Niveaus angeregt wird, ist verschwindend klein, was auch direkt aus der MAXWELLschen Verteilung folgt. Deshalb wird bei thermodynamischem Gleichgewicht die Anzahl solcher angeregter Atome sehr klein sein. Da auch die Zahl der Übergänge mit erzwungener Strahlung der Zahl der angeregten Atome proportional ist, ist die Zahl dieser Übergänge ebenfalls entsprechend klein, und sie spielen in dem allgemeinen Gleichgewicht der Emissions- und Absorptionsvorgänge keine wesentliche Rolle. In dem langwelligen, infraroten Gebiet, in dem die Energieniveaus dicht beieinanderliegen, wird umgekehrt die Anzahl angeregter Atome um so größer sein, je enger die Niveaus liegen. In diesem Gebiet spielen die Prozesse bei erzwungener Ausstrahlung eine bedeutende Rolle. Wir wollen noch anmerken, daß die Existenz von Vorgängen mit erzwungener Ausstrahlung (oder, was dasselbe ist, Vorgänge negativer Absorption) mit einigen besonders empfindlichen Versuchen nachgewiesen wurden, auf die wir hier aber nicht eingehen können.

Wir benutzen die in dem vorigen Paragraphen gebrauchte Betrachtungsweise und behaupten, daß ein angeregtes Atom in einem Strahlungsfeld eine bestimmte Wahrscheinlichkeit besitzt, den von einer Ausstrahlung begleiteten Übergang $2 \to 1$ auszuführen. Da diese Übergänge durch die Anwesenheit des Feldes bedingt werden, nehmen wir ihre Wahrscheinlichkeit als proportional der Spektraldichte ϱ an und setzen sie gleich $B_{21}\varrho_\nu$. Die gesamte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das angeregte Atom in der Zeiteinheit einen Übergang mit *entweder* spontaner *oder* erzwungener Ausstrahlung ausführt, wird gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten sein

$$A_{21} + B_{21}\varrho_\nu ,$$

und die Gesamtzahl der Übergänge mit Ausstrahlung in dem Zeitraum dt beträgt

$$dZ_{21} = (A_{21} + B_{21}\varrho_\nu)\, N_2\, dt . \qquad (94{,}1)$$

Was die positive Absorption betrifft, so betrachten wir sie in vollkommen analoger Weise. Das Atom führt einen Übergang von dem niedrigen Quantenzustand 1 zu dem höheren 2 aus, wobei es aus dem Feld die Energie $E_2 - E_1 = h\nu$ aufnimmt. Ihre Absorption durch das gegebene Atom ist eine zufällige Erscheinung, und die Wahrscheinlichkeit der Absorption ist proportional ϱ_ν und gleich $B_{12}\varrho_\nu$. Ist die Anzahl der Atome, die sich zur Zeit t in dem Energiezustand E_1 befinden, gleich N_1, dann wird die Zahl der Übergänge im Zeitintervall zwischen t und $t + dt$

$$dZ_{12} = B_{12}\varrho_\nu N_1\, dt . \qquad (94{,}2)$$

§ 95. Die Ableitung der Planckschen Formel nach Einstein

Wenden wir uns jetzt der Ableitung der Planckschen Formel zu. Wir betrachten einen geschlossenen Hohlraum, dessen Wände auf die Temperatur T erhitzt werden. Die die Wände des Hohlraums bildenden Atome emittieren und absorbieren elektromagnetische Wellen. Das statistische Gleichgewicht zwischen den Vorgängen der Emission und der Absorption stellt sich dann ein, wenn die Gesamtzahl der Emissionsakte der Gesamtzahl der Absorptionsakte in eben demselben Zeitraum gleich ist; die spektrale Dichte der Strahlung im Innern des Hohlraums wird hierbei gleich ϱ_ν. Benutzen wir die Formeln (94,1) und (94,2), dann erhalten wir für den Gleichgewichtszustand

$$(A_{21} + B_{21}\varrho_\nu)\, N_2 = B_{12}\varrho_\nu N_1\,, \tag{95,1}$$

woraus

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\,\varrho_\nu}{A_{21} + B_{21}\varrho_\nu} \tag{95,2}$$

folgt.

Die Beziehung $\frac{N_2}{N_1}$ kann auch mit Hilfe der allgemeinen Gesetze der statistischen Mechanik auf andere Weise ausgedrückt werden. Wenn das System befähigt ist, eine diskrete Reihe von Energiewerten $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ anzunehmen, wird nach diesen Gesetzen (kanonische Verteilung) die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes mit bestimmter Energie, d. h. die Anzahl von Atomen, die die Energie E_i besitzen, durch die Formel

$$w_i = Ce^{-\frac{E_i}{kT}} \tag{95,3}$$

ausgedrückt, wobei C eine Konstante ist. Sie wird so gewählt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dem Atom *irgendeiner* der möglichen Energiewerte zukommt, gleich 1 wird (Normierungskonstante).

In der Atomphysik gibt es nicht selten Fälle (siehe zum Beispiel den folgenden Abschnitt, § 106), bei denen es einige verschiedene Zustände gibt, in welchen das Atom ein und dieselbe Energie hat (der sogenannte Fall der *Entartung*). In solchen Fällen entspricht den verschiedenen Energiewerten ein unterschiedliches statistisches Gewicht, welches in der Quantenphysik durch die Anzahl der übereinstimmenden Energieniveaus charakterisiert wird. Daher wird in dem allgemeinen Fall die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes w_i in der Form

$$w_i = Cg_i\, e^{-\frac{E_i}{kT}} \tag{95,4}$$

ausgedrückt, worin g_i ein statistisches Gewicht ist, das in dem Falle einfacher (nichtentarteter) Energieniveaus gleich 1 ist.

Beachten wir alles Gesagte, dann haben wir für die Beziehung $\frac{N_2}{N_1}$ den folgenden Ausdruck:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}}. \tag{95,5}$$

Vergleichen wir (95,2) und (95,5), dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_{12}\varrho_\nu}{A_{21}+B_{21}\varrho_\nu} &= \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}}, \\ \varrho_\nu &= \frac{A_{21}g_2}{B_{12}g_1 e^{\frac{E_2-E_1}{kT}} - B_{21}g_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (95,6)$$

Gemäß der BOHRschen Frequenzbedingung ist $E_2 - E_1 = h\nu$, und folglich

$$\varrho_\nu = \frac{A_{21}\,g_2}{g_1\,B_{12}\,e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}\,g_2}. \qquad (95,7)$$

Dies ist die Formel für die Energieverteilung im Spektrum einer im Gleichgewicht befindlichen Strahlung. Zur Bestimmung der Koeffizienten A und B benutzen wir die folgenden Grenzbedingungen:

1. Bei $T \to \infty$, d. h. bei $h\nu \ll kT$, muß die Dichte $\varrho_\nu \to \infty$ streben, d. h. der Nenner in (95,7) muß gegen null gehen. Dies ergibt sofort

$$\frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21} \text{ oder } g_1 B_{12} = g_2 B_{21}. \qquad (95,8)$$

2. Bei derselben Bedingung $h\nu \ll kT$ muß die RAYLEIGH-JEANSsche Formel

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

gültig sein. Unter Berücksichtigung von (95,8) schreiben wir (95,7) in der folgenden Form:

$$\varrho_\nu = \frac{g_2\,A_{21}}{g_1\,B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \qquad (95,9)$$

Zerlegen wir $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ in eine Reihe, dann erhalten wir mit der ersten Näherung $1 + \frac{h\nu}{kT}$, und folglich erhält (95,9) die Form

$$\varrho_\nu = \frac{g_2\,A_{21}}{g_1\,B_{12}} \cdot \frac{kT}{h\nu}.$$

Der Vergleich mit der RAYLEIGH-JEANSschen Formel ergibt

$$\frac{g_2\,A_{21}}{g_1\,B_{12}} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}, \quad \frac{g_2\,A_{21}}{g_1\,B_{12}} = \frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3},$$

und jetzt erhält (95,9) die Form

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Dies aber ist die PLANCKsche Formel.

VIII. DIE SPEKTRALSERIEN UND DIE ENERGIENIVEAUS DES WASSERSTOFFATOMS

§ 96. Die Balmer-Serie

Die Spektrallinien des Wasserstoffatoms zeigen in ihrer Aufeinanderfolge einfache Gesetzmäßigkeiten. In Abb. 139 ist die Photographie eines Emissionsspektrums von Wasserstoff wiedergegeben, das im Laboratorium aufgenommen wurde;

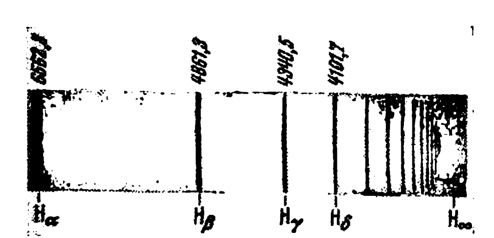


Abb. 139. Balmer-Serie im Emissionsspektrum atomaren Wasserstoffes, H_α, H_β, H_γ, H_δ

in Abb. 140 ist das gleiche Spektrum (Absorption) vom Stern ζ-Tauri dargestellt. Das Bestehen eines gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen den Spektrallinien auf dieser und jener Photographie fällt unmittelbar ins Auge. Tatsächlich



Abb. 140. Balmer-Serie im Absorptionsspektrum (des Sterns ζ-Tauri), beginnend von H_γ bis zur Seriengrenze

zeigte schon im Jahre 1885 Balmer, daß die Wellenlängen der vier Linien, die im sichtbaren Teil liegen und durch die Symbole H_α, H_β, H_γ, H_δ (Abb. 139) gekennzeichnet sind, sehr genau durch die empirische Formel

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4} \qquad (96{,}1)$$

dargestellt werden können, worin an Stelle von n die ganzen Zahlen 3, 4, 5, 6 zu setzen sind und B eine empirische Konstante gleich $3645{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm $= 3645{,}6$ Å ist. Wie genau die nach dieser Formel berechneten Wellenlängen mit den unmittelbaren Messungen übereinstimmen, ist aus der Tabelle X ersichtlich.

Neben den vier sichtbaren Linien wurden noch fünf ultraviolette aus irdischen Quellen und 10 aus den Spektren weißer Sterne bekannt.[1]) Wenn wir in die BALMERsche Formel die ganzen Zahlen $n = 7, 8, \ldots$ einsetzen, dann können wir auch

Tabelle X

Linie	Berechnet nach der BALMER-Formel Å	gemessen Å	Differenz Å
H_α	6562,08	6562,10	+0,02
H_β	4860,80	4860,74	−0,06
H_γ	4340,00	4340,10	+0,10
H_δ	4101,30	4101,20	−0,10

die Wellenlängen dieser ultravioletten Linien darstellen. Die Übereinstimmung der errechneten und der beobachteten Wellenlängen erwies sich jedoch für diese Wellenlängen als etwas schlechter, was sich ausschließlich durch die Ungenauigkeit erklärt, mit der diese Linien damals gemessen wurden.

Die durch die BALMER-Formel ausgedrückte Gesetzmäßigkeit wird besonders anschaulich, wenn wir sie in der Form darstellen, in der sie gewöhnlich benutzt wird. Zu diesem Zweck formen wir sie so um, daß sie nicht die Wellenlängen auszurechnen erlaubt, sondern die Frequenzen oder Wellenzahlen. Nach der bekannten Formel wird die Frequenz (Zahl der Schwingungen in 1 s) in der Form

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0}\ \mathrm{s}^{-1}$$

ausgedrückt, worin c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und λ_0 die Wellenlänge im Vakuum ist. Die *Wellenzahl* ist die reziproke Wellenlänge oder die Anzahl der Wellen, die auf 1 cm entfallen:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda_0}\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

In der Spektroskopie werden vorzugsweise die Wellenzahlen (in cm^{-1}) benutzt, da die Wellenlängen heute mit großer Genauigkeit bestimmt werden, und folglich mit derselben Genauigkeit auch die Wellenzahlen bekannt sind, während die Lichtgeschwindigkeit und damit auch die Frequenz mit bedeutend geringerer Genauigkeit bekannt sind.

Aus (96,1) erhalten wir

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B}\frac{n^2-4}{n^2} = \frac{4}{B}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{96,2}$$

Bezeichnen wir die Konstante $4/B$ mit R (nach dem schwedischen Spektroskopiker RYDBERG), dann können wir (96,2) umschreiben in

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots). \tag{96,3}$$

Dies ist die übliche Form der BALMER-Formel.

Aus der Formel (96,3) ist ersichtlich, daß mit der Vergrößerung von n sich der Unterschied zwischen den Wellenzahlen benachbarter Linien vermindert und wir bei $n = \infty$ den konstanten Wert $\tilde{\nu} = \frac{R}{2^2}$ erhalten. Auf diese Weise müssen die Abstände

[1]) Weitere Linien s. S. 249.

der Linien ständig kleiner werden, wenn sie zum Grenzwert $\tilde{\nu} = \frac{R}{4}\,\mathrm{cm}^{-1}$ streben. Dies ist deutlich auf den Photographien der Abb. 139 und 140 zu erkennen; die theoretische Lage der Seriengrenze ist in der Abb. 139 durch das Symbol H_∞ angegeben. Außerdem zeigt die Beobachtung, daß sich mit der Vergrößerung der Nummer der Linie ihre Intensität gesetzmäßig ändert. Stellen wir die von der Formel (96,3) erfaßten Spektrallinien schematisch dar und geben ihre Intensität durch die verschiedene Länge der Linien an, so wird das in der Abb. 141 gezeigte Bild erhalten.

Die Gesamtheit von Spektrallinien, die in ihrer Aufeinanderfolge und Intensitätsverteilung eine Gesetzmäßigkeit erkennen lassen, wie sie schematisch in Abb. 141 dargestellt ist, heißt allgemein eine *Spektralserie*. Die Grenzwellenzahl, an der sich die Linien bei $n \to \infty$ häufen, heißt die *Seriengrenze*.

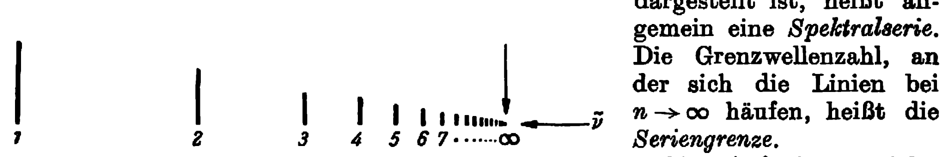


Abb. 141. Allgemeines Schema der Spektralserie

Die Aufnahme vieler Linien des atomaren Wasserstoffs mit Hilfe irdischer Quellen ist mit großen experimentellen Schwierigkeiten verbunden. Es gelang erst Wood im Jahre 1920, 22 Glieder der Balmer-Serie zu photographieren und 20 auszumessen. Die größte Zahl der Linien dieser Serie konnte in dem Spektrum der Sonnenchromosphäre und den Protuberanzen durchgemessen werden (bis 37 Glieder).

§ 97. Die Serien von Lyman, Paschen usw. Die verallgemeinerte Balmer-Serie

Neben der Balmer-Serie im Spektrum des atomaren Wasserstoffs wurde eine Reihe anderer Serien beobachtet, die sich durch vollkommen analoge Formeln darstellen lassen. So entdeckte Lyman im kurzwelligen, ultravioletten Teil des Spektrums die Serie

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{97,1}$$

Im infraroten Teil wurden drei Serien gefunden:

die Paschen-Serie

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 4, 5, \ldots), \tag{97,2}$$

die Brackett-Serie

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 5, 6, \ldots), \tag{97,3}$$

die Pfund-Serie

$$\tilde{} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 6, 7, \ldots). \tag{97,4}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß alle bekannten Serien des atomaren Wasserstoffs durch die allgemeine Formel

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{97,5}$$

dargestellt werden können, worin m in jeder gegebenen Serie einen konstanten

Tabelle XI. Serien des atomaren Wasserstoffs

Lyman-Serie $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	$\lambda_{Vak.}$ (beob.) Å	$\lambda_{Vak.}$ (berechn.) Å	$\tilde{\nu}$ (berechn.) cm^{-1}
2	1 215,7	1 215,68	82 258,31
3	1 026,0	1 025,73	97 491,36
4	972,7	972,54	102 822,94

Balmer-Serie $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{Luft} (beob.) Å	$\lambda_{Vak.}$ (berechn.) Å	$\tilde{\nu}$ (berechn.) cm^{-1}
3	6 562,8473 6 562,7110	6 562,793	15 233,216
4	4 861,3578 4 861,2800	4 861,327	20 564,793
5	4 340,497 4 340,429	4 340,466	23 032,543
6	4 101,7346	4 101,738	25 181,055
7	3 970,0740	3 970,075	24 373,343
8	3 889,0575	3 889,052	25 705,957
9	3 835,397	3 835,387	26 065,61
10	3 797,910	3 797,900	26 322,90

Paschen-Serie $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{Luft} (beob.) Å	λ_{Luft} (berechn.) Å	$\tilde{\nu}$ (berechn.) cm^{-1}
4	18 751,3	18 751,1	5 331,58
5	12 817,6	12 818,1	7 799,33
6	10 938,0	10 938,1	9 139,84
7	10 049,8	10 049,4	9 948,13
8	9 546,2	9 546,0	10 472,74
9	9 229,7	9 229,1	10 832,40
10	9 015,3	9 014,9	11 089,69
11	8 863,4	8 862,9	11 280,03

Brackett-Serie $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ_{Luft} (beob.) Å	λ_{Luft} (berechn.) Å	$\tilde{\nu}$ (berechn.) cm^{-1}
5	40 500	40 510,4	2 467,75
6	26 300	26 251,6	3 808,26

Pfund-Serie $\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ (beob.) Å	λ (berechn.) Å	$\tilde{\nu}$ (berechn.) cm^{-1}
6	74 000	74 578,0	1 340,512

Wert ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) hat und n die Reihe der ganzzahligen Werte von $m + 1$ an durchläuft. Diese Formel (97,5) heißt die verallgemeinerte BALMER-Formel.

In der Tabelle XI sind die berechneten und gemessenen Wellenlängen in den verschiedenen Serien des atomaren Wasserstoffs angeführt (von der BALMER-Serie sind 10 von den 36 gemessenen Gliedern angegeben). Diese Tabelle liefert die Möglichkeit, über die Genauigkeit zu urteilen, mit der die Formeln der Spektralserien die Wellenlängen auszurechnen erlauben.

§ 98. Die Spektralterme. Das Kombinationsprinzip

Vergleichen wir die Formeln (97,1) bis (97,4) unter sich, dann können wir leicht feststellen, daß das konstante erste Glied in jeder Formel als eines der veränderlichen Glieder der anderen Formeln erscheint. So erscheint das konstante Glied der Formel der PASCHEN-Serie $R/3^2$ als erstes der möglichen veränderlichen Glieder der BALMER-Serie und als zweites für die Formel der LYMAN-Serie. Das konstante Glied der BALMER-Serie erscheint als eins der veränderlichen Glieder in der Formel der LYMAN-Serie usw. Diese Tatsache ist besonders klar aus der Schreibweise der verallgemeinerten BALMER-Serie (97,5) zu ersehen, welche zeigt, daß die Wellenzahl einer beliebigen Spektrallinie des Wasserstoffspektrums als Differenz zweier Glieder vom Typ R/m^2 bei irgendwelchen zwei ganzen Werten von m dargestellt werden kann. Dies ist die moderne Formulierung des sogenannten *Kombinationsprinzips*.

Führen wir die Bezeichnungen

$$T(m) = \frac{R}{m^2}, \quad T(n) = \frac{R}{n^2} \tag{98,1}$$

ein, dann können wir (97,5) als Differenz zweier Funktionen ganzer Zahlen schreiben:

$$\tilde{\nu} = T(m) - T(n). \tag{98,2}$$

Die Zahlen $T(m)$, $T(n)$ heißen *Spektralterme* oder einfach Terme. Für das Wasserstoffatom erhält man das gesamte System der Terme aus der allgemeinen Formel

$$T = \frac{R}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{98,3}$$

Aus (98,3) folgt, daß wir bei Kenntnis des Termsystems eines gegebenen Atoms die Wellenzahl einer beliebigen Spektrallinie als Differenz zweier Glieder dieses Systems erhalten können.

Wir können dem Kombinationsprinzip eine etwas andere Form geben: Sind die Wellenzahlen zweier Spektrallinien ein und derselben Serie bekannt, so ist ihre Differenz die Wellenzahl einer dritten Spektrallinie, die zu demselben Atom gehört. Es seien beispielsweise die Wellenzahlen zweier Linien der LYMAN-Serie gegeben:

$$\tilde{\nu}_1 = T_1 - T_2 \text{ und } \tilde{\nu}_2 = T_1 - T_3.$$

Dann wird die Differenz $\tilde{\nu}_2 - \nu_1$ die Wellenzahl der ersten Linie der BALMER-Serie

$$\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = T_2 - T_3 \text{ usw.}$$

Aus der letzten Spalte der Tabelle XI finden wir

$$\tilde{\nu}_1 = 82\,258{,}31 \text{ cm}^{-1}, \quad \tilde{\nu}_2 = 97\,491{,}36 \text{ cm}^{-1}.$$

Die Differenz dieser Zahlen ist $\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = 15233{,}05\ \mathrm{cm}^{-1}$. In derselben Tabelle finden wir für das erste Glied der BALMER-Serie ($n = 3$) $\tilde{\nu} = 15233{,}216$, eine Zahl, die innerhalb der Fehlergrenze mit $\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1$ übereinstimmt.

Das Kombinationsprinzip wurde auf rein empirischem Wege entdeckt und erweckte wie viele andere Gesetzmäßigkeiten in den Spektren anfänglich den Anschein eines Zahlenkuriosums. Der tiefe Sinn dieses Prinzips enthüllte sich erst, als die BOHRschen Quantenpostulate formuliert wurden.

Wir können uns unschwer davon überzeugen, daß die durch dieses Prinzip ausdrückbare Gesetzmäßigkeit für die Frequenzen scharf der klassischen Physik widerspricht. Schreiben wir einem Elektron einen Freiheitsgrad zu, dann müßte das Spektrum aus einer Frequenz und ihren Obertönen bestehen; würden dem Elektron drei Freiheitsgrade zugeschrieben, dann hätten wir drei Grundfrequenzen mit ihren Obertönen. Tatsächlich jedoch werden in den Atomspektren keinerlei Obertöne beobachtet, Frequenzen also, die eine harmonische Reihe bilden.

BOHR wies als erster darauf hin, daß das Kombinationsprinzip als treffender Ausdruck der eigentümlichen Quantengesetze, die die inneratomaren Bewegungen beschreiben, erscheint. BOHR verallgemeinerte die PLANCKsche Formel, die nur für den Sonderfall der linearen Oszillatoren gilt, und erkannte in dem Kombinationsprinzip einen Hinweis dafür, daß sich die Atome nur in bestimmten Zuständen befinden können, deren Energiewerte eine diskrete Reihe bilden. Auf diese Weise entspricht jedem Term ein bestimmter stationärer Energiezustand, und die im § 85 formulierte BOHRsche Frequenzbedingung stellt nichts anderes dar als das auf andere Art ausgedrückte Kombinationsprinzip. Es besagt in dieser Form, daß jede von den ausstrahlbaren Frequenzen mit zwei stationären Zuständen verbunden ist. Wenn wir die Wellenzahl pro cm^{-1} mit $\tilde{\nu}$ bezeichnen, dann wird die Frequenz pro s^{-1} gleich $c\tilde{\nu}$, und die Frequenzbedingung (85,1) kann in der Form

$$hc\tilde{\nu} = E_n - E_m$$

geschrieben werden, woraus

$$\nu = \frac{E_n}{hc} - \frac{E_m}{hc} \tag{98,4}$$

folgt. Setzen wir

$$T(n) = -\frac{E_n}{hc}, \tag{98,5}$$

so stellt sich (98,4) in der Form

$$\tilde{\nu} = T(m) - T(n)$$

dar, und wir erhalten die schon bekannte Formulierung des Kombinationsprinzips. Das Minuszeichen in (98,5) hat einen bedingten Wert: wie wir wissen, ist die (nichtrelativistische) mit dem COULOMBschen Feld verbundene Energie eines Elektrons immer negativ (§ 49), während den Termen zweckmäßiger ein positives Vorzeichen beigelegt wird.

Führen wir in (98,5) den Ausdruck für die RYDBERG-Konstante nach der Definition (98,1) ein, dann können wir auch die Energie der Atome durch diese Konstante ausdrücken:

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}. \tag{98,6}$$

In dieser Formel sind h und c Universalkonstanten, n eine ganze Zahl und nur R eine empirische Konstante. Diese Formel würde einen erschöpfend klaren physika-

lischen Wert erhalten, wenn wir auch die RYDBERG-Konstante R durch Universalkonstanten ausdrücken könnten. Dies gelang BOHR schon im ersten Entwurf seiner Theorie des Atombaues.

§ 99. Die Quantenbahnen

Der BOHRschen Theorie liegen die im § 85 formulierten Quantenpostulate zugrunde, besonders das Postulat der stationären Zustände und die Frequenzbedingung. Wie schon mehrfach hingewiesen wurde, befinden sich diese Postulate im scharfen Widerspruch zu den Gesetzen der klassischen Physik. Während die BOHRschen Postulate die Existenz einer diskreten Aufeinanderfolge von Energieniveaus fordern, denen im Atom eine ausgewählte Reihe von *Quantenbahnen* entspricht, führt die klassische Mechanik zu einer stetigen Vielzahl von Bahnen. Dieser Widerspruch hat allgemeinen Charakter. Die Gesamtheit aller Tatsachen weist eindeutig darauf hin, daß in den Erscheinungen der Atomwelt eine Unstetigkeit auftritt, die durch die endliche Größe (ungleich null) der PLANCKschen Konstante charakterisiert wird. Umgekehrt ist gerade für die Erscheinungen im makroskopischen, d. h. großen Maßstab die Stetigkeit charakteristisch.

Wir kommen somit zu dem Schluß, daß die klassische Mechanik mit ihren sich stetig ändernden Größen auf die atomaren Erscheinungen nicht anwendbar ist. Wir werden ferner im Abschnitt X sehen, daß diese Nichtanwendbarkeit grundlegend ist. Es wird sich zeigen, daß sehr kleine Teilchen — Elektronen, Protonen usw. — bei ihren Bewegungen vollkommen eigenen Wellengesetzen unterworfen sind, die sich scharf von den Gesetzen der klassischen Mechanik unterscheiden. Dieser Umstand wurde erst zwölf Jahre nach der Aufstellung der BOHRschen Postulate aufgedeckt. In den ersten Entwicklungsstadien der Atommechanik mußte die folgende, logisch widerspruchsvolle Methode benutzt werden: Zu Anfang wurde die Aufgabe mit Hilfe der klassischen Mechanik gelöst, und hiernach wurden aus der stetigen Vielzahl von Bewegungszuständen, zu denen die klassische Mechanik führte, auf Grund eines besonderen Postulates die Quantenzustände definiert. Trotz der Unvollkommenheit dieser Methode führte sie zu sehr guten Erfolgen. Es genügt, einige eigentümliche Züge der atomaren Prozesse zu bemerken und aus ihnen die notwendigen Folgerungen zu ziehen, um die verwickelten Gesetzmäßigkeiten in den Atom- und Molekülspektren zu entwirren und bedeutend näher an das Verständnis der chemischen Prozesse heranzukommen.

Wir formulieren vor allem jenes Postulat, auf Grund dessen in der BOHRschen Theorie die Festlegung der Quantenbahnen stattfindet. Wir werden hierzu von dem einfachsten Atommodell ausgehen: ein zentraler positiv geladener Kern, um den sich ein Elektron auf einer Kreisbahn bewegt. Den etwas verwickelten Fall elliptischer Bahnen werden wir weiter unten im § 106 kurz betrachten.

Das Postulat der Existenz von Quantenbahnen, das wir jetzt zu formulieren haben, ist eigentlich eine zweckmäßige Verallgemeinerung des PLANCKschen Postulats für die Auswahl der Quantenzustände eines linearen Oszillators. Danach existieren von allen möglichen Zuständen eines linearen Oszillators nur solche, deren Energie gleich

$$E_n = nh\nu \tag{99,1}$$

ist.

Formulieren wir diese nur auf lineare Oszillatoren anwendbare Bedingung etwas anders. Wir schreiben sie um in die Form

$$\frac{E}{\nu} = nh. \qquad (99,2)$$

Diese Bedingung können wir als allgemeine Forderung dafür betrachten, daß in atomaren Systemen die mechanische Größe, die die Dimension [Energie/Frequenz] besitzt oder, was dasselbe ist, die Dimension [Energie × Zeit] und als Wirkung b-zeichnet wird, ein Vielfaches der PLANCKschen Konstante h sein muß. Das Problem führt jetzt zu der zweckmäßigen Bestimmung dieser Größe für jeden speziellen Fall.

Um die allgemeine Regel zu zeigen, die automatisch zur richtigen Ermittlung der Zustände führt, betrachten wir von neuem den linearen Oszillator. Sein Zustand wird in der klassischen Mechanik durch die kartesische Koordinate x und den ihr entsprechenden Impuls $m\dot{x}$ gekennzeichnet. Wir werden diese Zustandsparameter mit q und p bezeichnen und den Zustand des Oszillators als Punkt im Phasenraum darstellen, wie das in der statistischen Mechanik üblich ist. Da der Zustand des Systems vollständig durch die beiden Parameter p und q charakterisiert wird, erscheint der „Phasenraum" als eine Ebene, und jeder Zustand des Systems, der durch die gegebenen Werte p und q charakterisiert wird, stellt sich als Punkt auf dieser Ebene dar. Bei einer Bewegung im System wird dieser Punkt seine Lage stetig ändern und irgendeine Phasenbahn beschreiben (Abb. 142). Wir zeigen nun, wie diese Bahn für einen Oszillator, der die gegebene Energie E besitzt, aussehen wird.

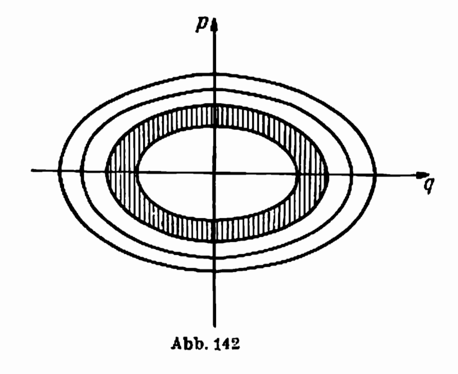


Abb. 142

Der Ausdruck für die Gesamtenergie $(T + U)$ eines Oszillators (siehe § 44) lautet:

$$E = T + U = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{fq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{fq^2}{2}. \qquad (99,3)$$

Dividieren wir beide Seiten durch E:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{f}} = 1$$

und führen wir die Bezeichnungen

$$a = \sqrt{2mE} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{f}} \qquad (99,4)$$

ein, dann erhalten wir

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1. \qquad (99,5)$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse, so daß die Phasenbahn eines linearen Oszillators eine Ellipse ist, deren Achsen nach (99,4) für einen gegebenen Oszillator (gegeben mit m und f) durch die Energie bestimmt sind. Berechnen wir jetzt die Fläche dieser Ellipse. Eine von der Kurve $y = f(x)$ begrenzte Fläche ist gleich

$\int y\,dx$; andererseits ist der Flächeninhalt einer Ellipse gleich πab. Somit ist $\oint p\,dq = \pi ab$, wobei der Kreis um das Integral anzeigt, daß die Berechnung über die geschlossene Kurve erfolgt. Nach (99,4) ist aber

$$\pi ab = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{f}} = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{f}}\,.$$

Da für einen harmonischen Oszillator $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}$ ist, folgt

$$\oint p\,dq = \pi ab = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{f}} = \frac{E}{\nu} \tag{99,6}$$

oder, wenn wir (99,2) beachten,

$$\oint p\,dq = nh\,. \tag{99,7}$$

Jetzt bleibt uns noch der folgende Schritt durchzuführen: die Formel (99,7) werden wir als eine allgemeine Quantenbedingung für beliebige Systeme mit einem Freiheitsgrad betrachten, wenn nur unter q und p die *allgemeinen* Koordinaten und die ihr entsprechenden *allgemeinen Impulse* verstanden werden.

Wenden wir diese allgemeine Bedingung auf unser Modell eines sich auf einer Kreisbahn bewegenden Elektrons an. Hier wird zweckmäßig als Koordinate der Polarwinkel φ gewählt, der die Elektronenbewegung auf der Bahn charakterisiert. Der ihr entsprechende Impuls wird (siehe § 55) durch den Drehimpuls $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ gegeben. Setzen wir jetzt in (99,7) φ und p_φ an Stelle von p und q ein und bedenken, daß nach dem Satz von der Erhaltung des Drehimpulses $p_\varphi = \text{const}$ ist, so erhalten wir

$$nh = \oint p\,dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi = p_\varphi\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi\,,$$

woraus sich sofort

$$p_\varphi = n\,\frac{h}{2\pi} \tag{99,8}$$

ergibt.

Dies ist die bekannte „Quantelungsregel“ für Kreisbahnen: unter allen nach der klassischen Mechanik möglichen Bahnen existieren in Wirklichkeit nur solche, bei denen der Drehimpuls ein ganzes Vielfaches von $h/2\pi$ ist. Die letzte Größe $h/2\pi$ erscheint auf diese Weise als Quanteneinheit des Drehimpulses.

§ 100. Die Bohrsche Theorie

Wenden wir uns jetzt der Bohrschen Theorie zu. Wir werden das sogenannte „wasserstoffähnliche Atom“ betrachten, ein System also, das aus einem Kern mit der Ladung $+Ze$ (Z ist eine ganze Zahl) und einem Elektron besteht. Bei $Z = 1$ stellt ein solches System das eigentliche Wasserstoffatom dar, bei $Z = 2$ ein einfach ionisiertes Heliumatom He^+, bei $Z = 3$ ein zweifach ionisiertes Lithiumatom Li^{++}, bei $Z = 4$ das Ion Be^{+++} usw.

Aus der kinetischen Gastheorie ist bekannt, daß der „Durchmesser" der Atome von der Größenordnung 10^{-8} cm ist. Andererseits folgt aus den RUTHERFORDschen Streuversuchen mit α-Teilchen, daß das COULOMBsche Gesetz bis zu Entfernungen der Größenordnung 10^{-12} cm gilt. In unserem Modell ist die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern dem COULOMBschen Gesetz unterworfen. Die Kraft also, mit welcher der Kern das Elektron festhält, muß gleich Ze^2/r^2 sein. Lassen wir zu, daß die Bewegung des Elektrons im Atom den Gesetzen der klassischen Mechanik unterworfen ist, dann können wir auf dieses Modell alle Resultate übertragen, die wir bei der Lösung der KEPLER-Aufgabe in der klassischen Mechanik (§ 49) erhalten haben; insbesondere muß die Gesamtenergie (kinetische + potentielle Energie) eines solchen Systems gleich

$$E = -\frac{Ze^2}{2a} \tag{49,19}$$

sein, worin a die große Halbachse der Ellipse oder in unserem Falle der Radius der Kreisbahn ist. Nach dem dritten KEPLERschen Gesetz (§ 49) ist der Radius a mit der Umlaufsdauer T durch die Beziehung

$$\frac{a^3}{T^2} \equiv a^3\nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \tag{49,24}$$

verbunden.[1])

Die zweite Beziehung gibt uns die im vorigen Paragraphen aufgestellte Quantelungsregel:

$$p_\varphi = n\frac{h}{2\pi}. \tag{99,8}$$

Nach Definition ist weiterhin

$$p_\varphi = ma^2\dot{\varphi} = ma^2\omega = 2\pi m a^2\nu, \tag{100,1}$$

woraus folgt

$$a^2\nu = \frac{nh}{4\pi^2 m}. \tag{100,2}$$

Vergleichen wir (100,2) und (49,24), dann erhalten wir leicht

$$a = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 mZe^2}. \tag{100,3}$$

Für $Z = 1$ und $n = 1$ (erste Bahn des Wasserstoffatoms) erhalten wir

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2} = 0{,}528 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}. \tag{100,4}$$

Diese Kombination von Universalkonstanten wird bei den Berechnungen auch später auftreten; wir werden sie immer mit a_1 bezeichnen. Setzen wir den Wert (100,3) in (49,19) ein, dann erhalten wir

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{n^2h^2}. \tag{100,5}$$

[1]) Im Falle von Kreisbahnen kann die Beziehung (49,24) auch auf folgende einfache Art und Weise abgeleitet werden. Setzen wir die COULOMBsche Kraft der Anziehung zwischen Kern und Elektron gleich der Zentrifugalkraft, dann haben wir $\frac{mv^2}{a} = \frac{Ze^2}{a^2}$. Bedenken wir, daß $v = a\omega = 2\pi a\nu$, dann erhalten wir $a^3\nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}$; das ist aber die Formel (49,24).

Wenn n die aufeinanderfolgende Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... annimmt, dann ergeben sich die gequantelten Energiewerte $E_1, E_2, E_3 \ldots$

Benutzen wir die Frequenzbedingung $hc\tilde{\nu} = E n_e - E n_a$ und setzen hier die Ausdrücke für $E n_e$ und $E n_a$ aus (100,5) ein, so folgt die verallgemeinerte BALMER-Formel für wasserstoffähnliche Atome in der Gestalt

$$\tilde{\nu} = \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right). \tag{100,6}$$

Wird hier $Z = 1$ gesetzt, so erhalten wir die BALMER-Formel speziell für das Wasserstoffatom, und der Multiplikator vor der Klammer ist der gesuchte, nur durch Universalkonstanten bestimmte Ausdruck für die RYDBERG-Konstante:

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}. \tag{100,7}$$

Zur Berechnung von R_∞ benutzen wir die neuesten, sehr genauen Werte der Universalkonstanten $e, \frac{e}{m}, h, c$:

$$\left.\begin{aligned} c &= 2{,}99776 \cdot 10^{10}\,\text{cm/s}, & h &= 6{,}624 \cdot 10^{-27}\,\text{erg} \cdot \text{s}, \\ e &= 4{,}8025 \cdot 10^{-10}\,\text{CGSE}, & \frac{e}{m} &= 1{,}7592 \cdot 10^{7}\,\text{CGSM} \cdot \text{g}^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{100,8}$$

Die Formel (100,7) gibt dann den folgenden theoretischen Wert für R_∞:

$$R_\infty = 109\,737{,}303\ \text{cm}^{-1}, \tag{100,9}$$

während die empirisch aus genauen spektroskopischen Messungen gefundene Größe R_H gleich

$$R_\text{H} = 109\,677{,}581\ \text{cm}^{-1} \tag{100,10}$$

ist.

Die Übereinstimmung zwischen dem berechneten Wert R_∞ und den experimentellen Werten für R ist derart vollkommen, daß sie keinen Zweifel an der Richtigkeit der gefundenen BOHRschen Formel (100,5) für die Energieniveaus der wasserstoffähnlichen Atome läßt. Jedoch ist die Übereinstimmung noch besser, als bei dem unmittelbaren Vergleich von (100,9) und (100,10) gezeigt werden kann. Der Grund liegt darin, daß diese beiden Werte im Wesen nicht unter sich gleich sein können, da bei der Ableitung der Formel (100,7) eine Annahme gemacht wurde, die nicht exakt durch die modernen spektroskopischen Messungen gerechtfertigt werden kann. Wir hatten angenommen, daß der Kern des wasserstoffähnlichen Atoms unbeweglich ist, während nach den Gesetzen der Mechanik die Bewegung des Elektrons und des Kernes um ihren gemeinsamen Schwerpunkt betrachtet werden muß. Die Zulassung eines unbeweglichen Kernes wäre nur dann richtig (siehe § 48), wenn die Kernmasse als unendlich groß im Vergleich zu der Elektronenmasse angesehen werden kann. In Wirklichkeit ist das Verhältnis der Masse des Wasserstoffkerns zur Masse des Elektrons gleich

$$\frac{M_\text{H}}{m} = 1836{,}5,$$

und bei der großen Genauigkeit der modernen spektroskopischen Messungen ist die Vernachlässigung der endlichen Größe der Kernmasse unzulässig.

Berücksichtigen wir diesen Umstand, dann ist es nicht schwer, die Korrektur durchzuführen. Wie wir aus § 51 wissen, ist zur genauen Lösung des Zweikörper-

problems in der Formel (100,5) für die Elektronenmasse die reduzierte Masse von Elektron und Kern

$$m' = \frac{mM_Z}{m + M_Z}$$

zu setzen, wobei M_Z die Masse des Kerns mit der Ordnungszahl Z ist. Die Formel (100,7) nimmt hierbei die Form

$$R_Z = \frac{2\pi^2 m' e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2 m M_Z e^4}{h^3 c\,(m + M_Z)} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c\left(1 + \frac{m}{M_Z}\right)} \tag{100,11}$$

an. Für Wasserstoff ist $M_Z = M_H$ und

$$R_H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c\left(1 + \frac{m}{M_H}\right)}. \tag{100,12}$$

Für $M_Z \to \infty$ geht die Formel (100,11) in (100,7) über. Deshalb wurde die durch (100,7) gegebene Größe R mit R_∞ bezeichnet. Die Gleichung (100,12) nimmt dann die Form

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_H}} \tag{100,13}$$

an, und die allgemeine Formel (100,11) wird

$$R_Z = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_Z}}. \tag{100,14}$$

Mit Hilfe der Formel (100,13) können wir auf folgende Weise eine endgültige Prüfung der Theorie durchführen: wir setzen in (100,13) den genauesten experimentellen Wert $R_H = 109\,677{,}581$ ein und berechnen aus (100,13) R_∞; setzen wir $\frac{m}{M_H} = \frac{1}{1836{,}5}$, dann erhalten wir

$$R_\infty = R_H\left(1 + \frac{m}{M_H}\right) = 109\,677{,}581\left(1 + \frac{1}{1836{,}5}\right) = 109\,736{,}807\ \text{cm}^{-1}.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Gleichung (100,9), die aus der Formel (100,7) folgt, dann sehen wir, daß die Übereinstimmung nichts zu wünschen übrigläßt.

§ 101. Anwendung der BOHRschen Theorie. Die Entdeckung des schweren Wasserstoffisotops

Die Abhängigkeit der RYDBERG-Zahl von der Kernmasse spielte bei der Entdeckung des schweren Wasserstoffisotops eine Rolle. Die Etappen dieser Entdeckung rufen die Geschichte der Edelgase ins Gedächtnis, die mit der Entdeckung des Argons begann und zu der bekanntlich der Anstoß durch geringe Abweichungen zwischen den Werten des Atomgewichtes beim atmosphärischen Stickstoff und dem Atomgewicht des unter Laboratoriumsbedingungen aus verschiedenen chemischen Verbindungen erhaltenen Stickstoffs gegeben wurde. Diese Geschichte ist eine vortreffliche Demonstration für den Sinn der genauesten Bestimmung von Konstanten und bestätigt sehr gut die scharfsinnige Bemerkung eines Naturforschers am

Ende des 19. Jahrhunderts: „Wie viele Entdeckungen verbergen sich noch um die sechste Dezimale hinter dem Komma!"

Die Entdeckungsgeschichte des schweren Wasserstoffs ist kurz folgende: Die Bestimmung des Atomgewichts des Wasserstoffs, die von ASTON mit Hilfe des Massenspektrographen ausgeführt wurde, ergab 1,00778 ± 0,000015 in bezug auf das Atomgewicht des Sauerstoffs, das nach Übereinkunft mit 16,00000 angenommen war. Dieser Wert stimmte sehr gut mit dem Atomgewicht des Wasserstoffes überein, der aus chemischen Bestimmungen gefunden wurde: 1,00777 ± 0,00002.

Indessen wurde zu der Zeit, als diese Messungen durchgeführt wurden, angenommen, daß der Sauerstoff keine Isotope hat. Doch bald wurde entdeckt, daß der atmosphärische Sauerstoff ein Gemisch zweier Isotope O^{16} und O^{18} darstellt, deren natürliches Häufigkeitsverhältnis 630 : 1 beträgt.[1]) Indem BIRGE und MENZEL diese Tatsache berücksichtigten, wandten sie ihre Aufmerksamkeit darauf, daß die Übereinstimmung der Größen des Atomgewichtes für Wasserstoff aus massenspektrographischen und chemischen Bestimmungen tatsächlich illusorisch und auf einem prinzipiellen Fehler begründet war. Tatsächlich entspricht jede Linie im Massenspektrographen einem bestimmten Isotop. Die Linie, die der Masse 16,00000 zugeschrieben wird, gehört tatsächlich dem Sauerstoffisotop O^{16}, während bei den chemischen Bestimmungen die Masse 16 fälschlich dem Gemisch $O^{16} + 1/630\ O^{18}$ zugeschrieben wird.[1]) Schreiben wir jetzt der Sauerstofflinie im Massenspektrum jene mittlere Masse zu, die der Sauerstoff in den chemischen Versuchen besitzt, d. h. also $O^{16} + {}^1/_{630}\ O^{18}$, dann wird für das Atomgewicht des Wasserstoffes eine merklich kleinere Zahl erhalten: 1,00756. Die Tatsache, daß das Atomgewicht des auf chemische Weise bestimmten Wasserstoffs um 1,00777 − 1,00756 = 0,00021, d. h. um annähernd 0,02% größer ist, veranlaßten BIRGE und MENZEL, die Hypothese auszusprechen, daß auch der gewöhnliche Wasserstoff, mit dem die Chemiker es in ihren Versuchen zu tun haben, in Wirklichkeit ein Gemisch von wenigstens zwei Isotopen darstellt, eines leichten mit der Masse angenähert 1 und eines schweren mit der Masse 2 (in abgerundeten Zahlen). Aus verschiedenen massenspektroskopischen und chemischen Atomgewichten bestimmten sie das Häufigkeitsverhältnis der Isotope des Wasserstoffes und erhielten $H^1 : H^2 = 4500 : 1$.

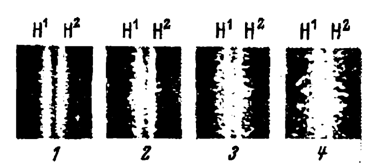


Abb. 143. Photographie der ersten 4 Glieder der LYMAN-Serie bei leichtem und schwerem Wasserstoff

Die Entdeckung des schweren Isotops wurde durch das ungewöhnlich günstige Massenverhältnis beider Isotope gefördert. Während gewöhnlich der Unterschied zwischen den Massen der Isotope relativ sehr klein ist, so daß ihre Eigenschaften so nahe liegen, daß eine Anhäufung irgendeines Isotops sehr schwierig ist, ist hier die Masse des einen Isotops zweimal größer als die Masse des anderen. Infolgedessen unterscheiden sich ihre Eigenschaften höchst merklich. UREY und Mitarbeiter benutzten diese Tatsache und erreichten eine künstliche Vergrößerung des prozentualen Anteils an schwerem Wasserstoff auf folgende Weise: sie unterwarfen 3 l flüssigen Wasserstoffs

---

[1]) Anm. der Redaktion: Sauerstoff ist ein Isotopengemisch aus 3 stabilen Komponenten: O^{16}, O^{17}, O^{18} mit dem Häufigkeitsverhältnis $O^{16} : O^{17} : O^{18} = 2494 : 1 : 5$.

einer schnellen Verdampfung bei einem Druck von einigen Millimetern Hg. Da die Verdampfungsgeschwindigkeit des leichten Wasserstoffes größer ist als die des schweren, mußte sich im Verlaufe der Verdampfung der schwere Wasserstoff im Gemisch anhäufen. Sie verdampften 3 Liter flüssigen Wasserstoff bis auf Bruchteile von einem Kubikzentimeter, brachten diesen Rest in ein Entladungsrohr und photographierten das Spektrum, wobei sie damit rechneten, daß infolge des Unterschiedes in der Größe der RYDBERG-Zahlen die Linie des schweren Wasserstoffes in bezug auf den leichten verschoben sein muß. Dies bestätigte sich auch tatsächlich. In der Abb. 143 sind die Photographien der ersten vier Glieder der LYMAN-Serie für ein Gemisch leichten (H^1) und schweren (H^2) Wasserstoffs angegeben. Die Verschiebung der Linien ist deutlich sichtbar. Die entsprechenden Wellenlängen sind in der Tabelle XII angeführt, wo die Linien des schweren Wasserstoffs mit λ_D bezeichnet sind, denn der schwere Wasserstoff erhielt eine besondere Bezeichnung, *Deuterium*, und das eigene chemische Symbol D. In den letzten beiden Spalten der Tabelle sind die Differenzen $\Delta\lambda$ angegeben, die beobachtet bzw. mit Hilfe der RYDBERG-Zahlen für H und D berechnet wurden. Die Übereinstimmung der berechneten und der beobachteten Werte $\Delta\lambda$ ist hier vorzüglich.

Die Abb. 144 zeigt eine Photographie der ersten Linie (H_α) der BALMER-Serie von leichtem und schwerem Wasserstoff.

Tabelle XII

λ_D (in Å)	λ_H (in Å)	$\Delta\lambda$ berechnet	$\Delta\lambda$ beobachtet
1215,664	1215,334	0,330	0,330
1025,718	1025,439	0,279	0,279
972,533	972,269	0,264	0,266

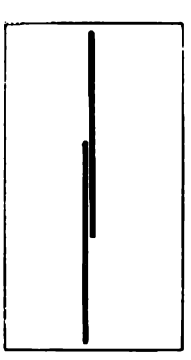


Abb. 144. Vergleich der Lage der H_α- und der D_α-Linie

Wie wir später sehen werden, ist der schwere Wasserstoff, das Deuterium, nicht nur interessant, wenn er leichten Wasserstoff in verschiedenen Verbindungen ersetzt, sondern er ist auch wegen seiner Verwendung in der Kernphysik höchst wichtig, wo der Kern des Deuteriums, das Deuteron, eines der für die Kernspaltung am besten geeigneten Geschosse ist.

§ 102. Die PICKERING-Serie und die Spektren wasserstoffähnlicher Ionen

Im Jahre 1897 entdeckte der Astronom PICKERING im Spektrum des Sterns ζ-Puppis eine Spektralserie, die sehr an die BALMER-Serie erinnerte. Mit der Geschichte dieser Serie ist einer der glänzendsten Erfolge der Quantentheorie verbunden. Die Abb. 145, in der schematisch beide Serien dargestellt sind, zeigt, daß die Linien der PICKERING-Serie in zwei Gruppen zerlegt werden können: die Linien der einen Gruppe stimmen nahezu mit den Linien der BALMER-Serie überein, die dazwischen liegenden Linien haben jedoch kein Analogon in der BALMER-Serie. RYDBERG zeigte, daß diese Serie durch die BALMERsche Formel dar-

gestellt werden kann, in der jedoch $n = n_a$ sowohl ganze wie auch halbzahlige Werte annimmt:

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots); \qquad (102{,}1)$$

die ganzzahligen Werte entsprechen den mit den BALMERschen übereinstimmenden Linien und die halbzahligen den dazwischen liegenden.

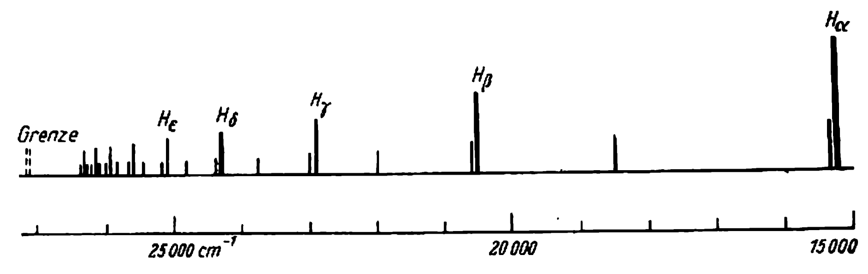


Abb. 145. BALMER- und PICKERING-Serien

Was auch immer versucht wurde, diese Linie in irdischem Wasserstoff zu erhalten, es gelang nicht. Daher wurde die PICKERING-Serie einem Wasserstoff zugeschrieben, der sich in den Sternen in irgendeinem besonderen Zustand befindet. Endlich gelang es, diese Serie im Laboratorium festzustellen, aber es zeigte sich, daß für einen erfolgreichen Versuch dem Wasserstoff unbedingt Helium beigemischt werden mußte. Diese widersprechende Fülle von Tatsachen entwirrte BOHR, indem er annahm, daß diese PICKERING-Serie überhaupt nicht dem Wasserstoff, sondern dem ionisierten Helium zugeschrieben werden muß. Da auf Grund von (100,6) $\tilde{\nu}$ proportional Z^2 und für Helium $Z = 2$ ist, so müssen die Spektralserien von ionisiertem Helium He^+ tatsächlich in der Formel

$$\nu = 4R_{\mathrm{He}}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) \qquad (102{,}2)$$

zusammengefaßt werden. Setzen wir hier $n_e = 2$, so nimmt die Formel die Gestalt

$$\nu = 4R_{\mathrm{He}}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) \quad (n_e = 5, 6, \ldots)$$

an, aber es ist auch möglich, sie in der Form

$$\nu = R_{\mathrm{He}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n_a}{2}\right)^2}\right)$$

zu schreiben, oder bei Bezeichnung von $n_a/2$ mit n,

$$\tilde{\nu} = R_{\mathrm{He}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ \ldots).$$

Dies ist aber die PICKERING-Serie. Durch den Unterschied der Massen des Wasserstoffkernes und des Heliumkernes muß die RYDBERG-Zahl R_{He} etwas von R_{H} verschieden und für ganze Werte von n müssen die Linien der PICKERING-Serie etwas in bezug auf die BALMER-Linien für Wasserstoff verschoben sein.

Diese Vorhersage von BOHR wurde von PASCHEN bestätigt, der zeigte, daß die PICKERING-Serie leicht in reinem Helium ohne jede Spur von Wasserstoff

beobachtet werden kann, nicht dagegen in reinem Wasserstoff, und daß die Linien dieser Serie für ganze Werte von n gegen die BALMER-Linien nach der violetten Seite verschoben sind, ganz wie es nach der Formel (102,2) zu erwarten war. Eine Darstellung dieser Verschiebung ist in der Tabelle XIII wiedergegeben, in der die von PASCHEN genau gemessenen Wellenlängen im Spektrum ionisierten Heliums und die Wellenlängen der BALMER-Serie des Wasserstoffs, die einem ganzzahligen n entsprechen, angeführt sind.

Tabelle XIII

n	He^+	H
3	6560,1	6562,8 (H_α)
3,5	5411,6	—
4	4859,3	4861,3 (H_β)
4,5	4561,6	—
5	4338,7	4340,5 (H_γ)
5,5	4199,9	—
6	4100,0	4101,7 (H_δ)

Die dem He^+ folgenden wasserstoffähnlichen Ionen stellen sich als zweifach ionisiertes Lithium Li^{++} ($Z = 3$) und dreifach ionisiertes Beryllium Be^{+++} ($Z = 4$) dar. Ihre Spektralserien müssen den Formeln

$$\tilde{\nu} = 9 R_{Li} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\tilde{\nu} = 16 R_{Be} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

entsprechen.

Die ersten Glieder der LYMAN-Serie ($m = 1$) für diese Ionen konnten tatsächlich im ultravioletten Teil des Spektrums gefunden werden.

In Abb. 146 ist die Änderung der RYDBERG-Zahlen in Abhängigkeit von der Kernmasse graphisch dargestellt.

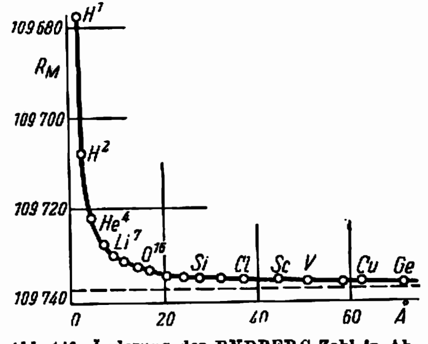


Abb. 146. Änderung der RYDBERG-Zahl in Abhängigkeit von der Kernmasse

Übung: 1. Die Wellenlänge der ersten Linie der LYMAN-Serie für ionisiertes Helium ist gleich $\lambda = 303{,}977$ Å. Es sind auszurechnen: a) die RYDBERG-Zahl für eine unendlich große Masse, b) die in Elektronenvolt ausgedrückte Ionisierungsenergie des Ions He^+.

2. Die gemessenen Wellenlängen im Spektrum der Ionen Li^{++} und Be^{+++} haben die folgenden Werte in Å:

Li^{++}			Be^{+++}		
$n_1 = 1$,	$n_2 = 2$	135,01	$n_1 = 1$	$n_2 = 2$	75,94
$n_1 = 1$,	$n_2 = 3$	113,92			

Es sind die ersten drei Terme des Ions Li^{++} und die ersten zwei Terme von Be^{+++} auszurechnen.

§ 103. Über die spektroskopische Bestimmung der Elektroneneigenschaften

Bereits im § 40 hatten wir auf die Möglichkeit hingewiesen, aus spektroskopischen Daten die spezifische Ladung des Elektrons zu bestimmen. Zeigen wir jetzt, wie dies möglich ist.

Wir benutzen die Ausdrücke für die RYDBERG-Zahlen für irgend zwei Atome, beispielsweise für Wasserstoff (H) und Deuterium (D):

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m}{M_{\mathrm{H}}}}, \qquad (103,1)$$

$$R_{\mathrm{D}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m}{M_{\mathrm{D}}}}, \qquad (103,2)$$

worin M_{H} und M_{D} die Massen der Atomkerne sind. Aus (103,1) und (103,2) erhalten wir

$$\frac{R_{\mathrm{D}}}{R_{\mathrm{H}}} = \frac{1 + \frac{m}{M_{\mathrm{H}}}}{1 + \frac{m}{M_{\mathrm{D}}}}, \qquad \frac{R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}}}{R_{\mathrm{H}}} = \frac{m}{M_{\mathrm{H}}} \cdot \frac{M_{\mathrm{D}} - M_{\mathrm{H}}}{M_{\mathrm{D}} + m},$$

woraus folgt

$$\frac{m}{M_{\mathrm{H}}} = \frac{(R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}})\,(M_{\mathrm{D}} + m)}{R_{\mathrm{H}}(M_{\mathrm{D}} - M_{\mathrm{H}})}. \qquad (103,3)$$

Die in diese Formel eingehenden Kernmassen M_{H} und M_{D} werden durch die Atomgewichte A_{H} und A_{D} und durch die Elektronenmasse auf folgende Weise ausgedrückt:

$$M_{\mathrm{H}} = \frac{A_{\mathrm{H}}}{N} - m, \quad M_{\mathrm{D}} = \frac{A_{\mathrm{D}}}{N} - m,$$

wobei N die LOSCHMIDTsche Zahl ist.

Die FARADAYsche Ladung F ist das Produkt aus der Elektronenladung und der LOSCHMIDTschen Zahl

$$F = Ne. \qquad (103,4)$$

Aus (103,3) und (103,4) erhalten wir

$$\frac{e}{m} = \frac{F}{Nm} = \frac{F R_{\mathrm{H}}(M_{\mathrm{D}} - M_{\mathrm{H}})}{N\,(R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}})\,(M_{\mathrm{D}} + m)\,M_{\mathrm{H}}} = \frac{F R_{\mathrm{H}}(A_{\mathrm{D}} - A_{\mathrm{H}})}{(R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}})\,A_{\mathrm{D}}\,(A_{\mathrm{H}} - Nm)}. \qquad (103,5)$$

Bedenken wir, daß das Produkt Nm („Atomgewicht" des Elektrons) eine im Vergleich zu A_{H} und A_{D} kleine Größe ist,

$$Nm = 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-28} = 5{,}48 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{Mol}^{-1},$$

dann können wir mit genügender Genauigkeit für die Berechnung von e/m an Stelle von (103,5) die folgende Formel

$$\frac{e}{m} = F\,\frac{R_{\mathrm{H}}}{(R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}})\,A_{\mathrm{H}}} \cdot \frac{A_{\mathrm{D}} - A_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{D}}}$$

benutzen. Wenn wir hier die genauen Werte der Konstanten einsetzen, so wird auf Grund der letzten Messungen der Spektren von H und D

$$\frac{e}{m} = 1{,}7596 \cdot 10^{7}\,\mathrm{CGSM} \cdot \mathrm{g}^{-1}$$

gefunden.

Wie ersichtlich, liegen die aus der Elektronenablenkung in elektromagnetischen Feldern erhaltenen Werte für e/m nahe diesem spektroskopischen Wert für e/m.

§ 104. Darstellung von Energieniveaus

Ziehen wir aus dem in den vorigen Paragraphen Gesagten die Konsequenzen, dann sehen wir, daß das wesentlichste Resultat der Spektralanalyse in der Aufstellung eines Termsystems besteht. Kombinieren wir die Terme paarweise, dann erhalten wir direkt die Wellenzahlen der Spektrallinien; multiplizieren wir die Terme mit hc, dann erhalten wir die positiven Werte der Energie des Atoms in den verschiedenen Quantenzuständen. Diese künftig in Elektronenvolt auszudrückenden Energiewerte geben die Ionisationspotentiale des Atoms in den verschiedenen Zuständen an, und ihre Differenzen ergeben die Anregungspotentiale.

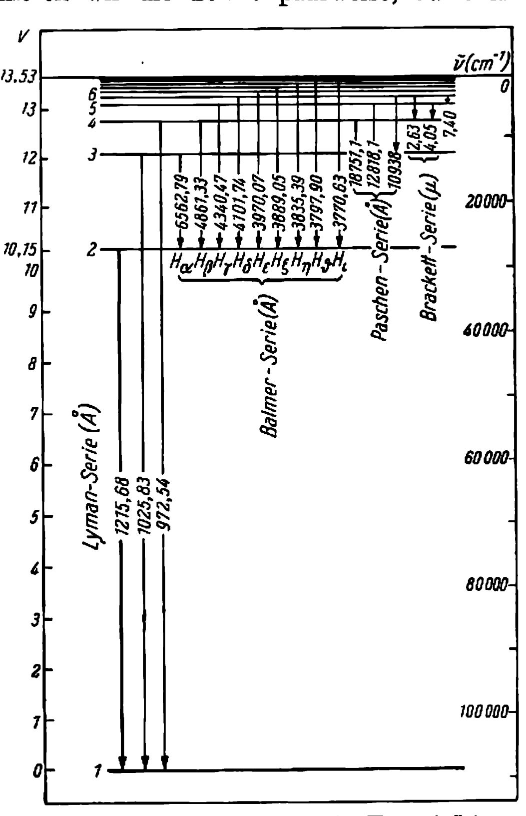


Abb. 147. Schema der Energieniveaus des Wasserstoffatoms

Um die Gesamtheit aller Angaben über das Atom, die wir auf diese Weise erhalten haben, schnell zu überschauen, ist es am einfachsten, Diagramme der Energieniveaus zu betrachten. Das einfachste solcher Diagramme für das Wasserstoffatom ist in der Abb. 147 angegeben. Hier bezeichnen die horizontalen Geraden die verschiedenen energetischen Zustände. Nach dem Gesagten genügt es, zu ihrem Aufbau auf der Ordinatenachse die Werte R/n^2 aufzutragen. Mit wachsendem n wird sich die Entfernung zwischen den aufeinanderfolgenden Niveaus verringern und an der Grenze in null übergehen. Oberhalb der Seriengrenze der Linien liegt das kontinuierliche Gebiet der nichtgequantelten positiven Energien. Links und rechts sind die Skalen für die Energien und die Terme angegeben. Das Abzählen nach dieser oder jener Skala beginnt mit der Lage des Grenzniveaus. Da aber für die Quantenzustände die Energien negativ und die Terme positiv sind, so nimmt die Energie von unten nach oben ab, und die Terme (gleich der Anregungsarbeit) wachsen in derselben Richtung an. In diesem Diagramm sind noch durch Pfeile die möglichen Übergänge zwischen den Niveaus angezeigt und die sich hierbei bildenden Serien vermerkt. Eine jede Serie entsteht beim Über-

gang von allen höher liegenden Niveaus auf ein niedrigeres Niveau. Die Wellenzahlen der Spektrallinien können mit Hilfe der rechten Skala als Differenz der den Anfangs- und Endzuständen entsprechenden Terme ausgerechnet werden.

§ 105. Das Seriengrenz-Kontinuum des Wasserstoffatoms

In jedem Serienspektrum schließt sich bei der Seriengrenze, dem Ort der Verschmelzung der Linien also, stets ein kontinuierliches Spektrum an und liegt auf der Seite der kurzen Wellen. Dieses kontinuierliche Spektrum kann sowohl beim Emissions- als auch beim Absorptionsprozeß beobachtet werden. Seine Entstehung ist mit Übergängen der Elektronen aus Zuständen positiver Energie in Zustände negativer Energie verbunden. Das negative Vorzeichen ist hier durch die Willkürlichkeit der Zustandswahl mit der potentiellen Nullenergie bedingt. Gewöhnlich wird die potentielle Energie, die gleich null ist, dem Elektron zugeschrieben, das sich in unendlich großer Entfernung vom Kern befindet. Daher weist das negative Zeichen der Gesamtenergie einfach darauf hin, daß die Energie des Elektrons in solchen Zuständen geringer ist als seine Energie in dem Fall, in dem es von dem Kern abgetrennt ist und in unendlich großer Entfernung ruht, weist es also darauf hin, daß wir es hier mit einem gebundenen Elektron zu tun haben.[1]) Hieraus folgt, daß ein Elektron positive Energie besitzen muß, wenn es von dem Atom abgetrennt ist und einen Überschuß an kinetischer Energie gegenüber der potentiellen besitzt. Nach der klassischen Mechanik muß ein solches Elektron auf einer Hyperbelbahn um den Kern laufen (Abb. 148). Das erste Bohrsche Postulat fordert nun, daß das Elektron bei dem Umlauf auf dieser Bahn nicht ausstrahlt; eine Ausstrahlung soll nur dann stattfinden, wenn das Elektron von dieser Hyperbelbahn auf eine geschlossene (beispielsweise eine Kreisbahn) überspringt. Andererseits unterliegen nach den allgemeinen Prinzipien der Quantentheorie nur die periodischen oder bedingt periodischen Bewegungen der Quantelung (siehe den folgenden Paragraphen); also können die Elektronen, die sich auf Hyperbelbahnen bewegen, beliebige, kontinuierlich verteilte Energievorräte besitzen. Hieraus erklärt sich auch der kontinuierliche Charakter des Spektrums.

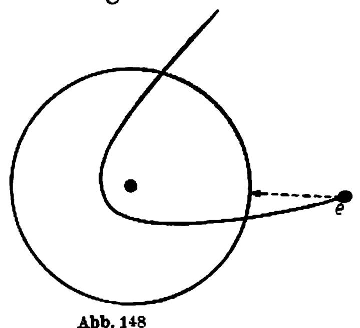


Abb. 148

Die Wellenzahl, die einem Übergang aus einem Quantenzustand in den Zustand mit der Energie null entspricht, wird durch R/n_e^2 gegeben (Seriengrenze), und die Wellenzahl, die einem Übergang aus einem Quantenzustand in den Zustand mit der positiven Energie ΔE entspricht, wird

$$\tilde{\nu} = \frac{R}{n_e^2} + \frac{\Delta E}{hc}$$

[1]) Tatsächlich geht noch in die Gesamtenergie des Elektrons zusätzlich die Energie ein, die der Masse des ruhenden Elektrons entspricht, $m_0 c^2$, und die gleich $0{,}5 \cdot 10^6$ eV ist und die negative potentielle Energie im Normalzustand bedeutend überschreitet.

sein. Da $\Delta E > 0$ ist und sich stetig ändert, wird $\tilde{\nu}$ größer als die Wellenzahl der Seriengrenze sein und sich ebenfalls stetig ändern; wir erhalten also ein kontinuierliches Spektrum, das sich an die Seriengrenze nach kurzen Wellen hin anschließt. Es ist offensichtlich, daß das kontinuierliche Absorptionsspektrum auf Prozesse der Abtrennung des Elektrons vom Atom mit einer endlichen kinetischen Energie, auf eine Ionisation also, hinweist, während das kontinuierliche Emissionsspektrum dem umgekehrten Prozeß, der Rekombination des positiven Ions und des Elektrons, entspricht. Schließlich muß die Energie, die der Grenzwellenzahl des kontinuierlichen Spektrums von der Seite langer Wellen her oder, was dasselbe ist, der Wellenzahl der Seriengrenze entspricht, gleich der Ionisationsenergie sein, d. h. gleich der Energie, die für die Abtrennung des Elektrons vom Atom und seinen Übergang in den Zustand mit der kinetischen Energie null notwendig ist. Auf diese Weise ergibt die Wellenzahl der Grenze der Lyman-Serie für Wasserstoff

$$\tilde{\nu} = \frac{R_{\mathrm{H}}}{1^2} = R_{\mathrm{H}} = 109\,678\,\mathrm{cm}^{-1}$$

sofort die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms im höchsten stabilen Grundzustand. Ist die erwähnte Wellenzahl in Elektronenvolt ausgedrückt, so wird 13,527 eV in Übereinstimmung mit der unmittelbar gemessenen Ionisationsarbeit des Wasserstoffatoms aus dem Normalzustand von 13,54 eV erhalten.

§ 106. Die Quantelung beim wasserstoffähnlichen Atom nach Bohr-Sommerfeld

In den vorigen Paragraphen betrachteten wir eine große Anzahl von Untersuchungen der Bohrschen Theorie, die der Theorie einen großen Erfolg gesichert hatten. Sommerfeld machte einen weiteren Schritt in der Entwicklung der Theorie. Während in der anfänglichen Theorie Bohrs nur Kreisbahnen betrachtet wurden, benutzte Sommerfeld die allgemeine Lösung der Kepler-Aufgabe aus der klassischen Mechanik und berücksichtigte auch die elliptischen Bahnen. Hierzu war vor allem eine Verallgemeinerung der im § 99 formulierten Quantelungsregel erforderlich. In der Tat genügen uns, solange wir nur die Kreisbewegung eines Elektrons betrachten, die Quantenregeln für einen Freiheitsgrad. Wollen wir jedoch auch die elliptischen Bahnen berücksichtigen, brauchen wir die Quantenregeln für ein System mit mindestens zwei Freiheitsgraden, da in diesem Falle die Lage des Elektrons auf der Bahn durch zwei Parameter gegeben wird: dem Radiusvektor und dem Polwinkel (Azimut) φ. Wollen wir schließlich die räumliche Orientierung der Bahn berücksichtigen, müssen wir dem Elektron drei Freiheitsgrade zuschreiben.

Somit bestand die erste Aufgabe, die gelöst werden mußte, in der Aufstellung der Quantenregeln für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Diese Aufgaben löste Sommerfeld und unabhängig von ihm H. A. Wilson für den allgemeinen Fall der sogenannten bedingt-periodischen Systeme.

Als einfaches Beispiel eines ähnlichen Systems kann der sogenannte anisotrope Oszillator dienen. Stellen wir uns ein Teilchen mit der Masse m vor, das sich in einer Ebene derart bewegt, daß seine Projektionen auf den beiden zueinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen einfache harmonische Schwingungen

mit verschiedenen Frequenzen ν_x und ν_y ausführen. Dann werden die Bewegungsgleichungen des Teilchens durch

$$m\ddot{x} = -f_1 x, \quad m\ddot{y} = -f_2 y$$

gegeben sein, woraus

$$x = a_1 \cos(2\pi\nu_x t + \delta_1), \quad y = a_2 \cos(2\pi\nu_y t + \delta_2)$$

folgt; die Frequenzen sind durch

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_1}{m}}, \quad \nu_y = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_2}{m}}$$

gegeben.

Wären die beiden Konstanten der quasielastischen Kräfte f_1 und f_2 unter sich gleich, dann wären auch die Frequenzen ν_x und ν_y gleich, und wir hätten einen gewöhnlichen isotropen Oszillator. Wir nehmen jedoch an, daß $f_1 \neq f_2$ ist: in diesem Fall heißt der Oszillator ein anisotroper Oszillator. Die allgemeinste Bewegung eines solchen Oszillators erhält man, wenn ν_x und ν_y inkommensurabel sind. Bei dieser Bedingung beschreibt das Teilchen eine verwickelte Kurve (LISSAJOUSsche Figur), die aus vielen Schlingen besteht und die folgende interessante Eigenschaft besitzt: die Kurve schließt sich nirgends; sie erfüllt das Rechteck (Abb. 149) mit gleichmäßiger Dichte, so daß der sich bewegende Punkt jedem beliebigen, im Innern des Rechtecks liegenden Punkt unendlich nahe kommen kann.

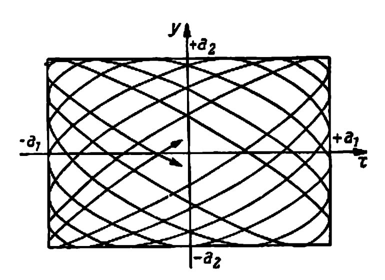


Abb. 149. Beispiel einer bedingt-periodischen Bewegung

Sind umgekehrt ν_x und ν_y kommensurabel, so erhalten wir eine rein periodische Bewegung; bei $\nu_x = \nu_y$ führt zum Beispiel das Teilchen entweder Schwingungen auf einer Geraden aus oder beschreibt einen Kreis oder eine Ellipse. Bei irgendwelchen anderen rationalen Verhältnissen der Frequenzen wird eine verwickelte, jedoch unbedingt geschlossene Kurve erhalten; von einem bestimmten Punkt ausgehend, beschreibt das Teilchen eine mehr oder weniger verwickelte Bahn, kehrt aber stets zu diesem Punkt zurück, und die Bewegung beginnt sich zu wiederholen. In allen solchen Fällen haben wir es im Grunde nicht mit zwei Grundfrequenzen ν_x und ν_y zu tun, sondern nur mit einer, da infolge des rationalen Verhältnisses ν_x/ν_y die zweite Frequenz durch die erste ausgedrückt werden kann. Hieraus ist klar, daß eine rein periodische Bewegung ein *Spezialfall* einer bedingt-periodischen Bewegung ist. An Stelle zweier Eigenfrequenzen, durch die ein System mit zwei Freiheitsgraden charakterisiert wird, haben wir es hier nur mit einer Frequenz zu tun, und die Bahnen erfüllen das Rechteck nicht mit einer gleichmäßigen Dichte. Gewöhnlich wird gesagt, daß eine rein periodische Bewegung als *Entartung* einer bedingt-periodischen Bewegung erscheint.

In dem betrachteten einfachsten Fall führt die bedingt-periodische Bewegung zu zwei einfachen harmonischen Schwingungen. Die Quantenregel (99,7) kann

jetzt auf jede dieser Schwingungen angewandt werden, und es ist zu fordern, daß

$$\oint p_x dx = n_x h, \quad \oint p_y dy = n_y h,$$

worin n_x und n_y ganze Zahlen 1, 2, 3, . . . sind.

Es zeigt sich, daß in vielen Systemen mit mehreren Freiheitsgraden solche verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_f$ gefunden werden können, in welchen, wie in dem betrachteten Beispiel des anisotropen Oszillators, die Bewegung in f harmonische Schwingungen „zerlegt“ werden kann. In diesen Fällen kann die von uns im § 99 gefundene Quantenregel auf jeden Freiheitsgrad angewandt werden. Wir erhalten hierbei f *Quantenbedingungen:*

$$\oint p_1 dq_1 = n_1 h, \quad \oint p_2 dq_2 = n_2 h, \ldots, \quad \oint p_f dq_f = n_f h. \tag{106,1}$$

Die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_f$ heißen *Quantenzahlen.*

Wir wenden uns jetzt dem wasserstoffähnlichen Atom zu. Nach dem Schema der BOHRschen Theorie ist es notwendig, zuerst die Bewegung eines Elektrons im COULOMBschen Kernfeld im Rahmen der klassischen Mechanik zu untersuchen. Diese Lösung wurde von uns im § 49 vollständig ausgeführt, und es wurden die folgenden Beziehungen gefunden:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{49,19}$$

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \tag{49,18}$$

Aus dieser stetigen Vielzahl von Energiewerten muß nun mit Hilfe der Quantenbedingungen eine diskrete Reihe ausgesondert werden.

Da wir bei der Betrachtung der Bahnbewegung eines Elektrons diesem zwei Freiheitsgrade zuschreiben müssen, die den beiden unabhängigen Koordinaten r und φ entsprechen, sind die beiden Quantenbedingungen

$$\oint p_r dr = n_r h \text{ und } \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h \tag{106,2}$$

anzuwenden. Die allgemeinen Impulse p_r und p_φ sind auf Grund des § 55:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Bedenken wir, daß nach dem Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ ist, dann erhalten wir aus der zweiten Bedingung (106,2)

$$n_\varphi h = \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

und hieraus

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi}. \tag{106,3}$$

Die Anwendung der ersten Quantenbedingung (106,2) erfordert eine ziemlich verwickelte Berechnung, die wir hier übergehen. Als Resultat dieser Berechnung erhält man folgenden Ausdruck für die Exzentrizität der Bahn ε in Abhängigkeit von den Quantenzahlen n_r und n_φ:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^2}.$$

Die Summe beider Quantenzahlen n_r und n_φ heißt die *Hauptquantenzahl*. Bezeichnen wir sie mit n, dann haben wir

$$n_r + n_\varphi = n\,, \qquad 1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{n^2}\,. \tag{106,4}$$

Setzen wir dies in (49,18) ein und ersetzen $P = p_\varphi$ durch $n_\varphi h/2\pi$, dann erhalten wir

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}\,. \tag{106,5}$$

Wir sehen, daß sich trotz der Anwendung zweier Quantenbedingungen das Endergebnis nicht von dem im § 100 für den Fall der Kreisbahn erhaltenen unterscheidet: die Energie hängt von einer Quantenzahl n ab, die die *Hauptquantenzahl* heißt; hierbei erscheint n als die Summe der Quantenzahlen n_r und n_φ. Dieses Resultat ist damit verbunden, daß die elliptische Bewegung als entarteter Fall einer bedingt-periodischen Bewegung erscheint. Tatsächlich muß die nichtentartete bedingt-periodische Bewegung in der Ebene in einer sich nicht schließenden LISSAJOUSschen Figur verlaufen, während der Umlauf auf einer Ellipse eine rein periodische Bewegung ist. Wir werden sofort erkennen, daß das durch die Formel (106,5) ausgedrückte Resultat für jeden Wert der Hauptquantenzahl n ein *nach der Größe übereinstimmendes Energieniveau* angibt.

Um uns hiervon zu überzeugen, zeigen wir, daß jedem Wert n auch n verschiedene Bahnen mit ein und derselben großen Halbachse entsprechen. Den Ausdruck für die große Halbachse der Bahn erhalten wir aus der Formel (49,19). Setzen wir in ihr die gequantelten Energiewerte (106,5) ein, dann haben wir

$$a = -\frac{Ze^2}{2E} = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m Z e^2} \tag{106,6}$$

oder, wenn wir die im § 100 eingeführte ungekürzte Bezeichnung für den „Atomradius" a_1 benutzen,

$$a = n^2 \frac{a_1}{Z} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{106,7}$$

Somit ist die Länge der großen Halbachse in den verschiedenen Quantenzuständen dem Quadrat der Hauptquantenzahl proportional.

Zur Berechnung der kleinen Halbachse b benutzen wir die bekannte Formel der analytischen Geometrie $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und setzen in ihr die bereits gefundenen Quantenwerte für a und $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ aus (106,4) und (106,7) ein:

$$b = n^2 \frac{a_1}{Z} \cdot \frac{n_\varphi}{n} = n n_\varphi \frac{a_1}{Z}\,. \tag{106,8}$$

Ein Vergleich von (106,7) und (106,8) zeigt, daß die große Halbachse nur von der Hauptquantenzahl abhängt, während die kleine Halbachse sowohl von der Hauptquantenzahl als auch von der azimutalen Quantenzahl abhängt.

Wir fragen nun, welche Werte die azimutale Quantenzahl annehmen kann. Für $n_\varphi = n$ geht (106,8) in (106,7) über, und die Bahn ist eine Kreisbahn; für $n_\varphi = 0$ und $b = 0$ entartet die elliptische Bahn in eine geradlinige Bahn, auf der das Elektron pendelförmige Bewegungen ausführt. Eine solche Bahn wird in der BOHRschen Theorie durch die Überlegung ausgeschlossen, daß das Elektron

bei einer Bewegung auf dieser Bahn mit dem Kern zusammenstoßen müßte. Somit ist der kleinste Wert von n_φ gleich 1, der größte gleich n:

$$n_\varphi = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{106,9}$$

Hieraus folgt, daß einem jeden Wert von n, d.h. jeder großen Halbachse n, verschiedene Bahnen mit verschiedener Größe der Exzentrizität entsprechen, von der gestreckten Ellipse bis zum Kreis, zum Beispiel

$$\left.\begin{array}{l}
n = 1,\ a = \frac{a_1}{Z},\quad n_\varphi = 1,\quad b = \frac{a_1}{Z} = a \text{ Kreis},\\[2ex]
n = 2,\ a = 4\frac{a_1}{Z}\ \begin{cases} n_\varphi = 1, & b = 2\frac{a_1}{Z} \text{ Ellipse},\\ n_\varphi = 2, & b = 4\frac{a_1}{Z} \text{ Kreis},\end{cases}\\[4ex]
n = 3,\ a = 9\frac{a_1}{Z}\ \begin{cases} n_\varphi = 1, & b = 3\frac{a_1}{Z} \text{ Ellipse},\\ n_\varphi = 2, & b = 6\frac{a_1}{Z} \text{ Ellipse},\\ n_\varphi = 3, & b = 9\frac{a_1}{Z} \text{ Kreis}.\end{cases}
\end{array}\right\}$$

In der Abb. 150 sind die Bahnen für $n = 1, 2, 3$ angegeben. Wir bemerken, daß die elliptischen Bahnen im Perihel um so näher an den Brennpunkt (Kern) herankommen, je kleiner n_φ ist.

Es zeigt sich, daß für jeden Wert der Hauptquantenzahl tatsächlich n verschiedene Bahnen mit derselben großen Halbachse existieren. Allen diesen n Bahnen entspricht nach der Formel (106,5) derselbe Energiewert oder, genauer, entsprechen n gleiche Energiewerte. Hierin ist die Entartung gegeben. Tritt jedoch irgendeine Anregung auf, so werden die Bahnen auf verschiedene Weise deformiert, und die n Energieniveaus, die früher übereinstimmten, werden jetzt getrennt. Durch die Anregung wird die Entartung *aufgehoben*.

Bis jetzt interessierten wir uns nur für eine Bewegung des Elektrons in seiner Bahnebene, und wir schrieben infolgedessen dem Elektron zwei Freiheitsgrade zu. Die Lage eines Elektrons im Raum wird jedoch durch drei Koordinaten charakterisiert. Berücksichtigen wir alle drei Freiheitsgrade, dann erhalten wir die Möglichkeit, nicht nur die Bewegung des Elektrons in seiner Bahn, sondern auch die räumliche Orientierung der Bahn selbst zu beschreiben.

Die Lage des Elektrons im Raum wird durch die drei Polarkoordinaten r, ϑ und ψ charakterisiert (Abb. 151). Deshalb erhalten in diesem Falle die Quantenbedingungen die Form

$$\left.\begin{aligned}
\oint p_r\, dr &= n_r h,\\
\oint p_\vartheta\, d\vartheta &= n_\vartheta h,\\
\oint p_\psi\, d\psi &= n_\psi h.
\end{aligned}\right\} \tag{106,10}$$

Die allgemeinen Impulse p_r, p_ϑ, p_ψ werden nach der allgemeinen Regel berechnet (§ 55): wir müssen den Ausdruck für die kinetische Energie in Polarkoordinaten r, ϑ, ψ schreiben:

$$E_k \equiv T = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\dot\psi^2\right) \tag{106,11}$$

und finden die Ableitungen nach den allgemeinen Geschwindigkeiten:

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot r} = m\dot r, \quad p_\vartheta = \frac{\partial E_k}{\partial \dot\vartheta} = mr^2\dot\vartheta, \\ p_\psi &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot\psi} = mr^2 \sin^2\vartheta\dot\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (106{,}12)$$

Wenden wir jetzt unsere Aufmerksamkeit dem allgemeinen Impuls p_ψ zu. Aus der Abb. 151 ist ersichtlich, daß die Koordinate ψ die Bewegung der Projektion des Elektrons auf den Äquator charakterisiert und der ihr entsprechende

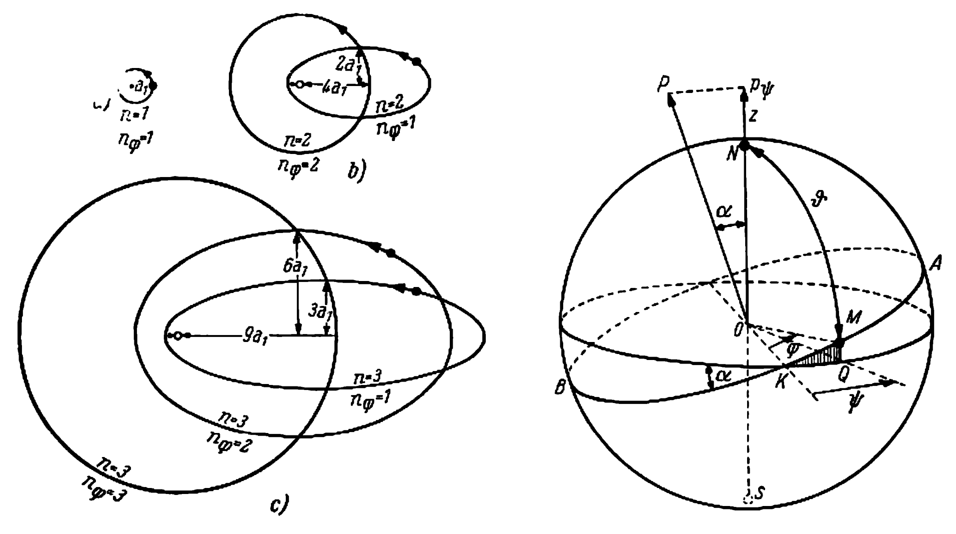


Abb. 150. BOHRsche Elektronenbahnen

Abb. 151

Impuls p_ψ die Projektion des gesamten Drehimpulses P auf die z-Achse ist. Die Richtung dieser Achse kann beispielsweise durch ein unendlich kleines magnetisches Feld gegeben sein, dessen Richtung mit der z-Achse übereinstimmt. Wir sehen sofort, daß p_ψ seinen Wert beibehält, also $p_\psi = \text{const}$. Zu diesem Zwecke schreiben wir die HAMILTONsche Funktion auf und beachten den Ausdruck für die kinetische Energie (106,11) und den Ausdruck für die allgemeinen Impulse (106,12):

$$H = T + U = E_k + E_p = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,p_\psi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \qquad (106{,}13)$$

Da die Koordinate ψ in diesen Ausdruck nicht eingeht, ist sie eine zyklische Koordinate und der entsprechende Impuls (§ 58) konstant, d.h. $p_\psi = \text{const}$. Infolgedessen ergibt die Quantenbedingung $\oint p_\psi\, d\psi = n_\psi h$:

$$\left.\begin{aligned} \oint p_\psi\, d\psi &= p_\psi \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi p_\psi = n_\psi h, \\ p_\psi &= n_\psi \frac{h}{2\pi}. \end{aligned}\right\} \qquad (106{,}14)$$

Wir sehen also, daß die Projektionen des Drehimpulses in Richtung des Feldes gequantelte Werte besitzen. Dies zeigt, daß die Orientierung der Bahn AB im Raum nicht willkürlich sein kann, sondern daß eine nur diskrete Reihe möglicher Orientierungen besteht. Führen wir an Stelle der positiven Zahlen n_ψ eine ihr dem absoluten Wert nach gleiche Zahl m ein, die jedoch sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, dann erhalten wir

$$\cos\alpha = \frac{p_\psi}{P} \frac{m\frac{h}{2\pi}}{n_\varphi \frac{h}{2\pi}} = \frac{m}{n_\varphi}.$$

Es sei zum Beispiel $P = \frac{h}{2\pi}$; dann ist $n_\varphi = 1$ und

$$\cos\alpha = \frac{m}{n_\varphi} = +1, 0, -1.$$

Somit sind für $n_\varphi = 1$ nur drei verschiedene Orientierungen der Bahn möglich: für $n_\varphi = 2$ gibt es fünf solcher Orientierungen ($m = +2, +1, 0, -1, -2$); bei $n_\varphi = 3$ gibt es sieben, und allgemein ist für beliebige n_φ die Anzahl der möglichen Orientierungen gleich $2n_\varphi + 1$.

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die beiden von uns eingeführten Quantenzahlen, die „äquatoriale" n_ϑ und die „Breitenquantenzahl" n_ψ, höchst einfach mit der azimutalen Quantenzahl n_φ verbunden sind; es gilt

$$n_\varphi = n_\vartheta + n_\psi.$$

Im § 57 sahen wir, daß die kinetische Energie T auf folgende Weise ausgedrückt werden kann:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57,9}$$

Bezeichnen wir die kinetische Energie mit E_{kin} und bedenken, daß $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, dann erhalten wir

$$2E_{\text{kin}} = \sum_k \dot{q}_k p_k.$$

Integrieren wir diese Gleichung über t in den Grenzen einer Periode von 0 bis τ dann finden wir

$$2\int_0^\tau E_{\text{kin}}\, dt = \sum_k \int_0^\tau p_k dq_k = \sum_k \oint p_k dq_k. \tag{106,15}$$

Wählen wir als Koordinaten q_k die Polarkoordinaten in der Ebene (r und φ), so ist nach (106,15)

$$2\int_0^\tau E_{\text{kin}}\, dt = \oint p_r\, dr + \oint p_\varphi\, d\varphi. \tag{106,16}$$

Im Falle sphärischer Polarkoordinaten haben wir

$$2\int_0^\tau E_{\text{kin}}\, dt = \oint p_r\, dr + \oint p_\vartheta\, d\vartheta + \oint p_\psi\, d\psi.$$

Vergleichen wir die rechten Seiten miteinander, dann finden wir

$$\oint p_\varphi\, d\varphi = \oint p_\vartheta\, d\vartheta + \oint p_\psi\, d\psi$$

oder, wenn wir die Quantenbedingung (106,2) beachten,

$$n_\varphi = n_\psi + n_\vartheta\,. \tag{106,17}$$

Dies zeigt, daß der Ausdruck für die Gesamtenergie eines Elektrons (106,5) in der Form

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_\varphi)^2 h^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_\vartheta + n_\psi)^2 h^2}$$

geschrieben werden kann. Folglich hängt die Gesamtenergie bei Berücksichtigung der räumlichen Orientierung der Bahn ebenso wie im Falle der ebenen Aufgabe nur von der Summe aller Quantenzahlen, nicht aber von den Quantenzahlen selbst ab. Mit anderen Worten, die Entartung ist bedeutender, als sich aus der Betrachtung der ebenen Aufgabe schließen läßt: nicht nur alle Ellipsen mit gleich großer Halbachse, sondern auch alle solche Ellipsen, die auf verschiedene Art im Raum orientiert sind, haben bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes die gleiche Energie.

Da man bei der Einführung aller betrachteten Präzisierungen (elliptische Bahn, räumliche Orientierung) das vollkommen gleiche Resultat wie im einfachsten Fall der Kreisbahnen erhält, kann ihre Berücksichtigung überflüssig erscheinen. In Wirklichkeit ist dem aber nicht so. Beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes wird die Entartung in bezug auf die äquatoriale n_ψ (oder magnetische m) Quantenzahl beseitigt; die auf verschiedene Weise orientierten Bahnen haben verschiedene Energien. Die folgerichtig durchgeführte Rechnung gibt eine Erklärung des einfachen ZEEMAN-Effektes. In den komplizierteren Atomen, bei denen es mehrere Elektronen gibt, führt ferner die Anregung eines peripheren Elektrons durch die übrigen dazu, daß in dem Ausdruck für die Energie des Atoms neben der Hauptquantenzahl, die gleich der Summe $n_r + n_\varphi$ ist, auch die azimutale Quantenzahl auftritt. Infolgedessen unterscheiden sich die Energieniveaus mit einer und derselben Hauptquantenzahl, aber verschiedenen azimutalen Quantenzahlen, die für Atome mit einem Elektron übereinstimmen. Dies gibt die Möglichkeit, die Besonderheiten der Spektren von komplizierten Atomen zu erklären, die ein Valenzelektron besitzen (die Elemente der ersten Gruppe des periodischen Systems Li, Na, K usw.). Wir werden jedoch hier nicht auf diese weitere Entwicklung der BOHRschen Theorie eingehen, weil sie trotz einer Reihe von Teilerfolgen jetzt nur noch einen historischen Wert besitzt. Die erwähnten Erscheinungen (die Spektren der komplizierten Atome, der ZEEMAN-Effekt) erhielten, im großen Zusammenhang gesehen, eine ganz andere Erklärung. Mit dieser Deutung werden wir uns später bekannt machen.

§ 107. Das Korrespondenzprinzip

Wir wenden uns nun der bereits im § 99 berührten Frage über das gegenseitige Verhältnis der Gesetze der klassischen Physik und der Quantenphysik zu. Wie wir sahen, führt die Tatsache, daß die PLANCKsche Konstante h ungleich null ist, dazu, daß die mechanischen Größen, die Systeme von atomaren Dimensionen

charakterisieren (Energie, Drehimpuls usw.), sich nicht stetig ändern können, sondern eine Reihe von diskreten Werten annehmen, die mit Hilfe der Quantenbedingung ausgewählt werden.

Ebenso erweisen sich die Gesetze der klassischen Elektrodynamik als auf Atomsysteme nicht anwendbar. Tatsächlich müßte nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik ein Elektron, das auf einer Bahn umläuft, elektromagnetische Wellen aussenden. Diese Ausstrahlung zieht einen Energieverlust nach sich, so daß das Elektron sich langsam dem Kern nähern müßte. Im Gegensatz hierzu fordern die Quantenpostulate, daß die Strahlung nur bei einem Übergang aus einem höheren stationären Zustand in einen niedrigeren stattfindet. In dem klassischen Bild nähert sich das Elektron auf einer Spiralbahn stetig dem Kern, während es die ganze Zeit strahlt, in dem Quantenbild ist es nur auf Quantenbahnen endlicher Größe zugelassen und strahlt nur bei „Sprüngen".

Es existieren jedoch Bedingungen, unter denen beide Bilder übereinstimmende Resultate geben müssen. Nehmen wir an, daß die Entfernungen zwischen den aufeinanderfolgenden Niveaus klein im Vergleich zu der Höhe der Niveaus sind. Dann werden die Stufen, in denen der Übergang stattfindet, sehr klein sein, und der Übergang auf ihnen wird sich nur wenig von einem stetigen Abgleiten unterscheiden. Dieser Fall findet bei hohen Quantenzahlen statt. Betrachten wir zum Beispiel die Balmerschen Energieniveaus:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da die Energie negativ ist, wächst sie mit der Vergrößerung von n an. Außerdem werden bei genügend großem n die Nachbarniveaus sehr dicht beieinanderliegen, und zwar um so enger, je größer n ist. Wenn n sehr groß ist, werden wir es praktisch mit einer stetigen Aufeinanderfolge von Niveaus zu tun haben.

Wir werden sofort sehen, daß die von uns in den vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate vollständig diesen Forderungen genügen. Beginnen wir mit einem wasserstoffähnlichen Atom und zeigen, daß für große Quantenzahlen die nach den klassischen und den Quantengesetzen ausgerechneten Frequenzen der Strahlung unter sich übereinstimmen. Hierzu benutzen wir die Formeln des § 100. Kombinieren wir die Formeln

$$a_n^2 \nu_n = \frac{nh}{4\pi^2 m} \tag{100,2}$$

und

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2}, \tag{100,3}$$

dann finden wir

$$\nu_n = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Diese Formel ergibt die Umlaufsfrequenz eines Elektrons auf der n-ten stationären Bahn. Nach der klassischen Elektrodynamik muß die Frequenz der ausgesandten elektromagnetischen Strahlung die gleiche sein. Wir haben deshalb

$$\nu_{kl} = \nu_n = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3}\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{107,1}$$

Diese Formel schreiben wir in kürzerer Form, indem wir den Ausdruck für die RYDBERG-Zahl benutzen:

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}\ \mathrm{cm}^{-1}. \tag{100,7}$$

Die Formel (107,1) kann jetzt in der Form

$$\nu_{kl} = \frac{2RcZ^2}{n^3}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{107,2}$$

geschrieben werden.

Die Quantenfrequenz bei dem Übergang $n_a \to n_e$ wird bekanntlich nach der BALMERschen Formel ausgerechnet und ist gleich

$$\nu_{qu} = R_\infty c Z^2 \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_a^2}\right) \mathrm{s}^{-1}. \tag{107,3}$$

Hier erscheint der Multiplikator c deshalb, weil die wahre Frequenz in s^{-1} berechnet, während R_∞ gewöhnlich in cm^{-1} ausgedrückt wird.

Zum Vergleich mit (107,1) ist es bequemer, (107,3) in folgende Form überzuführen:

$$\nu_{qu} = R_\infty c Z^2 \frac{n_a^2 - n_e^2}{n_e^2 n_a^2} = RcZ^2 \frac{(n_a - n_e)(n_a + n_e)}{n_e^2 n_a^2}. \tag{107,4}$$

Wie wir sehen, unterscheiden sich die Ausdrücke (107,2) und (107,3) für ν_{kl} und ν_{qu} erheblich. Nehmen wir jedoch an, daß n_a eine große Zahl ist:

$$n_a \gg 1, \tag{107,5}$$

und daß außerdem $n_a - n_e = 1$, dann ist wegen (107,5) $n_e = n_a + 1 \approx n_a$. Hierbei nimmt die Bedingung (107,4) die Form

$$\nu_{qu} = \frac{2R_\infty cZ^2}{n_a^3} \quad \text{oder} \quad \frac{2R_\infty cZ^2}{n_e^3} \tag{107,6}$$

an. Vergleichen wir (107,6) mit (107,2), dann sehen wir, daß bei großen Quantenzahlen für die Übergänge zwischen benachbarten Quantenzuständen

$$\nu_{qu} = \nu_{kl} \tag{107,7}$$

gilt.

Wenn bei einem Übergang sich die Hauptquantenzahl nicht um 1, sondern um 2, 3, ... und allgemein um Δn ändert, dann ist unter der Bedingung $\Delta n \ll n$,

$$\nu_{qu} = \frac{2R_\infty cZ^2}{n_a^3} \Delta n = \nu_{kl}\, \Delta n \qquad (\Delta n = 2, 3, \ldots),$$

und die bei solchen Übergängen ausgestrahlten Frequenzen $2\nu_{kl}$, $3\nu_{kl}$, ... werden mit den ersten, zweiten oder höheren *Obertönen* der klassischen Frequenz übereinstimmen. Für kleine Quantenzahlen gibt es ein solches Zusammenfallen nicht, es ist jedoch möglich, zu jedem klassischen Oberton eine bestimmte Quantenfrequenz in Übereinstimmung zu bringen.

Es ist auch möglich, das Verhältnis zwischen den klassischen und den Quantengesetzen in sehr klarer Form in folgender Weise auszudrücken: Wir mögen ein System mit einem Freiheitsgrad haben. Die Frequenz der Strahlung, die von diesem System ausgestrahlt werden kann, wird nach den Quantengesetzen mit Hilfe der Frequenzbedingung $E_{n_a} - E_{n_e} \equiv \Delta E = h\nu$

$$\nu_{qu}^{*} = \frac{\Delta E}{h}. \tag{107,8}$$

Die stationären Zustände mit den Energien E_{n_e} und E_{n_a} werden mit Hilfe der Quantenbedingung $\oint p\,dq = nh$ gefunden. Bezeichnen wir das Integral $\oint p\,dq$, das die Dimension einer Wirkung hat, mit I, dann haben wir $I = nh$. Für zwei stationäre Zustände erhalten wir

$$I_{n_e} = n_e h, \quad I_{n_a} = n_a h$$

und

$$I_{n_e} - I_{n_a} \equiv \Delta I = (n_e - n_a)\, h\,.$$

Ist $n_a - n_e = 1$, d. h. betrachten wir benachbarte Zustände, so ist $\Delta I = h$. Setzen wir dies in (107,8) ein, dann erhalten wir

$$\nu_{qu} = \frac{\Delta E}{\Delta I}\,. \tag{107,9}$$

Für die Berechnung des entsprechenden Ausdruckes der klassischen Frequenz betrachten wir den Fall eines linearen harmonischen Oszillators. Die Energie des Oszillators ist gleich $E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U$, woraus $p = \sqrt{2m\,(E - U)}$ folgt. Das Integral der Wirkung wird in diesem Falle

$$I = \oint p\,dx = \oint \sqrt{2m\,(E - U)}\,dx\,.$$

Betrachten wir E als stetig sich ändernden Parameter, dann finden wir die Ableitung

$$\frac{dI}{dE} = \oint \frac{m}{\sqrt{2m\,(E - U)}}\,dx = \oint \frac{m}{p}\,dx = \oint \frac{dx}{v} = \oint \frac{dx}{dx/dt} = \oint dt = \tau,$$

wobei τ die Schwingungsdauer ist. Hieraus erhalten wir den folgenden bemerkenswerten Ausdruck für die klassische Frequenz:

$$\nu_{kl} = \frac{1}{\tau} = \frac{dE}{dI}\,. \tag{107,10}$$

Wir können jetzt zeigen, daß die Beziehung (107,10) für *beliebige* periodische Systeme mit einem Freiheitsgrad gelten muß. Da aber dieser allgemeine Beweis größeren mathematischen Aufwand erfordert, den wir bei dem Leser nicht voraussetzen, so werden wir uns auf seine Bestätigung an Hand von besonderen Beispielen beschränken, die in den Übungen zu diesem Paragraphen gegeben werden.

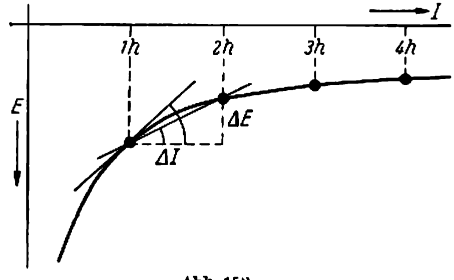


Abb. 152

Vergleichen wir (107,9) und (107,10), dann kommen wir zu folgendem Resultat: Sowohl in der klassischen als in der Quantentheorie kann die Frequenz als Verhältnis des Energiezuwachses zum Zuwachs der Wirkung berechnet werden, während wir im ersten Fall einen unendlich kleinen Zuwachs nehmen, müssen wir im zweiten eine endliche Differenz betrachten.

In Abb. 152 ist dies dargestellt. Die ausgezogene Kurve in der Zeichnung stellt die Energie als Funktion des Wirkungsintegrals I dar. Die Quantenzustände

werden nur von den Punkten der Kurve dargestellt, die ganzzahligen Werten der Wirkung $I = 1h, 2h, 3h, \ldots$ entsprechen. Es ist offensichtlich, daß die Quantenfrequenz $\Delta E/\Delta I$ gleich dem Tangens des Neigungswinkels der Sekante ist, die die beiden den Quantenzuständen entsprechenden Punkte verbindet, während die klassische Frequenz gleich dem Tangens des Neigungswinkels der Tangente ist, weil $\nu_{kl} = \frac{dE}{dI}$. Im Gebiet großer Quantenzahlen, wo der Unterschied zwischen der Neigung der Tangente und der Sekante verschwindet, ist $\nu_{kl} = \nu_{qu}$.

Dies wird am besten durch die untere Tabelle veranschaulicht, in der die klassischen Umlauffrequenzen zweier benachbarter ganzer Werte von n angegeben werden, die mit Hilfe der Formel (107,2) errechnet wurden, und die entsprechenden Quantenfrequenzen, die nach der Formel (107,3) ausgerechnet wurden.

Anfangszustand	Endzustand	Umlauffrequenz im Anfangszustand, s^{-1}	Quantenfrequenz s^{-1}	Umlauffrequenz im Endzustand s^{-1}
$n_a = 2$	$n_e = 1$	$0{,}82 \cdot 10^{15}$	$2{,}47 \cdot 10^{15}$	$6{,}58 \cdot 10^{15}$
6	5	$3{,}04 \cdot 10^{13}$	$4{,}02 \cdot 10^{13}$	$5{,}26 \cdot 10^{13}$
10	9	$6{,}58 \cdot 10^{12}$	$7{,}71 \cdot 10^{12}$	$9{,}02 \cdot 10^{12}$
25	24	$4{,}21 \cdot 10^{11}$	$4{,}48 \cdot 10^{11}$	$4{,}76 \cdot 10^{11}$
101	100	$6{,}38 \cdot 10^{9}$	$6{,}48 \cdot 10^{9}$	$6{,}58 \cdot 10^{9}$
501	500	$5{,}23 \cdot 10^{7}$	$5{,}25 \cdot 10^{7}$	$5{,}26 \cdot 10^{7}$

Es ist zu sehen, daß bei kleinen n die Quantenfrequenzen nicht mit den klassischen übereinstimmen, sondern zwischen ihnen liegen. Jedoch vermindert sich der Unterschied zwischen den klassischen und den Quantenfrequenzen mit wachsendem n und wird bei genügend großen n verschwindend klein.

Die erhaltenen Ergebnisse können noch auf andere Weise zusammengefaßt werden. Aus jener allgemeinen Formulierung, die wir den Quantenbedingungen im § 99 gaben, folgt, daß die Hauptursache der Unstetigkeit der mechanischen Größen bei sehr kleinen Systemen im „Atomismus" der Wirkung begründet ist: es existiert eine kleinste Wirkung, die der Planckschen Konstante $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · s gleich ist. Sie erscheint sozusagen als „Atom" der Wirkung. Sind die Dimensionen des Systems und die Masse des Teilchens derart, daß die Wirkung für ein solches System mit h vergleichbar ist, dann kommt der Quantencharakter der Erscheinungen im vollen Maße zum Ausdruck; ist jedoch eben diese Wirkung so groß, daß $h = 0$ angenommen werden kann, dann wird die Unstetigkeit unmerklich, und es müssen die Gesetze der klassischen Mechanik befriedigt werden.

Dies Ergebnis erscheint als der Sonderfall eines allgemeinen Prinzips, das in der modernen theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielt, des *Korrespondenzprinzips*. So gehen beispielsweise die Formeln der Mechanik in der speziellen Relativitätstheorie automatisch für $v \ll c$, d. h. bei so kleiner Geschwindigkeit, daß $c \to \infty$ angenommen werden kann, in die Formeln der Newtonschen Mechanik über. Das Korrespondenzprinzip fordert nun, daß eine jede nichtklassische Theorie in dem entsprechenden Grenzfall in die klassische übergeht.

Übungen: 1. Es ist zu zeigen, daß die Formel (107,10) für einen Rotator gilt, für ein Teilchen also, das auf einem Kreise um ein festes Zentrum umläuft. (Hinweis: Das

Wirkungsintegral ist im Falle eines Rotators $I = \oint p_\varphi d\varphi$, mit $p_\varphi = \sqrt{2EA}$, wobei A das Trägheitsmoment ist.)

2. Unter Benutzung der Formel (100,5) für die Energie eines wasserstoffähnlichen Atoms $E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{I^2}$, worin $I = nh$ das Wirkungsintegral ist, und unter der Annahme, daß sich I stetig ändert, ist mit Hilfe von (107,10) die klassische Umlauffrequenz des Elektrons für die n-te Bahn zu berechnen und zu zeigen, daß das auf diese Weise erhaltene Resultat mit (107,2) übereinstimmt.

§ 108. Die Krise der BOHRschen Theorie

Die BOHRsche Theorie, mit der wir uns in diesem Abschnitt bekannt gemacht haben, war ein gewaltiger Schritt in der Entwicklung der Theorie vom Bau des Atoms. Sie zeigte mit voller Schärfe die Nichtanwendbarkeit der klassischen Physik auf die inneratomaren Erscheinungen einerseits und die entscheidende Bedeutung der Quantengesetze in mikroskopischen Systemen andererseits. Sie gab den Anstoß zu einer großen Zahl experimenteller Arbeiten, die zu wichtigen Ergebnissen führten. Besonders groß war aber ihre heuristische Bedeutung; selbst in solchen Fällen, in denen die Theorie keine quantitativen Erklärungen für diese oder jene Erscheinungen geben konnte, gab sie dennoch den Leitfaden für ihre klare Klassifikation und qualitative Deutung. Auf diese Weise wurde beispielsweise das gewaltige Material der Atom- und Molekülspektroskopie durch die Arbeiten einer Reihe von Forschern, unter denen die Arbeiten eines russischen Gelehrten, des Akademiemitgliedes ROSHDESTWENSKI, und seiner Schüler eine große Bedeutung besitzen, zum ersten Male in ein festes und klares System zusammengefaßt.

Neben diesen und vielen anderen positiven Seiten besaß die Theorie auch wesentliche Mängel, die von Anfang an klar waren. Hierzu gehört vor allem der innere Widerspruch der Theorie. Tatsächlich war die BOHRsche Theorie weder eine folgerichtige klassische Theorie noch eine konsequente Quantentheorie. Nach einem scherzhaften Ausspruch von W. G. BRAGG müssen wir von dieser Theorie montags, mittwochs und freitags die klassischen Gesetze benutzen und dienstags, donnerstags und sonnabends die Quantengesetze!

Es ist nicht verwunderlich, daß sich nach den ersten Erfolgen der Theorie immer klarer ihre Mängel zu erkennen gaben. Vor allem erlaubte die BOHRsche Theorie selbst in dem einfachsten Fall der wasserstoffähnlichen Atome nur die Frequenz der Spektrallinien zu errechnen, nicht aber ihre Intensitäten. Für die Berechnung der Intensitäten mußte das Korrespondenzprinzip benutzt werden, das auch auf kleine Quantenzahlen ausgedehnt wurde, und somit letzten Endes die Rechnung nach der klassischen Elektrodynamik durchgeführt werden.

Besonders drückend war der Mißerfolg beim Versuch, eine Theorie des neutralen Heliumatoms aufzubauen, eines der einfachsten Atome des Periodensystems, das unmittelbar dem Wasserstoffatom folgt und aus einem Kern und zwei Elektronen besteht. Obgleich die Aufgabe des Drei-Körper-Problems im Rahmen der klassischen Mechanik nicht einwandfrei gelöst werden kann, so wurden doch in der Himmelsmechanik ausgezeichnete Näherungsmethoden ausgearbeitet,

welche Resultate mit einer Genauigkeit geben können, die dem Experiment vollkommen genügen.

In der gegenwärtigen Zeit, nach der Entdeckung der eigenartigen Welleneigenschaften der Materie, über die wir im Abschnitt X sprechen werden, ist es vollständig klar, daß die BOHRsche Theorie, die auf der klassischen Mechanik fußt, nur eine Etappe des Überganges zur Schaffung einer folgerichtigen Theorie der atomaren Erscheinungen sein konnte.

IX. DIE LICHTQUANTEN

§ 109. Der statistische Charakter des Lichtfeldes

Bis jetzt interessierten wir uns für das Auftreten eigentümlicher Quantengesetze in atomaren Bereichen. Wir stellten insbesondere fest, daß der Vorgang der Lichtausstrahlung durch ein Atom bei sprunghaften Übergängen zwischen verschiedenen stationären Zuständen stattfindet; die Frage nach der Natur der Strahlungsenergie selbst hatten wir bis jetzt außer acht gelassen. EINSTEIN wies jedoch bereits im Jahre 1905 darauf hin, daß eine große Zahl experimenteller Tatsachen und theoretischer Überlegungen direkt zu der Vorstellung von der unstetigen Natur der Strahlung selbst führen. Wir beginnen mit der Darstellung der Theorie von EINSTEIN. Seine Überlegungen sind auf der Beobachtung der zufälligen Schwankungen (Fluktuationen) der Strahlungsdichte begründet.

Betrachten wir zuerst ein Gas, das in einem geschlossenen Gefäß des Volumens V enthalten ist. Wir teilen nun irgendeinen Raumteil $v < V$ ab und werden in verschiedenen Momenten die Zahl der Gasmoleküle betrachten, die sich im Innern von v befinden. Vom molekular-statistischen Gesichtspunkt wird diese Zahl nicht streng konstant sein, sondern wird Schwankungen erleiden. Die mittlere Teilchenzahl im Raum v sei $\bar{n}$. Ist dieser Raum genügend groß und befindet sich das Gas unter normalem Druck, dann werden die augenblicklichen Abweichungen von dieser mittleren Zahl $\bar{n}$ im Verhältnis so klein sein, daß sie vernachlässigt werden können. Verkleinern wir nun den Raum v. Stellen wir uns schließlich vor, der Raum sei so klein, daß in ihm nur noch eine kleine Zahl von Teilchen (sagen wir im Mittel 10) enthalten ist. Jetzt müssen die zufälligen Abweichungen vom Mittel schon deutlich merklich sein. Solche rein zufälligen Abweichungen heißen Fluktuationen. Ihr Studium ist einer der interessantesten und wichtigsten Abschnitte der modernen statistischen Physik.

SMOLUCHOWSKI, der sich viel mit dem Studium der statistischen Erscheinungen beschäftigte, löste beispielsweise die folgende Aufgabe: Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sich alle Gasmoleküle, die sich im Raum V befinden, im Teil v dieses Raumes sammeln? Die Antwort auf diese Frage ist nicht schwierig.[1]) Befindet sich in dem Raum V nur ein Molekül, dann wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dies Molekül im Teil v zu finden, offensichtlich proportional v und gleich

$$w_1 = \frac{v}{V} \tag{109,1}$$

---

[1]) Siehe Anhang IV am Ende des Buches.

sein. Ist $v = V$, so ist tatsächlich $w_1 = 1$, wie es auch sein muß, denn das Auffinden des Moleküls im Gesamtraum V ist ein wahrscheinliches Ereignis. Es mögen sich nun jedoch n unabhängige Moleküle im Raum V befinden. Die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül in dem Teilraum v vorzufinden, wird durch die Formel (109,1) ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit, n unabhängige Moleküle in ein und demselben Teilraum v anzutreffen, wird nach dem Theorem der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten gleich

$$w_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n \qquad (109,2)$$

sein. Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß bei großen Werten von n für $v = \frac{1}{2} V$ die Wahrscheinlichkeit

$$w_n = \frac{1}{2^n},$$

d. h. verschwindend klein sein wird.

Einstein betrachtete die analoge Aufgabe für den Fall der Strahlung. Wir nehmen einen geschlossenen Raum V an, der schwarze Strahlung der Temperatur T enthält. Die im Innern dieses Raumes eingeschlossene Strahlungsenergie mit den Frequenzen zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist gleich

$$E = V\varrho_\nu \, d\nu,$$

wobei ϱ_ν die spektrale Strahlungsdichte ist. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die gesamte Energie in dem Teilvolumen v konzentriert. Einstein benutzte für die Strahlungsdichte die statistische Thermodynamik und die Wiensche Formel *(die für hohe Frequenzen gilt)*:

$$\varrho_\nu \, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu,$$

und fand die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$w = \left(\frac{v}{V}\right)^{E/h\nu}.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der Formel (109,2), so sehen wir, daß sich die Strahlung bei genügend kurzen Wellenlängen so benimmt, als bestünde sie aus $n = \frac{E}{h\nu}$ unabhängigen Korpuskeln!

Einstein betrachtete weiter die Frage der Strahlungsdichteschwankungen. Wir nehmen an, daß die Strahlung tatsächlich aus einzelnen „Atomen" der Größe $h\nu$ besteht, die wir *Photonen* nennen. In einem solchen Fall wird die Strahlungsdichte gleich der Anzahl der Photonen in der Raumeinheit, multipliziert mit $h\nu$, sein. Aber die Zahl der Photonen in einem ausgewählten Raum muß ebenso wie die Zahl der Moleküle zufälligen Schwankungen, d. h. Fluktuationen, unterworfen sein. Stellen wir zu Anfang das Maß dieser statistischen Schwankungen fest. Ist $\bar{n}$ die mittlere Zahl der Teilchen im Raum v, so wird die Zahl der Teilchen n_k, die sich in einem gegebenen Moment in dem Raum befinden, allgemein von $\bar{n}$ verschieden sein: in einigen Fällen wird sie kleiner als $\bar{n}$ und in anderen größer sein. Die Abweichung vom Mittelwert

$$\Delta n_k = n_k - \bar{n}$$

wird deshalb sowohl positiv als auch negativ sein und außerdem noch verschiedene absolute Werte haben. Jedoch kann der mittlere Wert Δn_k nicht als Maß für die Abweichung dienen, weil er offensichtlich gleich null ist,

$$\overline{\Delta n_k} = \overline{(n_k - \bar{n})} = \bar{n} - \bar{n} = 0 .$$

Es ist daher bequemer, als Maß für die Abweichungen das Quadrat $(n_k - \bar{n})^2$ zu benutzen, das stets positiv ist. Der mittlere Wert des Quadrates der Abweichung

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

erscheint als Maß für die „Streuung" der einzelnen Werte von n_k, ihrer Abweichung vom Mittelwert. $\overline{\varepsilon^2}$ heißt daher das Schwankungsquadrat oder die Dispersion Die Abweichung vom Mittelwert kann auch durch die mit dem Pluszeichen ver sehene Quadratwurzel von $\overline{\varepsilon^2}$ charakterisiert werden:

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\overline{(n_k - \bar{n})^2}} ,$$

welche die Physiker den mittleren quadratischen Fehler und die Mathematiker Streuung nennen. Alle diese Bestimmungen sind nicht nur auf die Fluktuation von Teilchen, sondern auch auf jede beliebige zufällige Schwankung anwendbar.

In der mathematischen Statistik wird ein einfaches Gesetz bewiesen, das für beliebige zufällige Abweichungen gilt und folgendes aussagt: Ist der Mittelwert einer sich zufällig ändernden Größe $\bar{n}$, so ist die quadratische Abweichung $\overline{\varepsilon^2}$ auch gleich $\bar{n}$[1]) und deshalb die mittlere quadratische Abweichung $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\bar{n}}$. Der Sinn dieses Gesetzes wird an Zahlenbeispielen klar. $\bar{n}$ sei die mittlere Anzahl von Teilchen. Ist $\bar{n} = 100$, dann ist $\overline{\varepsilon^2}$ ebenfalls gleich 100, und $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10$ oder, anders ausgedrückt, die Schwankungen der Zahl von Teilchen betragen im Mittel 10 % ihrer Zahl. Ist $\bar{n} = 10^{10}$, so ist $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^5$ oder 10^{-3} % von $\bar{n}$. Bei $\bar{n} = 10^{20}$ ist $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^{10}$ oder 10^{-8} % von $\bar{n}$.

Interessieren uns die Schwankungen der Energie, so ist unter der Annahme, daß die Energie aus unabhängigen Atomen der Größe $h\nu$ besteht, $\bar{E} = \bar{n}h\nu$, und deshalb

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta n^2}\,(h\nu)^2 = (\bar{n} \cdot h\nu)\,h\nu = \bar{E} \cdot h\nu. \tag{109,3}$$

Energieschwankungen sind jedoch auch dann möglich, wenn die Strahlung reine Wellennatur besitzt. In diesem Fall sagen wir, daß elektromagnetische Wellen den Raum V in allen Richtungen durchlaufen. Inmitten dieser Wellen gibt es solche, die nach Richtung und Frequenz nahe beieinanderliegen und miteinander interferieren. Da sich jedoch die Richtungen und Phasen dieser Wellen ununterbrochen in zufälliger Weise ändern, so ändert sich auch ebenso zufällig das Resultat dieser Interferenzen: die Verteilung der Maxima und Minima im Raum und in der Zeit bleibt nicht konstant. Deshalb nennen wir solche Wellen auch inkohärente Wellen. Die makroskopischen Geräte, die wir benutzen, mitteln dieses sich ununter-

[1]) Siehe Anhang IV.

brochen ändernde Interferenzbild und lassen die Anwesenheit von Interferenzen nicht erkennen. Vom mikroskopischen Gesichtspunkt haben wir in diesem Fall jedoch typische Energieschwankungen.

Die resultierende Amplitude, die infolge der Interferenz von Wellen der Amplituden a_1 und a_2 entsteht, ändert sich an einem gegebenen Ort vom Maximalwert a_1+a_2 bis zum Minimalwert a_1-a_2. Entsprechend ändert sich die Energie von $(a_1+a_2)^2$ bis $(a_1-a_2)^2$ und durchläuft hierbei in Abhängigkeit von der Phasendifferenz die Zwischenwerte; im Mittel ist sie gleich $a_1^2+a_2^2$. Da der mittlere Energiewert dem Quadrat der Amplitude proportional ist, wird das Schwankungsquadrat der Energie der vierten Potenz der Amplitude proportional sein, d. h. dem Quadrat der Energie. Die genaue Berechnung ergibt für ε^2 die folgende Formel:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V d\nu}\,\overline{E}^2. \tag{109,4}$$

Die statistische Thermodynamik erlaubt nun, einen Ausdruck für das Schwankungsquadrat der Energie ohne Benutzung anschaulicher Bilder, wie wir sie bisher hatten, zu finden. Auf Grund der allgemeinsten Annahmen der physikalischen Statistik (GIBBSsche Verteilung) erhalten wir für das Schwankungsquadrat die folgende Formel:

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2\,\frac{d\overline{E}}{dT}. \tag{109,5}$$

Mit $\overline{E} = V\varrho_\nu\,d\nu$ werden wir, da jede der Formeln für die Energiedichte zur Berechnung benutzt werden kann, auch verschiedene Resultate erhalten.

Wir wissen, daß sich im Gebiete hoher Frequenzen die WIENsche Formel gut bewährt:

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu\,;$$

umgekehrt ist im Gebiet niedriger Frequenzen die RAYLEIGH-JEANSsche Formel

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT$$

anwendbar, die für genügend lange Wellen Resultate ergibt, die mit den experimentellen gut übereinstimmen. Schließlich gibt die PLANCKsche Formel

$$\varrho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

richtige Resultate *für das gesamte Spektrum.*

Wir berechnen jetzt $\overline{\varepsilon^2}$ mit Hilfe der Formel (109,5) und benutzen nacheinander alle drei oben aufgeführten Gesetze der Energieverteilung $\varrho_\nu d\nu$.

Mit der WIENschen Formel finden wir

$$\left.\begin{aligned}\overline{E} &= V\,\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu,\\ \frac{d\overline{E}}{dT} &= V\,\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{h\nu}{kT^2}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu = \frac{h\nu}{kT^2}\,V\varrho_\nu\,d\nu = \frac{h\nu}{kT^2}\,\overline{E}.\end{aligned}\right\}$$

Setzen wir dies in (109,5) ein, dann erhalten wir

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\cdot\overline{E}. \tag{109,6}$$

Dies ist aber die Formel (109,3) und zeigt, daß sich die dem WIENschen Gesetz gehorchende Strahlung wirklich wie eine Anhäufung von „Strahlungsatomen" benimmt.

Betrachten wir jetzt den anderen Grenzfall: Wir nehmen für die Strahlungsdichte die RAYLEIGH-JEANSsche Formel. Wir haben

$$\left.\begin{aligned} \overline{E} &= V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu, \\ \frac{d\overline{E}}{dT} &= V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k\,d\nu \end{aligned}\right\}$$

und

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2\frac{d\overline{E}}{dT} = k^2T^2V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu. \tag{109,7}$$

Bedenken wir, daß in diesem Fall

$$\overline{E} = V\varrho_\nu\,d\nu = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu,$$

dann können wir (109,6) leicht in die Form

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V\,d\nu}\overline{E}^2 \tag{109,8}$$

überführen und erhalten ein Resultat, das mit der Formel (109,4) übereinstimmt, die bei der Annahme einer Wellennatur der Strahlung erhalten wurde.

Wir sehen also, daß die Statistik zu folgendem eigentümlichen Schluß führt: Im Gebiet kurzer Wellen (dem Gebiet der Anwendbarkeit des WIENschen Gesetzes) muß sich die Strahlung wie eine Anhäufung von Teilchen, Photonen, betragen; im Gebiet langer Wellen, wo die RAYLEIGH-JEANSsche Formel gilt, muß sie sich wie Wellen verhalten. Jedoch erscheinen beide von uns benutzten Strahlungsgesetze als Grenzgesetze. Nehmen wir endlich die PLANCKsche Formel, die *für beliebige Wellenlängen richtig* ist, und berechnen mit ihrer Hilfe und derselben statistischen Formel (109,5) das Schwankungsquadrat. In diesem Fall ist

$$\overline{E} = V\frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Zur Errechnung von $\overline{\varepsilon^2}$ ist es nötig, die Ableitung $\frac{d\overline{E}}{dT}$ zu finden. Benutzen wir die Abkürzung

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} = f,$$

dann erhalten wir

$$\frac{df}{dT} = \frac{h\nu}{kT^2}\cdot\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}.$$

Durch direkte Ausrechnung können wir uns davon leicht überzeugen, daß

$$\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} = f + f^2.$$

Wenn sich der Leser von diesen Bemerkungen leiten läßt, erhält er ohne Schwierigkeiten für $\overline{\varepsilon^2}$ die folgende, *aus zwei Gliedern bestehende* Formel:

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\overline{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu V}\overline{E}^2. \qquad (109{,}9)$$

Das erste Glied stimmt mit der Formel (109,6) überein, entspricht also einer rein korpuskularen Vorstellung von der Natur des Lichtes. Das zweite Glied stimmt mit der Formel (109,8) überein, entspricht also einer reinen Wellenvorstellung. Wir kommen zu dem Schluß, daß das Licht zwei Naturen besitzen muß: eine korpuskulare und eine Wellennatur. Die erste tritt mit besonderer Deutlichkeit im kurzwelligen Teil des Spektrums auf, die zweite im langwelligen Teil. Aber keine dieser Ansichten gibt für sich allein ein vollkommenes Bild von der Natur des Lichtes; nur ihre Verbindung erlaubt, alle seine Erscheinungen vollständig zu erklären.

In diesem Abschnitt werden uns ausschließlich die korpuskularen Eigenschaften des Lichtes interessieren. Wir können uns davon überzeugen, daß es eine ganze Anzahl von Erscheinungen gibt, die sofort erklärt werden können, wenn wir das Licht als Photonenstrom annehmen. Die Erscheinungen, in denen die Wellennatur des Lichtes auftritt (Interferenz, Beugung), sind hinreichend aus der klassischen Optik bekannt.

§ 110. Der Photoeffekt und die Einsteinsche Gleichung

Zu den die korpuskularen Eigenschaften beweisenden Erscheinungen gehört vor allem die Abtrennung eines Elektrons infolge der Einwirkung des Lichtes, d.h. der Photoeffekt.

Im Jahre 1887 bemerkten H. Hertz und W. Hallwachs, daß das Überspringen eines Funkens zwischen den Kugeln eines Entladungsgerätes bedeutend erleichtert wird, wenn eine von ihnen mit ultraviolettem Licht angestrahlt wird. Diese Erscheinung wurde eingehend in den klassischen Arbeiten des russischen Physikers A. G. Stoletow untersucht, der eine Methode zur Erforschung des Photoeffektes ausarbeitete (Stoletowscher Kondensator) und eine Reihe wichtiger Gesetzmäßigkeiten aufdeckte. Es zeigte sich, daß diese Erscheinung unter Einwirkung des ultravioletten Lichtes auf der Beseitigung *negativer* Elektrizität von der Metalloberfläche beruhte. Weitere Untersuchungen klärten darüber auf, daß das Wesen des Photoeffektes in der Befreiung von *Elektronen* liegt. Besonders klar wurde dies durch die eleganten Versuche des sowjetischen Physikers A. F. Joffe an Metallstaub gezeigt. Die durch Elektrodenzerstäubung mit Lichtbogen erhaltenen mikroskopischen Metallteilchen werden in einen Kondensator eingeführt. Die Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten wird so gewählt, daß eines dieser Staubteilchen im Blickfeld des Mikroskops im Gleichgewicht verharrt. Bei Beleuchtung mit ultraviolettem Licht änderte das Staubteilchen von Zeit zu Zeit seine Ladung, wodurch das Gleichgewicht gestört wird; durch erneute Einstellung der entsprechenden Potentialdifferenz kann das Staubteilchen von neuem in das Gesichtsfeld gebracht werden. Ist das Gleichgewichtspotential bekannt, so kann die von dem Staubteilchen jedesmal abgegebene Ladung berechnet werden (siehe § 3). Es zeigt sich, daß diese Ladung immer ein ganzes Vielfaches der Elektronenladung beträgt.

Die qualitative Deutung des Photoeffektes bildet *auf den ersten Blick* vom Wellengesichtspunkt keine Schwierigkeiten: die auffallende elektromagnetische Welle ruft Schwingungen der Elektronen im Metall hervor; bei Resonanz zwischen der Eigenfrequenz der Elektronenschwingung und der Frequenz der auffallenden Welle wird die Amplitude der Elektronenschwingung so groß, daß das Elektron aus der Metalloberfläche austreten kann. Sollte dieses Bild richtig sein, dann muß offensichtlich die kinetische Energie, mit der das Elektron das Metall verläßt, von der einfallenden Welle abgegeben werden. Daraus würde folgen, daß die Energie des Photoelektrons in direkter Verbindung mit der Intensität des einfallenden Lichtes steht. Indessen zeigten die vielfältigen Versuche, daß die Energie der Photoelektronen *nicht von der Lichtintensität abhängt:* eine Erhöhung der Intensität erhöht nur die *Anzahl* der Photoelektronen, die streng der Intensität proportional ist, nicht aber ihre Geschwindigkeit.

Alle diese Gesetze des Photoeffektes erweisen sich vom Gesichtspunkt der Wellennatur des Lichtes aus als unverständlich. Die Unabhängigkeit der Energie der Photoelektronen von der Lichtintensität versuchte man dadurch zu erklären, daß dem Licht ein „Auslösemechanismus" zugeschrieben wurde, und man sich vorstellte, daß das Elektron seine Energie nicht von der einfallenden Welle, sondern auf Kosten der Wärmebewegung im Metall aufnimmt, die Rolle des Lichtes also nur in einer Befreiung des Elektrons besteht. Hierbei bleibt jedoch der Einfluß der Frequenz des Lichtes noch vollkommen unverständlich, außerdem müßte der Photoeffekt bei der obigen Annahme stark von der Temperatur des Metalles abhängen, was aber überhaupt nicht zutrifft.

EINSTEIN wies nun darauf hin, daß alle diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn das Licht als ein Photonenstrom der Größe $nh\nu$, also rein korpuskular angenommen wird. Von diesem Gesichtspunkt ist das qualitative Bild des Photoeffektes folgendes: Das absorbierte Photon übergibt dem Elektron seine Energie. Ist diese Energie ausreichend, um das Elektron aus seiner Bindung zu lösen, so wird es die Grenze der Metalloberfläche verlassen. Da die Wahrscheinlichkeit der gleichzeitigen Absorption zweier Photonen durch ein Elektron verschwindend klein ist, so bezieht jedes befreite Elektron seine Energie von *einem* Photon (jedoch nicht jedes absorbierte Photon befreit ein Elektron).

Die *Anzahl* der befreiten Photoelektronen muß also der Zahl der absorbierten Photonen, also der Intensität des Lichtes proportional sein (Gesetz von STOLETOW). Die *Energie* des Photoelektrons hängt aber nur von der Energie des absorbierten Photons ab; da die letztere gleich $h\nu$ ist, folgt hieraus, daß die Energie des Photoelektrons linear von der Frequenz, aber nicht von der Intensität (Zahl der Photonen) abhängen muß.

Die Energiebilanz bei der Absorption eines Photons kann im allgemeinen Fall durch die folgende einfache Gleichung, die gewöhnlich die EINSTEINsche Gleichung genannt wird, ausgedrückt werden:

$$h\nu = P_1 + P_2 + eV. \qquad (110,1)$$

Hier ist P_1 die Abtrennungsenergie des Elektrons vom Atom (Ionisierungsenergie), P_2 die Austrittsarbeit des Elektrons aus der Oberfläche des Körpers und eV die kinetische Energie des befreiten Photoelektrons.

Die Metalle werden allgemein durch das Vorhandensein einer großen Zahl freier Elektronen charakterisiert, d. h., es kann für Metalle P_1 gleich null gesetzt werden.

Dafür muß aber das Elektron beim Austritt aus der Metalloberfläche ein Feld überwinden, das die Elektronen im Innern des Metalles wie in einem Kasten festzuhalten bestrebt ist. Die Arbeit, die zur Überwindung dieses Feldes aufgewandt werden muß, ist die Austrittsarbeit P_2. Auf diese Weise hat die EINSTEINsche Formel für Metalle die Form

$$h\nu = eV + P_2 . \tag{110,2}$$

Für $h\nu < P_2$ kann das Elektron offensichtlich nicht aus der Metalloberfläche austreten. Dies bedeutet, daß irgendeine minimale Frequenz $h\nu_0 = P_2$ existiert, die gerade noch zum Hervorrufen eines Photoeffektes befähigt ist; bei geringeren Frequenzen ist er nicht mehr zu beobachten (rote Grenze des Photoeffektes).

Die Notwendigkeit eines Arbeitsaufwandes zur Befreiung eines Elektrons aus dem Metall tritt nicht nur im Falle des Photoeffektes auf, sondern auch im Falle der Aussendung von Elektronen durch glühende Körper (Thermoemission). Die Austrittsarbeit kann daher unabhängig vom Photoeffekt experimentell durch die Untersuchung der Thermoemission bestimmt werden und hat die Größenordnung einiger Elektronenvolt.

In der Tabelle XIV werden einige Zahlenwerte für die Größe der Austrittsarbeit angegeben.

Es muß vermerkt werden, daß auf die Größe der Austrittsarbeit der Zustand der Metalloberfläche und im besonderen die Anwesenheit eines Filmes adsorbierter Gase einen wesentlichen Einfluß ausübt. Die in der Tabelle angegebenen Zahlen beziehen sich auf Metalle mit gasfreier Oberfläche.

Tabelle XIV

Metall	Austrittsarbeit in eV	Metall	Austrittsarbeit in eV
Li	2,4	W	4,5
Na	2,1	Pd	5,0
K	2,0	Pt	6,3
Cs	0,7		

Kennen wir die Austrittsarbeit, dann können wir die Wellenlänge λ_0 der roten Grenze des Photoeffektes berechnen:

$$P_2 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} .$$

Diese Berechnungen zeigen, daß λ_0 für Alkalimetalle im sichtbaren Teil des Spektrums liegt (zum Beispiel ist für Kalium $\lambda_0 = 600$ mμ), und für Wolfram, Platin und andere Metalle mit Austrittsarbeiten in der Größenordnung von 5 bis 6 eV liegt λ_0 im ultravioletten Teil (zum Beispiel für Wolfram ist $\lambda_0 = 270$ mμ).

§ 111. Die experimentelle Prüfung der EINSTEINschen Gleichung

Die EINSTEINsche Formel läßt eine experimentelle Prüfung zu. Nach (110,2) muß zwischen der Frequenz des auffallenden Lichtes und der Energie der durch dieses Licht abgelösten Photoelektronen eine lineare Beziehung bestehen.

Wenn wir den Photoeffekt durch verschiedene Wellenlängen auslösen und die Energie der befreiten Photoelektronen messen, dann können wir uns von der Richtigkeit der EINSTEINschen Formel überzeugen und außerdem den Zahlenwert h als Tangens des Neigungswinkels der erhaltenen Geraden bestimmen.

Für die Ermittlung der Energie der Photoelektronen wird meist die Methode des im § 86 beschriebenen Bremspotentials benutzt.

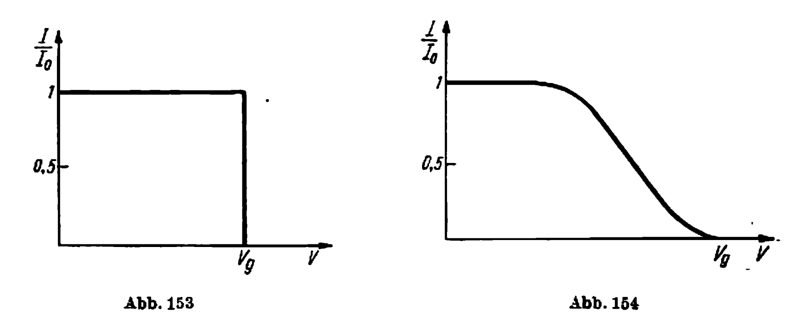


Abb. 153 Abb. 154

Hätten alle befreiten Elektronen dieselbe Geschwindigkeit, dann müßte die Abhängigkeit der Stärke des Photostromes vom Bremspotential die in Abb. 153 dargestellte Form haben; solange das Bremspotential nicht einen bestimmten Wert $V = V_g$ erreicht, hängt die Stromstärke nicht von dem Potential ab. Bei $V = V_g$ wird der Photonenstrom plötzlich gleich null. Das ist gerade jenes Potential V_g, bei dem die kinetische Energie des Elektrons gleich der Arbeit ist, die das Elektron zur Überwindung des Bremsfeldes aufwenden muß:

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV_g.$$

Auf diese Weise dient das Grenzpotential V_g als Maß für die Energie der Photoelektronen: sie beträgt eV_g Elektronenvolt.

In Wirklichkeit wird ein solch scharfer Stromabfall nicht beobachtet. Die Abhängigkeitskurve des Stromes vom Bremspotential hat gewöhnlich die in Abb. 154 dargestellte Form.

Der allmähliche Stromabfall wird dadurch erklärt, daß die Elektronen nicht mit einer bestimmten Geschwindigkeit austreten, sondern eine kontinuierliche Verteilung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Hierdurch erlaubt die Kurve der Abb. 154, die eine Strom-Spannungs-Charakteristik darstellt, auch die Energie- bzw. Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen festzustellen. Zu diesem Zwecke muß eine graphische Differentiation der Strom-Spannungs-Kurve durchgeführt werden, wie dies bereits im § 86 auseinandergesetzt wurde. Jedoch interessiert uns bei der experimentellen Prüfung der EINSTEINschen Formel nicht die Energieverteilung der Elektronen, sondern die *maximale Energie*, da dies gerade jene Energie ist, mit der die Photoelektronen aus der Metalloberfläche befreit werden.

Zwei Tatsachen erschweren die Erlangung genauer Ergebnisse. Erstens schneidet die experimentelle Kurve nicht die Abszisse, wie es in der Abb. 154 gezeigt wird, sondern nähert sich ihr nur asymptotisch, wodurch das maximale Bremspotential nur mit einem gewissen Ungenauigkeitsgrad angegeben werden kann. Wie in

ähnlichen Fällen verschiebt zweitens das einer genauen Messung nur schwer zugängliche Kontaktpotential die Kurve.

Das Kontaktpotential und die Schwierigkeit seiner Bestimmung, ferner eine Reihe anderer experimenteller Schwierigkeiten und Fehlerquellen führten dahin, daß eine einwandfreie Bestätigung der Einsteinschen Gleichung nicht sofort erhalten wurde. Nach einigen vorbereitenden Arbeiten, die ernste Widersprüche hervorriefen, gelang es Millikan, den gesuchten experimentellen Beweis zu erbringen und h genau zu bestimmen.

Durch die Vervollkommnung der heutigen Vakuumtechnik und die Anwendung eines Kugelkondensators vereinfachten sich die Messungen überaus. Der Vorteil des Kugelkondensators, der zuerst von P. J. Lukirski entwickelt und für die experimentelle Prüfung der Einsteinschen Gleichung von P. J. Lukirski und S. S. Prileshajew benutzt wurde, besteht darin, daß wegen der Besonderheiten der Elektronenbewegung in einem solchen Kondensator die Stromkurve in Abhängigkeit vom Bremspotential steil auf null abfällt, also das maximale Bremspotential sehr genau bestimmt werden kann.

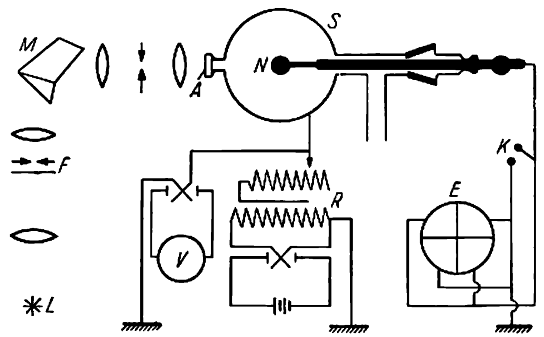


Abb. 155. Versuchsschema für den Photoeffekt mit Hilfe eines Kugelkondensators

In Abb. 155 ist das Schema der Versuchsanordnung angegeben. Hier bedeutet L die Lichtquelle (Quarz-Quecksilber-Lampe), FM einen Quarzmonochromator, der es gestattet, aus dem Spektrum eine Linie auszusondern. Durch das Quarzfensterchen A fällt das Licht in die innen versilberte Glaskugel S, die als äußerer Kondensatorbelag dient. Die Kugel N, die aus dem zu untersuchenden Metall hergestellt ist, dient als innerer Kondensatorbelag und wird mit monochromatischem Licht bestrahlt. Durch das Potentiometer R kann an den Kondensatorbelag S ein bestimmtes, mit dem Voltmeter V meßbares Potential gelegt

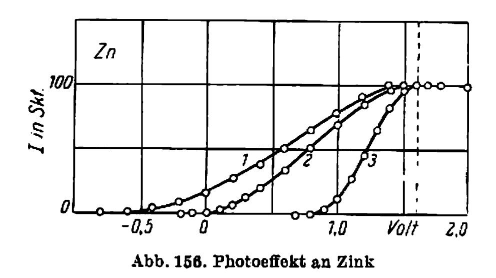


Abb. 156. Photoeffekt an Zink

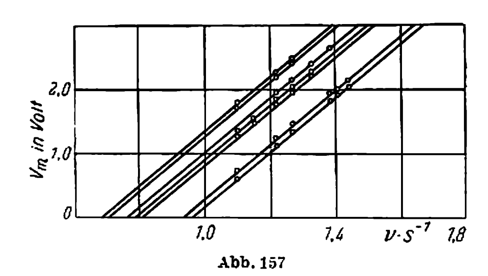


Abb. 157

werden. Das Potential der Kugel wird mit dem Elektrometer E gemessen. In der Abb. 156 sind drei Kurven *1*, *2*, *3* angegeben, die man bei Beleuchtung einer Zinkkugel mit den Wellenlängen 2302 Å, 2537 Å und 3130 Å erhalten hat. Der

Abfall der Kurven beginnt bei einem von der Wellenlänge unabhängigen Potential. Dieses Potential ist gerade gleich dem Kontaktpotential, das auf diese Weise ohne besondere Messung bestimmt wird. Bestimmen wir mit Hilfe solcher Kurven die maximale Energie der Photoelektronen und zeichnen die Abhängigkeit dieser Energie von der Frequenz auf, so erhalten wir die in der Abb. 157 angegebenen Geraden. Dadurch wird die lineare Beziehung zwischen $h\nu$ und eV bestätigt; der Tangens des Neigungswinkels dieser Geraden ist gleich h/e, so daß man h mit Hilfe der bekannten Größe e berechnen kann.

§ 112. Die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums

Ist die Bindungsenergie der inneren Elektronen bedeutend geringer als die Energie des einen Photoeffekt hervorrufenden Photons, so kann in der Einsteinschen Gleichung sowohl die Größe P_2 als auch die Größe P_1 im Vergleich zu $h\nu$ vernachlässigt werden. In diesem Fall geht die Einsteinsche Gleichung in die einfachste Form

$$h\nu = eV \tag{112,1}$$

über.

Wird diese Gleichung von links nach rechts gelesen, so zeigt sie, welche Energie das durch das Photon $h\nu$ befreite Elektron besitzt. Wird sie von rechts nach links gelesen, so fordert sie, daß auf Kosten des Elektrons mit der Energie eV ein Photon $h\nu$ erhalten wird. Als ein solcher Prozeß der Energieumwandlung schnell bewegter Elektronen in Photonenenergie erweist sich das Auftreten von Röntgenstrahlen bei Bremselektronen. Tatsächlich ist der Mechanismus dieser Erscheinung nicht so einfach, und es entsteht bei der Bremsung von Elektronen ein zusammengesetztes Spektrum von Röntgenstrahlen. Dennoch fordert die Einsteinsche Formel, daß die maximale Energie der hierbei erhaltenen Photonen die Bedingung (112,1) befriedigt.

Der Versuch zeigt, daß die Euergieverteilung in dem zusammengesetzten Spektrum der Röntgenstrahlen die in der Abb. 158 dargestellte Form hat. Hier ist eine Reihe kontinuierlicher Spektren angegeben, die sich bei verschiedenen Potentialen an den Elektroden der Röntgenröhre mit Wolfram-Antikathode ergeben. Ein jedes dieser Spektren ist nach kurzen Wellenlängen (hohen Frequenzen) hin scharf begrenzt. Empirisch wurde gefunden, daß die der kurzwelligen Grenze entsprechende Wellenlänge $\lambda_{\min}$ mit dem angelegten Potential durch die Beziehung

$$\lambda_{\min} V = \text{const} \tag{112,2}$$

verknüpft und offensichtlich mit der Einsteinschen Formel (112,1) identisch ist. Ersetzen wir in (112,1) ν durch c/λ, dann erhalten wir

$$\lambda_{\min} V = \frac{ch}{e} = \text{const.} \tag{112,3}$$

Die Beziehung (112,3) kann zur Bestimmung von h benutzt werden; der hierbei erhaltene Wert erweist sich als sehr genau.

§ 113. Die genaue Bestimmung der Planckschen Konstanten

Da die Quantengesetze des Energieaustausches für viele Phänomene gelten, so gibt es viele Möglichkeiten, aus experimentellen Daten h zu berechnen. Wir wollen zeigen, daß schon die Gesetze der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers eine solche Möglichkeit geben. Zum Beispiel geht in die durch die Wellenlänge ausgedrückten Formeln von Wien und Planck die Konstante $c_2 = \frac{hc}{k}$ ein. Die experimentelle Bestimmung dieser Konstante ergibt

$$c_2 = 1{,}4384\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{grad},$$

woraus wir durch Einsetzen der Werte für c und k

$$c = 2{,}99776\cdot 10^{10}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1},\quad k = 1{,}3804\cdot 10^{-16}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{grad}^{-1}$$

erhalten:

$$h = 6{,}558\cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}.$$

Unmittelbar wird h aus dem Photoeffekt bestimmt. Die Neigung der Geraden in Abb. 157 liefert h/e, so daß die Genauigkeit der Bestimmung von h auf diesem Wege, außer von der Genauigkeit des Experimentes selbst, nur noch von der Richtigkeit der Konstanten e abhängt, während nach der oben betrachteten Methode noch die Kenntnis der beiden Konstanten c und k erforderlich ist. Aus dem Photoeffekt ergibt sich

$$h = 6{,}547\cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}.$$

Als eine recht genaue Möglichkeit zur Berechnung von h wird die auf die Bestimmung der kurzwelligen Grenze des Röntgenspektrums begründete Methode gewertet; h selbst wird dabei entweder mit Hilfe von Kurven bestimmt, die den in der Abb. 158 dargestellten ähnlich sind, d. h. also nach der Energieverteilung im Spektrum bei konstantem Potential (Abb. 159a), oder mit Hilfe der „Isochromaten". Diese Methode der „Isochromaten" besteht in folgendem: Das Spektrometer für Röntgenstrahlen wird so eingerichtet, daß in die Ionisationskammer nur Strahlen ein und derselben bestimmten Wellenlänge einfallen und die Intensität in Abhängigkeit von dem an das Rohr angelegten Potential gemessen werden kann. Auf Grund der Einsteinschen Gleichung

$$eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

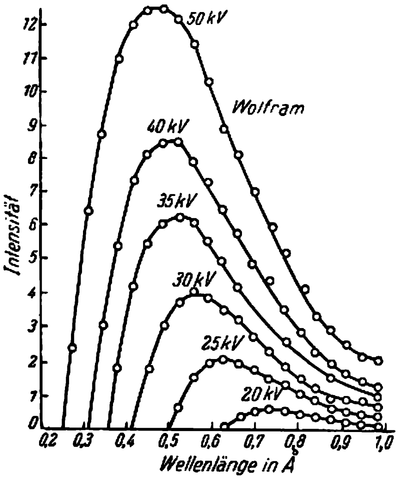


Abb. 158. Kurzwellige Grenze im Röntgen-Bremsspektrum

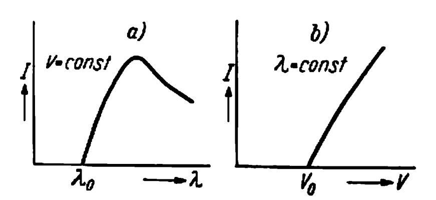


Abb. 159. Kurve der Energieverteilung a) im kontinuierlichen Spektrum, b) Isochromate

erscheint die ausgewählte Wellenlänge bei dem genau bestimmten Potential

$$V_0 = \frac{hc}{\lambda e};$$

bei höherem Potential wächst die Intensität gemäß einer Kurve an, die als „Isochromate“ bezeichnet wird (Abb. 159 b).

Der Unterschied zwischen der Bestimmung von λ_{min} aus der Spektralkurve und der Methode der Isochromaten wird in Abb. 159 illustriert. Einige Beispiele von Isochromaten werden in Abb. 160 wiedergegeben. Extrapolieren wir jede dieser Kurven bis zum Schnitt mit der Abszisse, dann erhalten wir V_0 und hieraus mit Hilfe der Einsteinschen Gleichung auch h. Die genauesten Messungen, die in der letzten Zeit durchgeführt wurden, ergaben

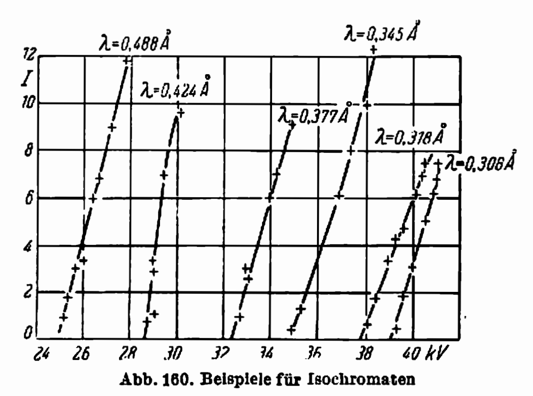


Abb. 160. Beispiele für Isochromaten

$$\frac{h}{e} = (1{,}37920 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-17}\ \mathrm{erg \cdot s\ CGSE^{-1}}.$$

Setzen wir $e = 4{,}8024 \cdot 10^{-10}$ CGSE, dann finden wir

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot s}.$$

§ 114. Weitere Versuche zum Nachweis der korpuskularen Eigenschaften des Lichtes

Im § 109 sahen wir, daß die korpuskularen Eigenschaften des Lichtes sehr deutlich bei den Versuchen mit kurzwelliger Strahlung in Erscheinung treten. Nicht zufällig wurden die Welleneigenschaften der Röntgenstrahlen erst 17 Jahre nach der Entdeckung der Strahlen selbst endgültig festgestellt.

Aus der Vielzahl von Versuchen mit Röntgen- und γ-Strahlen, welche die korpuskularen Eigenschaften dieser Strahlen mit größter Schärfe enthüllen, wollen wir nur zwei betrachten: der erste Versuch wurde von A. F. Joffe und N. J. Dobronrawow, der zweite wurde von Bothe durchgeführt.

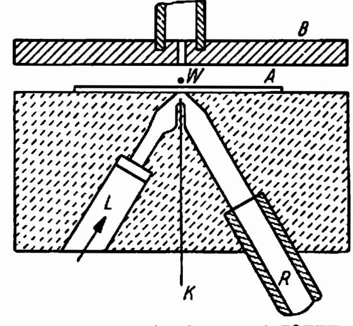


Abb. 161. Versuchsschema nach JOFFE

Die Abb. 161 gibt das Schema der für die Versuche von Joffe und Dobronrawow benutzten Miniaturröntgenröhre an. In einer dicken Ebonitplatte befinden sich zwei Bohrungen R und L, die durch R ausgepumpt werden. Durch die mit einem Quarzfenster verschlossene Bohrung L wird die Spitze eines Aluminiumdrahtes K von 0,2 mm Durchmesser mit ultraviolettem Licht bestrahlt. Die hierdurch befreiten Photoelektronen werden durch ein Potential von 12000 V beschleunigt, das an das Drähtchen K gelegt ist,

und durch die dünne Aluminiumfolie A gebremst, die gleichzeitig die Öffnung von L und R oben verschließt. Die Dicke dieser Folie ist so gering ($5 \cdot 10^{-3}$ mm), daß sie die bei der Bremsung der Elektronen entstehende Röntgenstrahlung praktisch nicht absorbiert. Die Bestrahlung des Drähtchens wird so schwach gewählt, daß es nur ungefähr 1000 Photoelektronen in der Sekunde liefert und folglich auch die Anzahl der Röntgenimpulse nur 1000 pro Sekunde beträgt.

Die Aluminiumfolie A dient zugleich als unterer Belag des MILLIKANschen Kondensators AB, in dem das mikroskopische Wismutstäubchen W mit einem Durchmesser von ungefähr $3 \cdot 10^{-5}$ cm in einem bestimmten Abstand von der Antikathode A im Gleichgewicht gehalten wird.

Der Versuch zeigt, daß das Stäubchen von Zeit zu Zeit aus dem Gleichgewicht kommt, da die Röntgenstrahlen aus ihm ein Photoelektron befreien, das nach der EINSTEINschen Gleichung die Energie von ungefähr 12000 eV aufnimmt. Dies findet im Mittel alle 30 Minuten statt. Im Verlaufe dieser 30 Minuten gehen ungefähr $1{,}8 \cdot 10^6$ Röntgenimpulse durch das Teilchen hindurch. Würde sich die Energie dieser Impulse in Form sphärischer Wellen ausbreiten, so gäbe eine jede von ihnen dem Stäubchen durch die geringe Größe des Raumwinkels, unter dem das Stäubchen von der Antikathode sichtbar ist, nur einen sehr kleinen Teil ihrer Energie ab. Diese Energie verteilte sich außerdem noch über eine sehr große Zahl von Elektronen, die das Stäubchen bilden, und es ist vollkommen unwahrscheinlich, daß einmal in 30 Minuten alle Elektronen nach einem rätselhaften Mechanismus ihre Energie einem einzigen Elektron übergeben, das hierdurch dann soviel Energie besäße, wie sie das Photoelektron hatte, welches aus dem Drähtchen herausgerissen und durch das Potential von 12000 V beschleunigt wurde.

Die Resultate des Versuches von JOFFE und DOBRONRAWOW sind also vom Wellenstandpunkt aus unverständlich. Vom korpuskularen Gesichtspunkt aus dagegen sind sie vollkommen verständlich.

Die Energie breitet sich im Raum durch Photonen aus, und ein Elektron wird nur dann aus dem Stäubchen herausgerissen, wenn ein Photon direkt auffällt. Überschlagen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Photon das Stäubchen trifft. In den Versuchen von JOFFE und DOBRONRAWOW betrug die Entfernung vom Stäubchen bis zur Antikathode $d = 0{,}02$ cm und der Radius des Stäubchens $r = 3 \cdot 10^{-5}$ cm. Die Kugel mit dem Radius d hat die Oberfläche $4\pi d^2 = 4\pi\,(0{,}02)^2 = 16\pi \cdot 10^{-4}$ cm². Die Fläche, die das Stäubchen auf dieser Kugel einnimmt, der Wirkungsquerschnitt des Stäubchens also, wird

$$\pi r^2 = \pi\,(3 \cdot 10^{-5})^2 = 9\,\pi \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^2.$$

Nehmen wir an, daß die Bewegung eines einzelnen Röntgenphotons in alle Richtungen gleich wahrscheinlich ist, dann ist offensichtlich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen des Photons auf das Stäubchen gleich dem Verhältnis des Wirkungsquerschnittes des Stäubchens zur Oberfläche der Kugel, d. h. gleich $\frac{9\pi \cdot 10^{-10}}{16\pi \cdot 10^{-4}} \approx \frac{1}{1800000}$. Folglich fällt im Mittel eins von 1800000 Photonen auf das Stäubchen. Da nun in einer Sekunde 1000 Photonen emittiert werden, so wird im Mittel ein Photon in 30 min auf das Stäubchen auffallen, was vollkommen mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Der BOTHEsche Versuch zeigte, daß bei der Anregung von Röntgenstrahlfluoreszenz die Energie sich nicht in Gestalt von Kugelwellen, sondern in Gestalt

gerichteter Photonen ausbreitet. Eine dünne Eisen- oder Kupferfolie *F* (Abb. 162) wurde zwischen zwei GEIGERzählern Z_1 und Z_2 aufgehängt. Primäre Röntgenstrahlen genügender Härte bestrahlten die Folie von oben (in Richtung des Pfeiles *P*) und regten sie zur Aussendung der charakteristischen Fluoreszenzstrahlung an. Würde sich diese Strahlung in Gestalt von Kugelwellen ausbreiten, so müßten beide Zähler gleichzeitig reagieren.

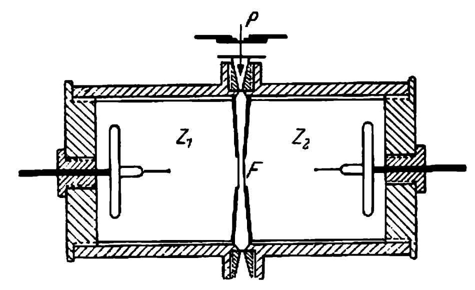


Abb. 162. BOTHEscher Versuch

Der Versuch zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist: die Zähler reagieren vollkommen unabhängig voneinander, und die Zahl der Koinzidenzen überschreitet die zu erwartende Anzahl bei zufälligem Zusammentreffen nicht. Es gibt nur eine Erklärung: die entstehende Fluoreszenzstrahlung breitet sich in Gestalt gerichteter Photonen aus, die entweder in den einen oder in den anderen Zähler gelangen können.

§ 115. Statistische Schwankungen des Photonenstromes

Die korpuskularen Eigenschaften des Lichtes schließen noch eine wichtige Folgerung ein: die Notwendigkeit einer statistischen Schwankung schwacher Lichtströme. Wenn das Licht tatsächlich als Photonenstrom betrachtet werden kann, dann ruft jedes in den Auffänger (Photoelement, Ionisationskammer usw.) fallende Photon unabhängig von anderen Photonen eine Wirkung hervor. Bei gewöhnlicher Intensität ist die Anzahl dieser elementaren Absorptionsakte so groß, daß wir keinerlei Diskontinuität in der Strahlung bemerken können. Stellen wir uns jedoch vor, der Photonenstrom sei so schwach, daß die Zahl der in der Zeiteinheit in den Auffänger gelangenden Photonen einzeln oder in Dekaden gemessen werden kann. Ist außerdem der Auffänger so empfindlich, daß er schon beim Auftreffen einer kleinen Zahl von Photonen reagiert, dann muß unvermeidlich die regellose Schwankung der Photonenzahl zum Ausdruck kommen.

Solche Schwankungen wurden vor allem bei sehr kurzwelliger Strahlung, besonders mit Röntgen- und γ-Strahlen radioaktiver Materialien, beobachtet. Wie bereits wiederholt bemerkt, sind in diesem Falle wegen der hohen Frequenzen die Energien der Photonen sehr groß. Bei Absorption durch Atome oder Moleküle findet auch eine Ionisation statt, und es werden schnelle Elektronen freigesetzt, welche ihrerseits in einer großen Anzahl Ionisationen von anderen Molekülen der Ionisationskammer oder des Zählers hervorrufen. Auf diese Weise wird der primäre Effekt der Absorption bedeutend verstärkt und die Beobachtung eines schwachen Stromes erleichtert. Der im § 114 betrachtete Versuch von BOTHE mit zwei Zählern, die die in entgegengesetzte Richtungen emittierten Photonen der schwachen Röntgenstrahlung einer Eisenfolie registrierten, gehört zu den statistischen Versuchen.

Ein besonderes Interesse hat das Auftreten der Schwankung bei schwachen Intensitäten *sichtbaren Lichtes*. Solche Schwankungen wurden tatsächlich von S. J. WAWILOW und seinen Mitarbeitern in einer ganzen Reihe von Arbeiten und nach

ihm von mehreren anderen Forschern festgestellt. Als empfangende Registriereinrichtung dient in allen diesen Versuchen das menschliche Auge, das eine Empfindlichkeit besitzt, die bisher noch von keinem photoelektrischen Gerät erreicht wurde. Gemäß den Versuchen von Wawilow umfaßt die maximale Empfindlichkeit eines bestimmten peripheren Teiles der Netzhaut eines Auges, das genügend lange Zeit in Dunkelheit zugebracht hat, ungefähr 200 Photonen, schwankt jedoch bei verschiedenen Beobachtern merklich. Hierbei bezieht sich die genannte Empfindlichkeit auf die in das Auge *fallende* Energie. Da das Licht, bevor es die Netzhaut erreicht, durch eine Reihe von Materialien der Umgebung hindurchlaufen muß, in welchen es reflektiert oder teilweise absorbiert wird, so ist die minimale Anzahl der Photonen, die die Gesichtsempfindung hervorrufen, wesentlich geringer als die angegebene Zahl und umfaßt nach der Meinung Wawilows vielleicht nur einige Photonen.

Um die Versuchseinrichtung Wawilows verständlich zu machen, muß an einige Tatsachen erinnert werden, die sich auf den Bau und die physiologischen Funktionen des Auges beziehen.

Bekanntlich sind in der Netzhaut des Auges zwei Typen von lichtempfindlichen Elementen verteilt: Zäpfchen und Stäbchen. Die Zäpfchen herrschen in den Teilen der Netzhaut vor, die nahe der optischen Achse des Auges liegen, während an der Peripherie fast gar keine von ihnen anzutreffen sind; umgekehrt herrschen die Stäbchen an den peripheren Teilen der Netzhaut vor. Diese beiden Arten von Elementen erfüllen verschiedene Funktionen: von den Zäpfchen ist das Farbsehvermögen abhängig, während die Stäbchen das graue, sogenannte Dämmerungs- oder periphere Sehvermögen bedingen. Die Empfindlichkeit der Stäbchen ist viele Male höher als die der Zäpfchen. Daher wird zur Bestimmung der Reizschwelle des Auges mit Hilfe der Versuche über die quantenhaften Fluktuationserscheinungen gerade das farblose, periphere Sehvermögen benutzt. Alle diese Versuche sind auf das Vorhandensein einer scharfen *Schwelle der Lichtempfindung* begründet: ist die Energie der auf die Netzhaut fallenden Strahlung geringer als eine bestimmte Größe, so empfindet das Auge kein Licht. Diese Eigenschaft benutzte Wawilow zur Beobachtung der statistischen Schwankung des Photonenstromes im sichtbaren Bereich. Stellen wir uns vor, daß ein kurzzeitiger Lichtblitz beobachtet wird; entsprechen nun der Empfindungsschwelle n_0 Photonen, die während der Zeit des Aufblitzens absorbiert werden müssen, und sei z die wirkliche Anzahl der während dieser Zeit absorbierten Photonen, dann wird das Auge in diesem Falle den Blitz nur unter der Bedingung $z \gg n_0$ empfinden. Ist jedoch $z < n_0$, dann ist die Lichtempfindung gleich null, und das Auge beobachtet keinen Blitz. Werden periodische, durch bestimmte Zeitintervalle getrennte Lichtblitze kleiner Intensität in das Auge gesandt, so wird z infolge der Schwankungen der Photonenzahl sowohl größer als auch kleiner als n_0 sein können, und das Auge des Beobachters wird einmal den Blitz empfinden und einmal nicht.

Auf diese Weise ergibt die Existenz einer Lichtempfindungsschwelle ein scharfes Kriterium für die Anwesenheit von statistischen Schwankungen; bei den Schwankungen von z um die Größe n_0 beobachten wir das Licht entweder überhaupt nicht, oder es ist als Blitz sichtbar. Was die Intensitätsschwankungen in Abhängigkeit von der verschiedenen Zahl absorbierbarer Photonen unter den Bedingungen $z \gg n_0$ betrifft, so gelingt es nach Wawilow nicht, sie in diesen an der Aufnahmefähigkeitsgrenze des Auges durchgeführten Versuchen zu beobachten.

Die Versuche wurden auf die folgende Weise durchgeführt (Abb. 163): Damit der Lichtblitz auf den gleichen peripheren Teil der Netzhaut fällt, wurde das Auge des Beobachters durch die Lampe *S* fixiert, deren Licht durch ein rotes Filter hindurchgeht; auf diesen roten Fleck wurde das Auge des Beobachters während der ganzen Zeit gerichtet. Das Licht einer anderen Lampe *L*, das von dem Spiegel *m* reflektiert wird, fällt auf die mit Löchern versehene Scheibe *D*, die durch einen Synchronmotor *M* gedreht wird (1 Umdrehung pro Sekunde). Die Löcher hatten solche Abmessungen, daß die Scheibe das Licht während der Dauer von 0,1 s hindurchließ und es während der Zeit von 0,9 s abblendete.

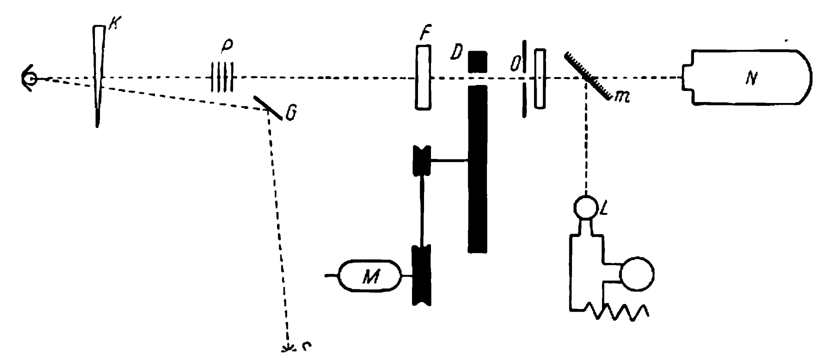


Abb. 163. Versuchsschema zur Messung sichtbarer Schwankungen des Photonenstromes

Dadurch wurde ein Lichtblitz von 0,1 s Dauer geschaffen, während das Auge für 0,9 s ausruhen konnte. Diese Einrichtung war auch notwendig, um die Fähigkeit des Auges auszuschließen, den Lichteindruck lange Zeit aufzubewahren. Das grüne Filter *F* wurde zur Erzeugung einer bestimmten Wellenlänge benutzt.

In dem Augenblick, in dem der Beobachter einen Lichtblitz sah, drückte er auf den Knopf des Zeitschreibers, auf dessen laufendem Band ein Zeichen erhalten wurde. Eine besondere Einrichtung verband die rotierende Scheibe mit einer anderen Feder des Zeitschreibers so, daß auf demselben Band jede Umdrehung der Scheibe vermerkt wurde. Auf diese Weise konnte festgestellt werden, ob der Lichtblitz beobachtet wurde oder nicht, wenn die Öffnung der Scheibe Licht hindurch ließ.

Die Helligkeit des grünen Fleckes konnte kontinuierlich vermindert werden. Hierbei erwies es sich, daß der Beobachter zu Anfang jeden Lichtblitz bemerkte. Bei weiterer Herabsetzung der Helligkeit hörten die beobachtbaren Blitze auf, jedem Durchgang der Scheibenöffnung zu entsprechen; es werden Schwankungen beobachtet; bei einigen Durchgängen waren die Blitze sichtbar, bei einigen waren sie es nicht. Durch die Untersuchung des Zeitschreiberbandes nach dem Versuch konnten die Beobachtungen einer statistischen Kontrolle unterworfen werden. Einerseits ist das Verhältnis der Zahl der beobachteten Blitze zur Gesamtzahl der Scheibenumdrehungen gleich der Wahrscheinlichkeit *P* für das Auftreten eines Blitzes; andererseits erlaubten einige ergänzende Messungen, auf die wir hier nicht eingehen können, das Verhältnis der Zahl *n* der durch die Netzhaut während eines

Blitzes *absorbierten* Photonen zur Zahl n_0 der durch die Netzhaut unter den Bedingungen einer Lichtempfindungsgrenze absorbierbaren Photonen zu bestimmen. Bezeichnen wir dies Verhältnis mit

$$\frac{n}{n_0} = x,$$

dann ergibt die auf die Wahrscheinlichkeitstheorie begründete Rechnung die folgende Beziehung zwischen P und x:

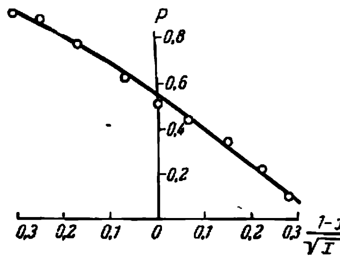


Abb. 164. Resultate von Schwankungsbeobachtungen

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}\frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Das umfangreiche von Wawilow zusammengestellte Material zeigt in allen Fällen ohne Ausnahme die lineare Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit P und der Größe $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$. In der Abb. 164 wird ein Beispiel angeführt: die ausgezogene Gerade ist nach der Formel gezeichnet, während die beobachteten Werte durch die Kreise aufgetragen wurden. Es ist zu erkennen, daß die experimentellen Punkte gut auf der Geraden liegen und hierdurch den statistischen Charakter der beobachtbaren Schwankungen bestätigen.

§ 116. Die Streuung der Röntgenstrahlen nach der Wellentheorie

Die Streuung der Röntgenstrahlen gehört zu den Erscheinungen, bei denen mit besonderer Klarheit die Doppelnatur der Strahlung zum Ausdruck kommt (siehe § 109).

Tatsächlich werden wir in dem vorliegenden und den folgenden Paragraphen sehen, daß einige Eigenschaften der gestreuten Röntgenstrahlen (Polarisation, Intensität) leicht vom Wellenstandpunkt erklärt werden können, während andere Eigenschaften (Änderung der Frequenz bei der Streuung) nur dann ohne Schwierigkeit erklärt werden können, wenn den Röntgenstrahlen eine korpuskulare Natur zugeschrieben wird.

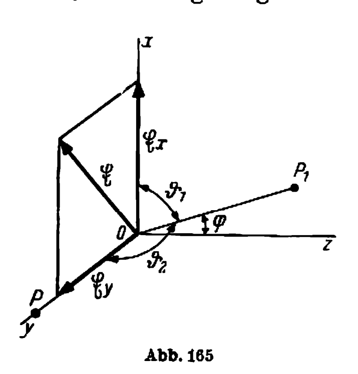


Abb. 165

Einer der wichtigen Schlüsse in der Wellentheorie der Röntgenstrahlen liegt darin, daß dann, wenn die einfallende Strahlung nicht polarisiert ist, die gestreute Strahlung teilweise polarisiert und unter bestimmten Bedingungen vollständig polarisiert sein muß. Betrachten wir die Entstehung dieser Polarisation. Eine ebene monochromatische elektromagnetische Welle, die sich in einer zur z-Achse parallelen Richtung ausbreitet (Abb. 165), fällt im Punkt O auf ein Elektron. Der elektrische Vektor dieser Welle, der auf das Elektron wirkt, zwingt dieses, harmonische Schwingungen auszuführen. Das Elektron wird zum Zentrum einer Kugelwelle, die sich als gestreute Welle in einem Punkt P darstellt, der auf der

Verlängerung der y-Achse liegt, also in einer zur Richtung der einfallenden Welle senkrechten Richtung. Da die einfallende Welle nicht polarisiert ist, so kann ihr elektrischer Vektor $\mathfrak{E}$ jede beliebige Richtung aufweisen, liegt aber immer in der xy-Ebene. Wir zerlegen ihn nun in seine Komponenten $|\mathfrak{E}_x|$ und $|\mathfrak{E}_y|$. Im § 63 [siehe beispielsweise Formel (63,6)] sahen wir, daß die Intensität der elektromagnetischen Strahlung eines schnell bewegten Elektrons proportional $\sin^2\vartheta$ ist, wobei ϑ der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung des Elektrons und der Richtung im Beobachtungspunkt ist. Die Schwingungen des Elektrons geben also unter der Wirkung der Komponente $|\mathfrak{E}_y|$ in der Richtung OP keine Strahlung ($\vartheta = 0$). Hieraus folgt, daß im Punkt P eine gestreute Strahlung auftritt, die durch Schwingungen nur unter Wirkung der einen Komponente $|\mathfrak{E}_x|$ bedingt ist; eine linear polarisierte Strahlung also mit einer Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors, die senkrecht zu der durch die Richtung der einfallenden Welle und den Beobachtungspunkt P gegebenen Ebene liegt.

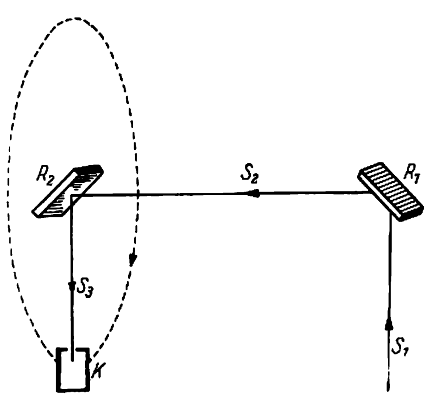


Abb. 166. Schema des Versuches von BARKLA

Dieser Schluß wird durch den folgenden Versuch von BARKLA bestätigt, der dem bekannten optischen Spiegelversuch von NÖRREMBERG analog ist. Die Röntgenstrahlen fallen in Richtung S_1 (Abb. 166) auf die Schicht R_1 (Kohle oder Paraffin), die die Rolle des Polarisators spielt. Nach dem oben Gesagten müssen die in Richtung S_2 gestreuten Strahlen vollständig polarisiert sein. Diese Polarisation wird mit Hilfe der zweiten Schicht R_2 beobachtet, die die Rolle des Analysators spielt. Zu diesem Zweck kann die Schicht R_2 zusammen mit der Ionisationskammer K um eine zu S_2 parallele Achse gedreht werden (durch Punktierung angedeutet). Der Versuch zeigt nun, daß die Kammer K die maximale Intensität der gestreuten Strahlung dann angibt, wenn S_3 parallel zu S_1 ist (wie in der Zeichnung angegeben), und die minimale Intensität dann, wenn S_3 senkrecht zu S_1 steht (d. h. bei einer Drehung von 90° in bezug auf die in der Zeichnung angegebene Lage). Und gerade dies wird auch erwartet, da auf der Grundlage des oben Gesagten der elektrische Vektor der einfallenden Welle in R_2 Elektronenschwingungen anregt, die zu S_1 und S_2 senkrecht sind.

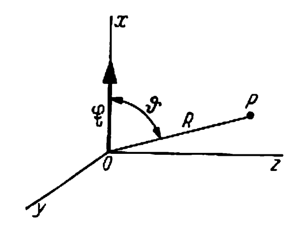


Abb. 167

Rechnen wir jetzt die Intensität der gestreuten Strahlen aus. Hierzu betrachten wir die erzwungenen Schwingungen eines Elektrons, die unter der Wirkung einer ebenen sich in Richtung der z-Achse ausbreitenden Welle stattfinden (Abb. 167). Nehmen wir an, daß die Anfangswelle linear polarisiert ist und ihr elektrischer Vektor $\mathfrak{E}$ in Richtung der x-Achse mit der Frequenz ω schwingt:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}. \qquad (116,1)$$

Die Intensität der auffallenden Welle wird dann nach § 64 gegeben durch

$$I_0 = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{E}|^2. \tag{116,2}$$

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ ruft erzwungene Schwingungen des Elektrons hervor, die in der x-Achse mit der gleichen Frequenz ω durchgeführt werden. Diese Schwingungen geben den Ursprung einer neuen sphärischen Welle, deren momentane Intensität in irgendeinem Punkt P in der Entfernung R vom Elektron nach der Formel (63,6) gleich

$$I = \frac{e^2 \ddot{x}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \vartheta \tag{116,3}$$

ist, worin ϑ der Winkel zwischen der Richtung zum Beobachtungspunkt P und der Richtung der Elektronenschwingung ist. Die Beschleunigung $\ddot{x}$ des sich unter der Wirkung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bewegenden Elektrons ist gleich $\frac{e|\mathfrak{E}|}{m}$. Setzen wir dies in (116,3) ein, dann finden wir $I = \frac{e^4 |\mathfrak{E}|^2}{4\pi c^3 m^2 R^2} \sin^2\vartheta$. Ersetzen wir hier $|\mathfrak{E}|^2$ durch die Intensität der einfallenden Welle I_0 nach (116,2), dann erhalten wir

$$I = I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta. \tag{116,4}$$

Dies ist der Ausdruck für die Intensität der gestreuten Strahlung im Punkt P. Wir sehen, daß die Verteilung der Intensität nach den Richtungen für eine linear polarisierte einfallende Welle den Faktor $\sin^2 \vartheta$ enthält. In der Schwingungsrichtung ist also die Intensität gleich null, und ihr Maximum wird bei $\vartheta = \pi/2$ erreicht (siehe § 63).

Ist die einfallende Welle nicht polarisiert, dann ist die Intensitätsabhängigkeit der Streuung von der Richtung etwas anders. Betrachten wir diesen Fall.

Die einfallende Welle breite sich wie vorher in Richtung der z-Achse aus (Abb. 165); der elektrische Vektor wird also in der xy-Ebene liegen. Wir zerlegen ihn in die Komponenten $|\mathfrak{E}_x|$ und $|\mathfrak{E}_y|$ und berechnen die Intensität der gestreuten Strahlung in dem in der xz-Ebene liegenden Punkt P. Da die primäre Strahlung nicht polarisiert ist, kann der elektrische Vektor $\mathfrak{E}$ jede beliebige Lage in der xy-Ebene einnehmen. Die Mittelwerte der Quadrate von $|\mathfrak{E}_x|$ und $|\mathfrak{E}_y|$ werden unter sich gleich sein:

$$\overline{|\mathfrak{E}_x|^2} = \overline{|\mathfrak{E}_y|^2} = \frac{1}{2} |\mathfrak{E}_0|^2,$$

und damit die ihnen entsprechenden Intensitäten

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0.$$

Eine jede dieser Komponenten $|\mathfrak{E}_x|$ und $|\mathfrak{E}_y|$ bewirkt eine gestreute Welle; die Intensitäten dieser gestreuten Wellen im Punkt P_1 sind nach Formel (116,4) (siehe Abb. 165)

$$I' = I_x \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta_1 = \frac{1}{2} I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \cos^2 \varphi, \tag{116,5}$$

$$I'' = I_y \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta_2 = \frac{1}{2} I_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2}. \tag{116,6}$$

Hier ist $\sin^2 \vartheta_2 = 1$, da ϑ_2 der Winkel zwischen der xz-Ebene und der y-Achse

ist. Da die Schwingungen $|\mathfrak{E}_x|$ und $|\mathfrak{E}_y|$ nicht kohärent sind, müssen zur Berechnung der Gesamtintensität in P_1 die Intensitäten I' und I'' addiert werden:

$$I = I' + I'' = I_0 \frac{e^4}{m^2c^4R^2} \cdot \frac{1 + \cos^2\varphi}{2}. \tag{116,7}$$

Die experimentelle Prüfung zeigte, daß für Röntgenstrahlen nicht zu kurzer Wellenlänge die Formel (116,7) Resultate ergibt, die vollkommen befriedigend mit dem Versuch übereinstimmen. In Abb. 168 stellt die ausgezogene Kurve die nach der Formel (116,7) errechnete Intensitätsverteilung dar: die gestrichelten Kurven geben die experimentellen Resultate für zwei verschiedene Wellenlängen wieder. Wie ersichtlich, stimmen für längere Wellen ($\lambda = 0{,}71$ Å) und für nicht zu kleine Streuwinkel die experimentellen Resultate gut mit der theoretischen Kurve überein. Die starke Abweichung zwischen den experimentellen und theoretischen Resultaten für Winkel kleiner als 30° wird dadurch erklärt, daß in der angeführten einfachen Ableitung die Interferenz der an den benachbarten Elektronen des Atoms gestreuten Wellen nicht berücksichtigt wurde.

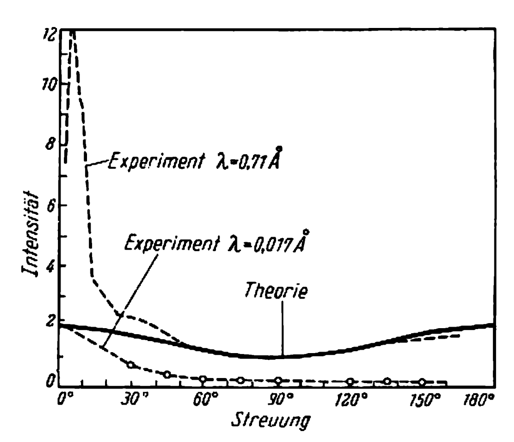


Abb. 168. Gegenüberstellung der wellentheoretischen und experimentellen Ergebnisse

Im Gegensatz hierzu weicht für kleine Wellenlängen ($\lambda = 0{,}017$ Å) die experimentelle Kurve im gesamten Bereich von der theoretischen ab. Sie zeigt auch bei 90° kein Minimum, wie es die Theorie fordert, und außerdem ist für alle Winkel die experimentell gefundene Intensität der Streuung bedeutend geringer als die berechnete.

Diese Abweichung zeigt, daß für sehr kleine Wellenlängen die klassische Wellentheorie der Streuung der Röntgenstrahlen vollständig unbefriedigend wird.

Übungen: 1. Unter Benutzung der Formel (116,4) ist zu zeigen, daß die von einem Elektron in alle Richtungen gestreute Energie der Welle durch die Formel

$$S = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2c^4} I_0$$

ausgedrückt wird.

2. Der Prozentsatz der Polarisation einer gestreuten Strahlung wird durch das Verhältnis

$$\frac{I'' - I'}{I'' + I'} \cdot 100\%$$

charakterisiert. Es ist zu zeigen, daß für Beobachtungspunkte, die in der xy-Ebene liegen (Abb. 165), die Polarisation vollständig (100%) ist und für Punkte, die auf der z-Achse liegen, der Prozentsatz der Polarisation gleich null ist.

§ 117. Der COMPTON-Effekt

Der Mangel der Wellentheorie in der Streuung der Röntgenstrahlen, der bei der Untersuchung der Streuungsintensität sehr kurzer Wellenlängen beobachtet wurde, kommt besonders scharf zum Ausdruck, wenn wir uns der Frequenz der gestreuten Strahlen zuwenden. Nach der Wellentheorie besteht der Streumechanismus in einem „Einschwingvorgang" der Elektronen durch das elektromagnetische Feld der einfallenden Welle. Daher ist natürlich zu erwarten, daß die Frequenz der gestreuten Strahlung mit der Frequenz der einfallenden Strahlung übereinstimmt.

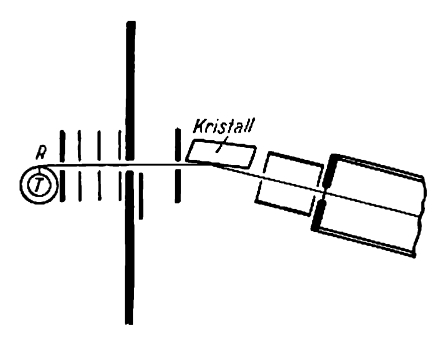


Abb. 169. Schema des COMPTON-Versuches

Indessen zeigten bereits die ersten Beobachtungen, daß sich bei der Streuung von Röntgen- und besonders von γ-Strahlen die Wellenlänge ändert und daß gerade in der gestreuten Strahlung längere Wellen auftreten, die ein geringeres Durchdringungsvermögen besitzen. Da bis zur Entdeckung der Röntgenspektroskopie zur Bestimmung der Wellenlänge recht grobe Methoden benutzt werden mußten, die sich auf Unterschiede in der Absorption von Strahlen verschiedener Wellenlänge begründeten, war es schwierig, diese Erscheinung im Detail zu klären, und man schrieb sie gewöhnlich dem Einfluß sekundärer Faktoren zu.

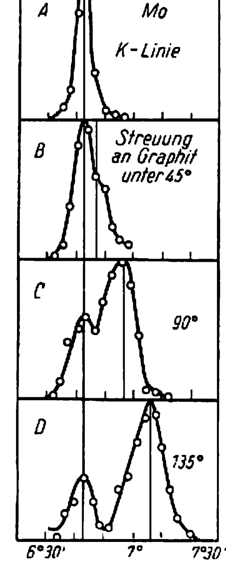


Abb. 170. COMPTON-Effekt an Graphit

Mit einem Röntgenspektrographen untersuchte A. COMPTON in den Jahren 1922/23 diese Erscheinung sorgfältig und konnte zeigen, daß sie nicht auf den Einfluß von nebensächlichen Faktoren zurückgeführt werden kann, sondern unmittelbar mit dem Mechanismus der Streuung verbunden ist. Das Schema seines Versuches wird in Abb. 169 dargelegt. Die Strahlung einer Röntgenröhre mit einer Molybdän-Antikathode T wird an einem Graphitstückchen R gestreut; die gestreute Strahlung läuft durch eine Reihe von Blenden und fällt schließlich auf den Kristall des Röntgenspektrographen. Durch Verschiebung und Drehung des Rohres zusammen mit dem Strahler R um eine vertikale Achse kann der Streuwinkel φ geändert werden, ohne die übrigen Teile des Gerätes zu bewegen. Die spektrale Verteilung der Intensität wird mit Hilfe einer Ionisationskammer gemessen.

In Abb. 170 sind die erhaltenen Ergebnisse zusammengestellt. A stellt die Intensitätsverteilung in der primären Linie dar (K_α-Linie des Molybdäns $\lambda = 0{,}712\,605$ Å); B, C, D geben die spektrale Zusammensetzung der Strahlung bei verschiedenen Streuwinkeln an. Es können sofort die folgenden Besonderheiten der Erscheinung festgestellt werden: 1. in der gestreuten Strahlung ist sowohl die primäre

Wellenlänge der erregenden Strahlung als auch die nach langen Wellen hin verschobene Wellenlänge vorhanden; 2. die Größe der Verschiebung hängt von dem Streuwinkel φ ab und wächst mit der Vergrößerung dieses Winkels; 3. mit der Vergrößerung des Streuwinkels φ verringert sich die Intensität der nicht verschobenen Linie, während die Intensität der verschobenen Linie anwächst.

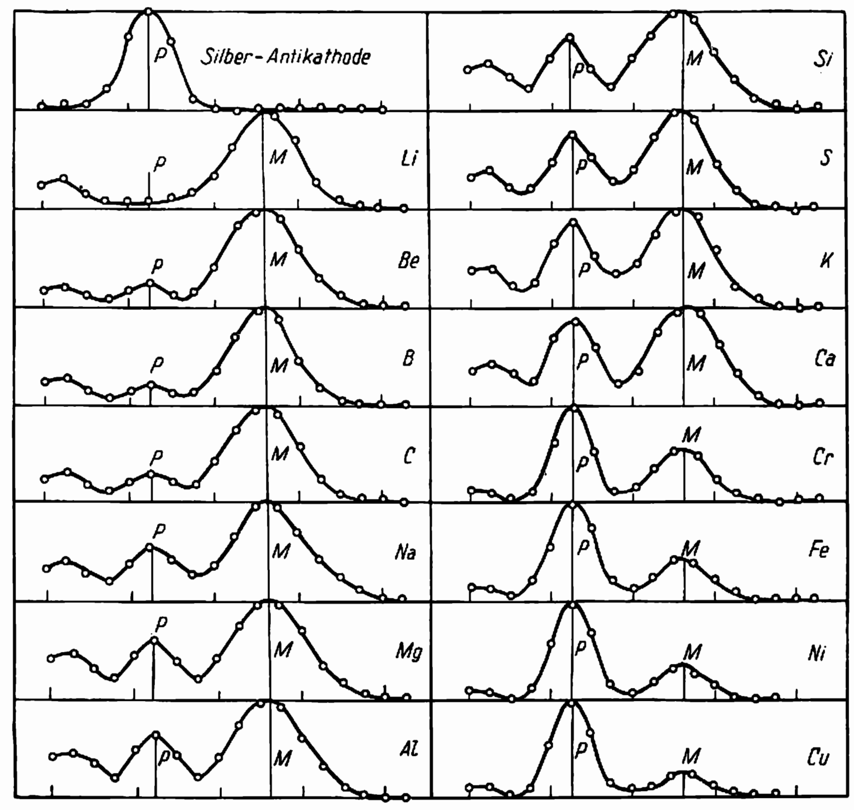


Abb. 171. COMPTON-Effekt bei verschiedenen Streusubstanzen

In Abb. 171 sind die Spektren der K_α-Linie einer Silberantikathode ($\lambda = 0{,}56\,267$ Å) angeführt, die unter demselben Winkel an *verschiedenen* Materialien gestreut wurde. Es kann folgende Besonderheit des Vorganges festgestellt werden: 1. die Größe der Verschiebung hängt nicht von der Natur der Streusubstanz ab; 2. bei Anwachsen der Ordnungszahl der Substanz wächst die Intensität der nicht verschobenen Linie, und die Intensität der verschobenen Linie fällt ab. So besteht bei Lithium die gestreute Strahlung praktisch vollkommen aus der verschobenen Wellenlänge, bei Kupfer dagegen ist die Intensität der verschobenen Linie gering im Vergleich zu der Intensität der nicht verschobenen Linie.

§ 118. Elementare Theorie des Compton-Effektes

Die in dem vorigen Paragraphen behandelten Besonderheiten des Compton-Effektes sind leicht zu beschreiben, wenn der Strahlung eine rein korpuskulare Natur zugeschrieben wird, sie also einen Photonenstrom darstellt, und wenn angenommen wird, daß an der Streuung nicht alle Elektronen, sondern nur ein unbedeutender Teil von ihnen teilnehmen, und daß jedes Elektron ein Photon streut. Um diese Erklärung zu Ende zu führen, müssen wir zulassen, daß das Photon nicht nur einen bestimmten Energiewert ($h\nu$) besitzt, sondern auch einen bestimmten Impuls, sich also, grob ausgedrückt, wie eine bewegte Kugel benimmt. In einem solchen Fall ist die Photonenstreuung durch Elektronen bei Zusammenstößen mit einem Austausch sowohl der Energie als auch des *Impulses* verbunden, nach einem bildlichen Ausdruck Comptons findet ein dem Billard ähnliches Spiel mit Photonen und Elektronen statt.

Um mit dieser Vorstellung die Berechnung der Wellenlängenverschiebung durchzuführen, müssen wir zuerst einige Eigenschaften des Photons betrachten. Das Photon besitzt, als Teilchen betrachtet, auf jeden Fall besondere Eigenschaften, da es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Daher sind die Formeln der klassischen Mechanik auf die Bewegung des Photons nicht anwendbar, es müssen die relativistischen Beziehungen benutzt werden (siehe § 61).

Nach der Relativitätstheorie ist die Masse eines sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Teilchens gleich

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Das Photon bewegt sich aber mit der Geschwindigkeit c, so daß $\beta = 1$ ist und daher der Nenner der obigen Formel gleich null wird. Hätte die Masse des ruhenden Photons eine endliche Größe, unterschiede sie sich also von null, dann erhielten wir $m = \frac{m_0}{0} \to \infty$. Hieraus folgt, daß die Ruhmasse des Photons unbedingt gleich null sein muß. Das Photon unterscheidet sich also wesentlich von allen solchen Teilchen, die, wie z. B. die Elektronen, eine endliche Ruhmasse besitzen.

Berechnen wir nun den Impuls des Photons. Offensichtlich können wir zu diesem Zweck schon nicht mehr die gewöhnliche Formel $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ benutzen. Jedoch gibt die Relativitätstheorie eine andere Formel für den Impuls p, die auch auf den Fall eines Teilchens mit der Geschwindigkeit c anwendbar ist. Diese Formel lautet:

$$p = \frac{v}{c^2} E. \tag{61,12}$$

Setzen wir hier $v = c$, dann finden wir

$$p = \frac{E}{c}, \tag{118,1}$$

und weil für das Photon $E = h\nu$ ist, so folgt

$$p = \frac{h\nu}{c}. \tag{118,1'}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für den Impuls des Photons.

Aus der Tatsache, daß das Photon einen bestimmten Impuls besitzt, folgt, daß der Photonenstrom, wenn er auf irgendein Hindernis trifft, einen Druck in ähnlicher Weise ausüben muß, wie sich die Bombardierung einer Gefäßwand durch die Moleküle eines Gases im Mittel zu dem Gasdruck zusammensetzt. Der durch den Photonenstrom erzeugte Druck ist aber auch der Lichtdruck, der in quantitativer Übereinstimmung mit der Formel (118,1) experimentell durch die bedeutenden Arbeiten des hervorragenden russischen Physikers P. N. LEBEDEW festgestellt wurde. LEBEDEW erkannte nicht nur die Existenz des Lichtdruckes auf makroskopische feste Körper, sondern wies auch exakt die geringe Wirkung des Lichtdruckes auf Gase nach. Wir vermerken jedoch, daß sich LEBEDEW bei der Durchführung seiner Versuche nicht von der korpuskularen Lichttheorie leiten ließ, sondern von der elektromagnetischen Theorie MAXWELLS, die ebenfalls zu der Notwendigkeit eines Lichtdruckes führt und für den Druck eine mit (118,1) übereinstimmende Formel angibt. MAXWELL ging von den anschaulichen Vorstellungen FARADAYS über die Kraftlinien des elektrischen Feldes aus und betrachtete den Lichtdruck selbst als eine Folge des Querdruckes der Kraftröhren. Die Tatsache, daß die Existenz des Lichtdruckes und sein quantitativer Ausdruck sowohl aus dem korpuskularen als auch aus dem Wellenbild abgeleitet werden kann, erscheint als eine der Äußerungen der bereits wiederholt erwähnten Doppelnatur des Lichtes.

Nehmen wir jetzt an, daß das Elektron sich bis zum Zusammenstoß in Ruhe befand, sein Impuls also gleich null war. Der Anfangsimpuls des Photons ist gleich $\overrightarrow{h\nu_0}/c$. Nach dem Zusammenstoß erwirbt das Elektron den Impuls $m\vec{v}$, wobei $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, und der Impuls des Photons wird gleich $\overrightarrow{h\nu}/c$.

Durch Anwendung der Erhaltungsgesetze der Energie und des Impulses (wenn wir diesen Zusammenstoß als Stoß elastischer Kugeln betrachten), erhalten wir zwei Gleichungen. Aus dem Gesetz der Energieerhaltung folgt

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{118,2}$$

wobei m_0c^2 die „Ruhenergie" des Elektrons ist. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Masse des sich bewegenden Elektrons mit m, dann können wir (118,2) umschreiben in

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2. \tag{118,3}$$

Das Gesetz von der Impulserhaltung ergibt

$$\frac{\overrightarrow{h\nu_0}}{c} = \frac{\overrightarrow{h\nu}}{c} + m\mathfrak{v}. \tag{118,4}$$

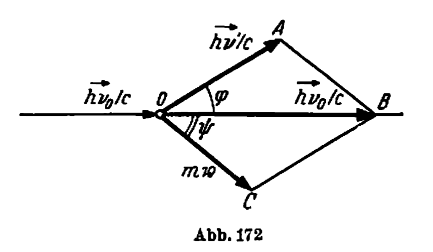


Abb. 172

Von den Gleichungen (118,3) und (118,4) ist die erste eine skalare Gleichung und die zweite eine vektorielle. Zur Berechnung müßte die Vektorgleichung (118,4) durch die beiden skalaren Gleichungen, d. h. durch die Koordinatenprojektionen, ersetzt werden. Wir verfahren jedoch folgendermaßen: Die Vektorgleichung (118,4) legt das Dreieck OAB fest (Abb. 172). Nach der ele-

mentaren Trigonometrie bestimmen wir aus diesem Dreieck das Quadrat der Seite AB, die der Größe nach gleich mv ist:

$$m^2v^2 = \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu_0\nu}{c^2}\cos\varphi$$

oder

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu\cos\varphi\,. \tag{118,5}$$

Die Gleichung (118,3) schreiben wir um in

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2$$

und quadrieren sie

$$m^2c^4 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu_0 - \nu)\,. \tag{118,6}$$

Subtrahieren wir (118,5) von (118,6), dann folgt

$$m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu)\,. \tag{118,7}$$

Bedenken wir, daß $m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \equiv m^2(1 - \beta^2) = m_0^2$, und führen wir eine einfache Umformung von (118,7) durch, dann erhalten wir

$$c(\nu_0 - \nu) = \frac{h}{m_0c}\nu_0\nu(1 - \cos\varphi) \tag{118,8}$$

oder

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)\,. \tag{118,9}$$

Hieraus berechnen wir ν und finden

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1 - \cos\varphi)} = \frac{\nu_0}{1 + 2\frac{h\nu_0}{mc^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,. \tag{118,10}$$

Dies ist auch die Formel für die Frequenzänderung.

Aus (118,10) erhalten wir leicht die Formel für die Änderung der Wellenlänge, die häufig in der Praxis benutzt wird. Bedenken wir, daß $\frac{c}{\nu} = \lambda$ und $\frac{c}{\nu_0} = \lambda_0$, dann finden wir

$$\lambda - \lambda_0 \equiv \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

oder

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}\,. \tag{118,11}$$

Die Größe h/m_0c, die die Dimension einer Länge besitzt, ist jetzt eine Kombination von drei Universalkonstanten; sie heißt die COMPTONsche Wellenlänge und wird mit Λ bezeichnet:

$$\Lambda = \frac{h}{m_0c} = \frac{6{,}624\cdot 10^{-27}}{9\cdot 10^{-28}\cdot 2{,}99\cdot 10^{10}} = 0{,}0242\,\text{Å}\,.$$

Die endgültige Formel für die Änderung der Wellenlänge bei der Streuung hat die Form

$$\Delta\lambda = 2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0{,}048\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\,. \tag{118,12}$$

Daraus ist ersichtlich, daß für $\varphi = 0$, $\Delta\lambda = 0$, für $\varphi = 90^\circ$, $\Delta\lambda = \Lambda$ und schließlich für $\varphi = 180^\circ$, $\Delta\lambda = 2\Lambda$.

In den Abb. 170 und 171 sind die berechneten Lagen der verschobenen Linien durch vertikale Geraden gekennzeichnet. Wie ersichtlich, stimmen die experimentell gemessenen Linien sehr gut mit den nach der Formel (118,12) vorhergesagten überein. Aus den genauesten Messungen erhalten wir für die Größe h/m_0c

$$\left(\frac{h}{m_0c}\right)_{\text{exp}} = (0{,}02424 \pm 0{,}00004)\,\text{Å}$$

in guter Übereinstimmung mit der theoretischen Größe, die nach den genauesten Werten von h, m_0 und c berechnet wurde:

$$\left(\frac{h}{m_0c}\right)_{\text{theor}} = (0{,}024265_{14} \pm 0{,}000005_7)\,\text{Å}.$$

Die Formel (118,11) zeigt, daß die Compton-Verschiebung nicht von der Wellenlänge der Primärstrahlung abhängt. Könnten wir deshalb den Compton-Effekt im sichtbaren Spektrum beobachten, so machte er im äußersten violetten Bereich ($\lambda = 4000$ Å) den tausendsten Teil eines Prozentes der Grundwellenlänge aus; für Röntgenstrahlen mittlerer Härte ($\lambda \approx 0{,}5$ Å) beträgt er bereits ungefähr 10%, und bei γ-Strahlen ist seine Größe von der Ordnung der Wellenlänge selbst.

Es bleibt nun noch zu klären, warum in der gestreuten Strahlung neben der verschobenen Linie auch eine nichtverschobene zu beobachten ist; aus der oben dargelegten Theorie folgt dies nicht. Bei der Betrachtung des Streumechanismus nahmen wir jedoch an, daß das Photon mit einem freien Elektron „zusammenstößt". Für leichte Atome und für schwach gebundene Elektronen ist eine solche Vorstellung auch vollkommen richtig, da die Bindungsenergie des Elektrons (einige Elektronenvolt) im Vergleich zur Photonenergie von Röntgenstrahlen verschwindend klein ist. Besonders bei schweren Atomen sind aber die inneren Elektronen so fest gebunden, daß sie nicht mehr als frei betrachtet werden können. Deshalb wird bei einem „Stoß" das Photon Energie und Impuls mit dem Atom als Ganzes austauschen. Da nun die Masse des Atoms sehr groß ist, wird ihm das Photon nach dem Gesetz von der Impulserhaltung seine Energie und seinen Impuls nicht übergeben; $h\nu$ bleibt also bei der Streuung unverändert.

Durch diese Überlegung können wir qualitativ das Verhältnis der Intensitäten der verschobenen und der nichtverschobenen Linie in Abhängigkeit von der Masse des Atoms abschätzen. In leichten Atomen sind alle Elektronen schwach gebunden; dagegen sind bei den schweren Atomen nur die äußeren Elektronen schwach gebunden. Daher können wir erwarten, daß unter gleichen Beobachtungsbedingungen bei einer Vergrößerung der Ordnungszahl die Intensität der verschobenen Linie abnehmen wird und die Intensität der nichtverschobenen anwächst. Wie die Abb. 171 zeigt, wird dies auch tatsächlich beobachtet.

Aus analogen Überlegungen folgt, daß der Compton-Effekt im sichtbaren Bereich des Spektrums überhaupt nicht auftritt.

§ 119. Die Rückstoßelektronen

Bis jetzt konzentrierten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Änderung des Spektrums bei der Streuung von Röntgenstrahlen. Die im § 118 durchgeführte einfache Berechnung der Verschiebung zeigt, daß jeder Streuvorgang von dem Auftreten eines schnellen Elektrons begleitet sein muß, das von dem Photon einen

Stoß erhalten hat. Wir berechnen nun die Änderung der kinetischen Energie des Elektrons bei der Streuung.

Nach dem Gesetz der Energieerhaltung muß diese Änderung gleich dem Unterschied der Energie des Photons vor und nach der Streuung sein:

$$E_k = h\nu - h\nu' = h\Delta\nu .$$

Das Verhältnis von E_k zur Anfangsenergie des Photons ist gleich

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} . \tag{119,1}$$

Es ist aber

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda} = \nu\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda},$$

woraus

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}$$

folgt. Unter Beachtung von (118,12) erhalten wir

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda+2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2}} . \tag{119,2}$$

Berechnen wir nach dieser Formel, welchen Anteil der Energie des primären Photons das Rückstoßelektron erhält. Bei $\lambda = 10\Lambda = 0{,}24$ Å (harte Röntgenstrahlen) und $\varphi = 90^0$ macht $E_k/h\nu$ nur 1/11 aus, und nur für $\lambda = \Lambda = 0{,}024$ Å (Gebiet der γ-Strahlen) bei $\varphi = 90^0$ ist das Verhältnis $\frac{E_k}{h\nu} = \frac{1}{2}$. Für nicht zu harte Röntgenstrahlen erhält das Rückstoßelektron somit nur einen verhältnismäßig kleinen Teil der Gesamtenergie des Photons. Dies erlaubt, die Rückstoßelektronen von den „Photoelektronen" zu unterscheiden, die bei der vollständigen Absorption des Photons durch das Atom entstehen und in dem letzten Fall nach der Einsteinschen Gleichung eine Energie von der Größenordnung der des Photons selbst aufnehmen.

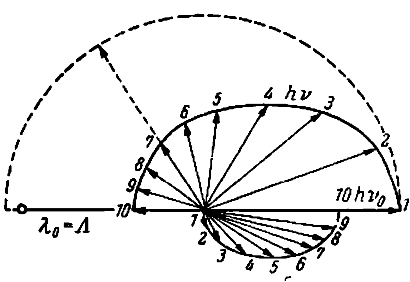


Abb. 173. Polardiagramm der gestreuten Photonen

In der Abb. 173 ist das Polardiagramm für das Verhältnis der Richtungen und Energien der gestreuten Photonen ($h\nu$) und der Rückstoßelektronen (E) angegeben. Das Diagramm ist für den Fall $\lambda_0 = \Lambda$, d. h. für harte Strahlen, gezeichnet; die Energie des Rückstoßelektrons stellt einen merklichen Anteil der Energie des primären Photons ($h\nu_0$) dar. Wie aus dem Diagramm ersichtlich, müssen die Rückstoßelektronen vorzugsweise nach vorn, in Richtung des Primärphotons herausgeworfen werden.

Die Vorhersage Comptons über das Auftreten von Rückstoßelektronen bei der Streuung von Röntgen- und γ-Strahlen wurde unmittelbar durch Versuche in der Wilson-Kammer bestätigt. Auf den Photographien der Abb. 174, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Luft aufgenommen wurden, kann neben den langen Flugbahnen der Photoelektronen eine große Zahl kurzer

bemerkt werden, die sich von der Strahlenbahn abzwei
ımung mit dem Diagramm der Abb. 173 vorzugsweise
ıd. Dies sind die Bahnspuren der Rückstoßelektronen.

r Übertragung der Geschwindigkeit auf die Rückstoßelektro
wird, ist zu beachten, daß mit ihrem Auftreten eine
nden Röntgen- oder γ-Strahlen verbunden ist. Bezeichn
n dieser Absorption mit σ und den Koeffizienten der ge
toelektrischen" Absorption mit τ, dann ist zu erw

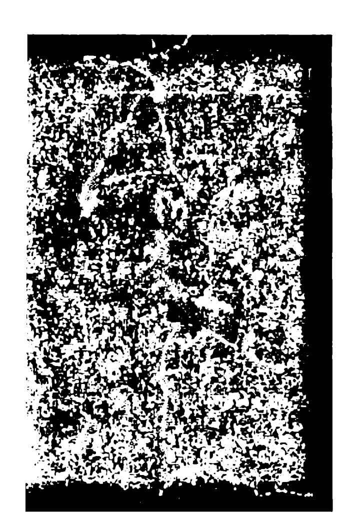
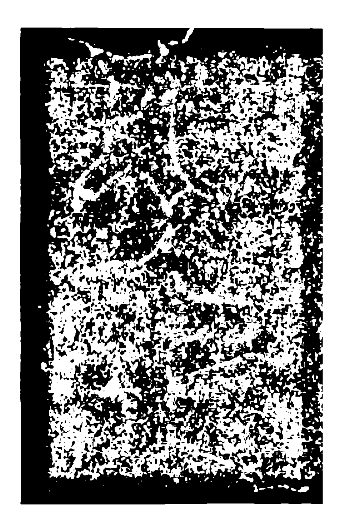



Abb. 174. Spuren von Rückstoßelektronen in der WILSON-Kammer

ər Zahl der kurzen Flugbahnen der Rückstoßelektronen
langen Bahnen der Photoelektronen N_p die Beziehung

$$\frac{N_r}{N_p} = \frac{\sigma}{\tau}$$

ıuch zeigt, daß der Absorptionskoeffizient τ bei Verklei
ə proportional λ^3 abnimmt, während sich σ mit der Wellen
s Verhältnis N_r/N_p wird also bei Verkleinerung von λ
ie Tabelle XV zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Hi
sorption der harten γ-Strahlen fast ausschließlich auf die
oßelektronen, nicht aber direkt auf den Photoeffekt zurückz

dlichsten Experimente mit Rückstoßelektronen wurden v
Physiker D. W. Skobelzyn durchgeführt. Zur Bestin
rgien dieser Elektronen arbeitete Skobelzyn eine besor
əthode aus, die später eine überaus wichtige Rolle bei de
len Teilchen der kosmischen Strahlen spielte (siehe
III). Diese Methode besteht darin, daß die Wilson-Kan

starkes Magnetfeld gebracht und die Energie der Elektronen aus den Krümmungsradien der WILSON-Bahnen bestimmt wird. Eine der Aufnahmen SKOBELZYNS

Tabelle XV

Wellenlänge (in Å)	$\frac{N_r}{N_p}$	$\frac{\sigma}{\tau}$
0,71	0,10	0,27
0,44	0,9	1,2
0,29	2,7	3,8
0,20	9	10
0,17	17	17
0,13	72	32

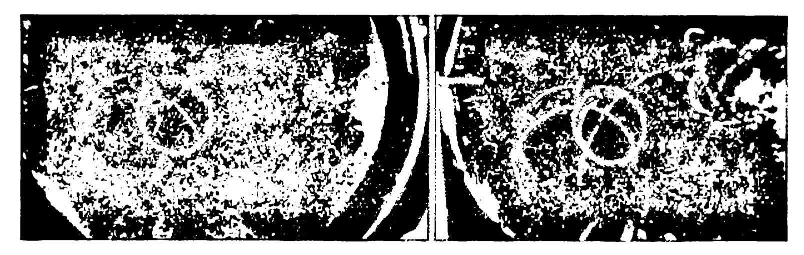


Abb. 175. Bahnen von Rückstoßelektronen im Magnetfeld

ist in Abb. 175 wiedergegeben (Streuung von RaC γ-Strahlen). Mit Hilfe dieser Methode gelang es ihm, eine Reihe wichtiger, mit der Absorption von γ-Strahlen verbundener Fragen zu lösen (siehe Bd. II, Abschnitt XIX).

§ 120. Die Elementarakte der Streuung und die Erhaltungsgesetze

In § 114 sahen wir, daß der Versuch mit dem elementaren Photoeffekt an einem Wismutkügelchen am einfachsten erklärt wird, wenn wir annehmen, daß die Energie der Röntgenstrahlen sich nicht in Form sphärischer Wellen ausbreitet, sondern in Form von Photonen statistisch verteilt ist. Der mittlere Zeitraum zwischen zwei Elementarakten des Photoeffektes entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eins der Photonen, die regellos aus der Antikathode „herausgeschossen" werden, in das von dem Wismutkügelchen dargestellte „Ziel" fallen. Der in den vorigen Paragraphen betrachtete Photoeffekt zeigt das in noch größerer Klarheit.

Tatsächlich erlaubt das grobe Modell der zusammenstoßenden Kugeln eine einfache Erklärung aller wesentlichen Züge dieser Erscheinung. Wir können auch eine dieser „Billardkugeln", das Rückstoßelektron nämlich, beobachten. Es bewegt sich nach der Streuung so, als wenn es zuvor – nach einem Ausdruck COMPTONS – von dem „Photon gestoßen" worden sei.

Versuchten wir eine Erklärung dieser Erscheinung vom rein klassischen Gesichtspunkt und betrachteten die Röntgenstrahlen als sphärische Wellen und das

Elektron als gewöhnliches Teilchen (als Kugel), so müßten wir hierbei schwerwiegende Einschränkungen machen: wir müßten uns von der Anwendbarkeit der Erhaltungssätze der Energie und des Impulses auf die Elementarakte der Streuung lossagen. Dies ergibt sich aus den folgenden Überlegungen: die sphärische Welle wirkt gleichmäßig auf alle Elektronen und bringt sie dazu, erzwungene Schwingungen auszuführen; durch den kleinen Elektronenquerschnitt sind die auf jedes Elektron entfallenden Anteile von Energie und Impuls überaus klein. Indessen treten bei der COMPTON-Streuung Rückstoßelektronen auf, von welchen ein jedes einen merklichen Anteil an Energie und Impuls der Primärwelle besitzt. Um zu begreifen, woher sie diese Energie und diesen Impuls erhalten, müssen wir eine ständige Anhäufung von Energie im Verlaufe eines längeren Zeitraumes zulassen. Dies kann aber wieder nicht damit übereinstimmen, daß der COMPTON-Effekt sowohl bei schwach gebundenen Elektronen, die Energie anhäufen können, als auch bei freien Elektronen (in Metallen beispielsweise) auftritt.

Zur Rettung der Wellenvorstellung versuchten BOHR und KRAMERS im Jahre 1923 eine Theorie aufzubauen, nach der die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses bei der Streuung nur statistisch, d. h. nur auf große Zeiträume, anzuwenden sind, nicht aber auf den Elementarakt. Nach dieser Theorie muß die Streuung ständig stattfinden, die Rückstoßelektronen werden jedoch vollkommen zufällig ausgelöst. Diese beiden Prozesse, die Streuung der Wellen und die Ausstoßung von Rückstoßelektronen, sind unter sich nicht koordiniert. Diese Theorie, die auf diese so schwer erarbeiteten Grundgesetze der Natur verzichtet, ist schon vom logischen Gesichtspunkt aus nicht anwendbar. Wie auch zu erwarten war, wurde ihre Schwäche sehr bald experimentell nachgewiesen.

Die Versuche, welche die Gültigkeit der Erhaltungsgesetze von Energie und Impuls bei den Elementarakten der Streuung von Röntgenstrahlen festlegen, sind auf folgende Überlegungen begründet: nach der „Theorie des Billardspieles", die die Anwendung der Erhaltungssätze fordert, müssen beide Prozesse miteinander verbunden sein und auf jeden Fall gleichzeitig stattfinden. Nach der statistischen Theorie von BOHR und KRAMERS waren beide Prozesse vollkommen unabhängig voneinander.

Zur Prüfung der einen wie der anderen Theorie mußten entsprechende Versuche durchgeführt werden. Wenn die Erhaltungsgesetze auf die Elementarakte der Streuung anwendbar sind, dann müssen notwendig eine Reihe von Folgerungen erfüllt werden. Beispielsweise muß im Gegensatz zur Forderung der statistischen Theorie jedem Rückstoßelektron ein gleichzeitig mit ihm gestreutes Photon (Photoelektron in unserem Modell) entsprechen. Außerdem muß zwischen den Bahnwinkeln des Elektrons und des Photons nach der Streuung eine bestimmte Beziehung bestehen. Diese Beziehung wird durch das Polardiagramm der Abb. 173 illustriert; sie kann durch direkte Berechnung erhalten werden, wenn die Erhaltungssätze [die Formeln (118,2) und (118,4)] benutzt werden und die Vektorgleichung (118,4) durch die beiden skalaren Komponentengleichungen ersetzt wird. Die Beziehung erhält die Form

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{1+\alpha}\operatorname{tg}\psi, \qquad (120,1)$$

mit $\alpha = \frac{\Lambda}{\lambda}$; die Winkel sind aus Abb. 172 zu entnehmen.

Diese Versuche wurden im Jahre 1925 von BOTHE und GEIGER einerseits und von COMPTON und SIMON andererseits durchgeführt. Diese Versuche zeigten, daß die statistische Theorie von der Nichtanwendbarkeit der Erhaltungssätze auf die Elementarakte der Streuung nicht gültig ist. Außerdem dienten sie als ausgezeichnetes Beispiel für die Zweckmäßigkeit der Korpuskelvorstellung bei der Erklärung einiger Eigenschaften des Lichtes. Später, in den Jahren 1936/37, wurden die Versuche mit einer verbesserten Technik und in verschiedenen Formen wiederholt, z. B. zur Prüfung der Versuche von SHANKLAND, der mit γ-Strahlen Resultate erhalten hatte, die die statistische Theorie zu bestätigen schienen. In diesen neuen Versuchen wurde wieder mit guter Genauigkeit und eindeutig die Anwendbarkeit der Erhaltungssätze auf die Elementarakte der Streuung von Röntgenstrahlen und γ-Strahlen bestätigt.

§ 121. Die experimentelle Bestätigung der Anwendbarkeit der Erhaltungssätze auf die Elementarakte der Streuung

Der Versuch von BOTHE und GEIGER wurde zum Nachweis des gleichzeitigen Auftretens von Rückstoßelektron und gestreutem Photon durchgeführt. Ein dichtes Bündel von Röntgenstrahlen (Abb. 176) durchlief eine Wasserstoffatmosphäre zwischen zwei GEIGER-Zählern. Wasserstoff wurde gewählt, weil dieser die Röntgenstrahlen schwach absorbiert, sie aber genügend stark streut. Der eine der Zähler (in Abb. 176 der linke) war mit einer Platinfolie verschlossen und mit Luft gefüllt, der andere offen und somit mit Wasserstoff gefüllt. Unter diesen Bedingungen reagierte der linke Zähler nicht auf die Rückstoßelektronen, da sie von der Platinfolie absorbiert wurden, er reagierte aber auf die durch die Folie hindurchgehenden Photonen, die aus der Luft, den Wänden des Zählers oder der Folie selbst Photoelektronen auslösen konnten. Der rechte Zähler reagierte auf Photonen fast gar nicht, da sie nur wenig von Wasserstoff absorbiert werden, jedoch sehr stark auf Rückstoßelektronen. Nicht jedes Photon, das in den linken Zähler einfällt, läßt diesen ansprechen, so daß nicht jedem Ausschlag des mit dem rechten Zähler verbundenen Elektrometers ein Elektrometerausschlag des linken Zählers entsprechen wird. Findet aber eine Übereinstimmung wirklich statt, dann muß umgekehrt jedem Ausschlag des Quantenzählers ein Ausschlag des Elektronenzählers entsprechen. In der Praxis traf dies nicht ganz genau ein; die Anzahl der Übereinstimmungen (Koinzidenzen) war jedoch so groß, daß nach der statistischen Berechnung BOTHE und GEIGER 150000 gegen 1 dafür ansetzen konnten, daß diese Koinzidenzen nicht zufällig, sondern durch die Gleichzeitigkeit der Streuung und des Auftretens von Rückstoßelektronen bedingt sind.

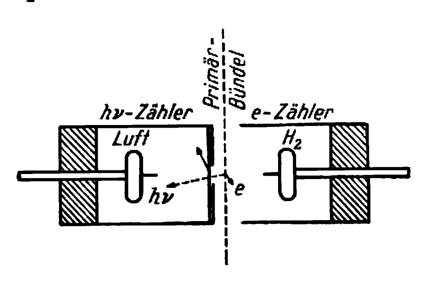


Abb. 176. Versuchsanordnung nach BOTHE und GEIGER

Der Versuch von COMPTON und SIMON und seine von KREIN, GÄRTNER und TURIN vervollkommneteren Wiederholungen wurden mit der WILSON-Kammer durch-

geführt, um zu prüfen, ob die von den Erhaltungsgesetzen geforderte Beziehung zwischen den Winkeln der Flugbahnen des Rückstoßelektrons und des gestreuten Photons besteht [siehe das Diagramm Abb. 173 und die Formel (120,1)]. Um die Idee dieses Versuches zu verstehen, betrachten wir nochmals die Abb. 173.

Fliegt beispielsweise bei einer Streuung das Rückstoßelektron in Richtung des unteren Pfeiles 5, dann muß nach den Erhaltungsgesetzen das gestreute Photon in Richtung des oberen Pfeiles 5 fliegen. Die Winkel zwischen dem unteren und dem oberen Pfeil 5 und dem Pfeil 1 befriedigen die Beziehung (120,1). Die Richtung des unteren Pfeiles ist im Versuch leicht festzustellen, da jedes Rückstoßelektron in der Wilson-Kammer eine sichtbare Spur hervorruft. Das Photon selbst ionisiert aber die Luft nicht; daher kann die Richtung des entsprechenden oberen Pfeiles in der Wilson-Kammer nicht unmittelbar festgestellt werden. Auf indirekte Weise wird dies folgendermaßen durchgeführt: wird das gestreute Photon

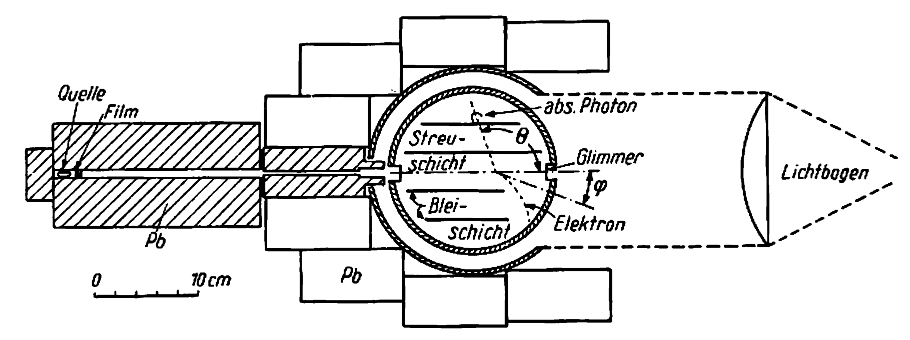


Abb. 177. Versuchsanordnung nach COMPTON und SIMON

irgendwo im Innern der Kammer absorbiert, dann entsteht die lange Spur eines Photoelektrons. Verbinden wir nun den Anfang dieser langen Spur mit dem Anfang der kurzen Spur des Rückstoßelektrons, so können wir beide Richtungen festlegen. Die Ungenauigkeit, die hierbei auftritt, beruht darauf, daß von dem festgestellten Photon nicht mit Gewißheit behauptet werden kann, daß es dasjenige sei, welches gerade das von uns fixierte Rückstoßelektron bei der Streuung hervorgerufen hat. Deshalb können die Schlüsse aus diesem Versuch nur mit Hilfe eines genügend großen statistischen Materials gezogen werden.

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 177 dargestellt.

Der Versuch wurde nicht mit Röntgenstrahlen, sondern mit harten γ-Strahlen durchgeführt, um die Energie der Rückstoßelektronen zu vergrößern und die Versuchsgenauigkeit zu erhöhen. Die γ-Strahlenquelle liegt an dem einen Ende des von dicken Bleiblöcken umgebenen Kanals; das parallele Bündel filtrierter γ-Strahlen, das aus dem Kanal austritt, fällt in die Wilson-Kammer. Als Streukörper dient ein Stück Zelluloid, das sich im Zentrum der Kammer befindet. Um die Wahrscheinlichkeit der Absorption eines gestreuten Photons im Innern der Kammer zu erhöhen, sind zu beiden Seiten des streuenden Körpers je zwei Bleischeiben angeordnet. Die Kammer wird in ein Magnetfeld gesetzt, das zur Zeichenebene senkrecht gerichtet ist. Dies gibt die Möglichkeit, nicht nur die Richtung der Flugbahn des Rückstoßelektrons zu finden, sondern auch aus der

Bahnkrümmung die Energie dieses Elektrons zu bestimmen (Methode von Skobelzyn, siehe § 119). Eine solche Versuchsanordnung hat den Vorzug, daß aus dem Winkel der Flugbahn des Rückstoßelektrons und seiner Energie mit Hilfe der Theorie von Compton ohne die geringsten Voraussetzungen über die Energie des einfallenden Photons der entsprechende Bahnwinkel des gestreuten Photons gefunden werden kann. Dieser Vorzug ist wesentlich, weil trotz der Filterung die primären γ-Strahlen heterogen sind und folglich auch nicht ganz exakt dem einfallenden Photon eine bestimmte Energie zugeschrieben werden

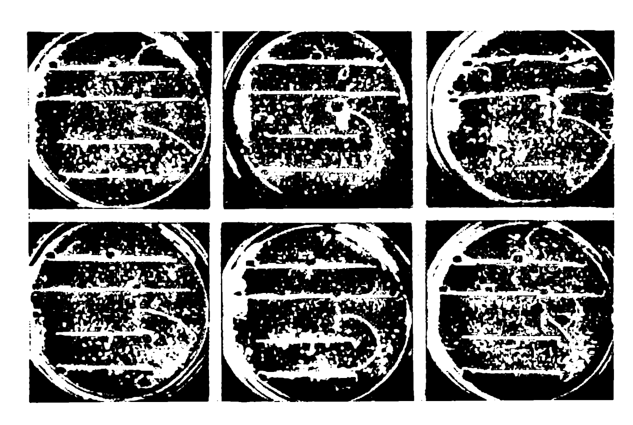


Abb. 178

kann. In der Abb. 178 sind als Beispiel drei Aufnahmen wiedergegeben, auf welchen das Rückstoßelektron (in der Mitte der Kammer) und der Ort der Absorption des gestreuten Photons (an der obersten Bleiplatte) sichtbar sind. Bei der Auswertung der Photographien wurde aus dem Flugwinkel des Rückstoßelektrons und seiner Energie der Flugwinkel des gestreuten Photons berechnet und das Ergebnis der Rechnung mit dem aus der Photographie gefundenen Winkel verglichen. Im ganzen wurden ungefähr 10000 Photographien aufgenommen, auf welchen 300 Kombinationen Elektron-Photon gefunden wurden. Das Ergebnis der Auswertung zeigte, daß in einer großen Anzahl von Fällen der beobachtete Flugwinkel des gestreuten Photons mit dem berechneten übereinstimmt.

Aus diesem Grund kann heute kein Zweifel darüber bestehen, daß die Erhaltungsgesetze der Energie und des Impulses bei den Elementarakten der Streuung erfüllt sind.

X. WELLE UND TEILCHEN

§ 122. Einführung

In dem vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß bei optischen Erscheinungen (einschließlich des Gebietes der Röntgenstrahlen) ein eigentümlicher Dualismus beobachtet wird. Neben solchen Eigenschaften des Lichtes, die direkt seine Wellennatur bezeugen (Interferenz, Beugung), gibt es andere Eigenschaften, die ebenso unmittelbar seine korpuskulare Natur erweisen (Photoeffekt, Compton-Effekt). Obwohl wir uns schlecht einen Begriff davon machen können, daß ein und dasselbe Objekt gleichzeitig sowohl Teilchen als Welle ist, müssen wir trotzdem zur Erklärung einer ganzen Reihe von optischen Erscheinungen sowohl das eine als das andere Bild benutzen.

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß dieser im höchsten Grade verwunderliche Dualismus auch für solche Objekte gilt, die wir gewöhnlich als „Teilchen" bezeichnen, also für Elektronen, Protonen, Atome. Es gibt eine große Zahl allgemein bekannter Versuche, die zeigen, daß sich diese elementaren Bestandteile der Materie wie örtlich lokalisierte Teilchen benehmen. Wenn wir die Nebelspuren auf Wilsonschen Photographien betrachten, so entsteht keinerlei Zweifel darüber, daß dies Spuren der Flugbahnen von Teilchen sind. Und gerade in diesem Abschnitt werden wir sehen, daß andere Versuche existieren, bei denen sich dieselben „Teilchen" wie interferenzfähige Wellen verhalten.

In dem vorigen Abschnitt hoben wir besonders die Erscheinungen hervor, bei welchen die korpuskulare Natur des Lichtes beobachtet wurde. Den vorliegenden Abschnitt beginnen wir mit einer ausführlichen Betrachtung der *Dualität* des Lichtes mit jener bemerkenswerten Folgerung, zu der uns letzten Endes die Betrachtung des statistischen Charakters des Lichtfeldes führte (§ 109).

Da jedoch weiterhin eine ganze Reihe von Kenntnissen aus der Theorie der Wellenbewegung notwendig sein wird, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung.

§ 123. Die ebene monochromatische Welle im homogenen Medium

Wenn wir von Wellen sprechen, dann stellen wir uns meist Wellen an der Oberfläche des Wassers vor oder Transversalwellen, die mittels einer elastischen Schnur bei periodischer Bewegung eines ihrer Enden erzeugt werden. Wie auch immer die Natur der Wellen sei, ihre Ausbreitung folgt gleichen Gesetzen.

Zu Anfang betrachten wir die einfachste Form der Wellen, die ebenen monochromatischen oder harmonischen Wellen, und wählen als Ausbreitungsrichtung der Wellen die x-Achse des Koordinatensystems. Solche Wellen werden durch die Formel

$$u = a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right] \tag{123,1}$$

dargestellt. Hier sind a, ω, c', δ Konstanten, deren Sinn sofort festgelegt wird, und u die Größe der sich wellenartig ausbreitenden Bewegung, beispielsweise die Ablenkung des Teilchens aus der Gleichgewichtslage in einer elastischen Welle, irgendeine Kraftkomponente im elektrischen oder magnetischen Feld usw. Die Konstante a ist die Amplitude der Welle, $\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta$ nennen wir die Phase der Welle, und die Konstante δ, die in die Phase eingeht, ist die Anfangsphase. Die Fläche, in deren Punkten die Phase ein und denselben Wert besitzt, ist eine Fläche gleicher Phase. In dem betrachteten Fall, in dem die Phase linear von der x-Koordinate abhängt, wird die Ebene x = const, deren Normale mit der x-Achse übereinstimmt, eine solche Fläche sein.

Die in die Phase eingehende Konstante c' hat folgenden Sinn. Wir wählen irgendeinen bestimmten Wert der Phase und sehen, unter welchen Bedingungen deren Größe bei Änderung von x und t beibehalten wird. Offensichtlich ist für die Konstanz der Phase $t-\frac{x}{c'}$ = const, notwendig und hinreichend, woraus dann

$$x = c't + \text{const}$$

folgt.

Hieraus ist ersichtlich, daß c' die Wanderungsgeschwindigkeit der Ebene gleicher Phase ist oder die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Da nun x und t in das Argument der periodischen Funktion eingehen, muß die Welle eine Periodizität in Zeit und Raum zeigen. Wegen der Periodizität in der Zeit muß es einen konstanten Zeitraum T geben, der die Bedingung

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right] = \cos\left[\omega\left(t+T-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right]$$

befriedigt. Dies kann nur in dem Fall $\omega T = 2\pi$ oder $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sein. T heißt die Periode der Welle, ω ist die Kreis- oder zyklische Frequenz; $\frac{1}{T}$ ist die lineare Frequenz ν, so daß $\omega = 2\pi\nu$.

Wegen der Periodizität im Raum muß sich bei gegebenem t ein und derselbe Wert von u bei einer Änderung von x um einen Abschnitt λ (Wellenlänge) wiederholen, d. h., es muß

$$\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c'}\right)+\delta\right] = \cos\left[\omega\left(t-\frac{x+\lambda}{c'}\right)+\delta\right]$$

bestehen. Dies bedeutet, $\frac{\omega\lambda}{c'} = 2\pi$ oder $\lambda = \frac{2\pi c'}{\omega} = \frac{c'}{\nu}$ oder endlich

$$c' = \lambda\nu. \tag{123,2}$$

Die letzte Beziehung verknüpft die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenlänge.

Eine ebene Welle möge sich in einer mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildenden Richtung ausbreiten. Wir wählen die Koordinatenachsen derart

daß die x-Achse wie früher mit der Normalen der Ebene gleicher Phase zusammenfällt. Dann hat in diesem neuen Koordinatensystem die ebene Welle die Form

$$u = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x'}{c'}\right) + \delta\right].$$

Da nach den Formeln der Koordinatentransformation aus der Drehung der Achsen

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

folgt, so erhalten wir

$$u = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{c'}\right) + \delta\right]. \qquad (123,3)$$

Die Gleichung der Ebene gleicher Phase wird dann

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \text{const.}$$

Benutzen wir an Stelle der Kreisfrequenz ω die lineare Frequenz ν, dann können wir die Wellenformel in der Form

$$u = a\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{c'}\right) + \delta\right]$$
$$= a\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\lambda}\right) + \delta\right]$$

schreiben.

Wir führen jetzt den Vektor $\mathfrak{k}$ ein, dessen Richtung mit der positiven Normalen zur Ebene gleicher Phase übereinstimmt; seine absolute Größe ist gleich

$$|\mathfrak{k}| = \frac{1}{\lambda}. \qquad (123,4)$$

Die Komponenten dieses Vektors, den wir den Wellenvektor oder den Vektor der Wellenausbreitung nennen, lauten

$$k_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \quad k_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}, \quad k_z = \frac{\cos\gamma}{\lambda}.$$

In diesem Falle ist

$$\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\lambda} = xk_x + yk_y + zk_z = \mathfrak{k}\mathfrak{r}, \qquad (123,5)$$

wobei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor ist, der nach einem willkürlichen Punkt der Ebene gleicher Phase gezogen wird. Mit Hilfe von (123,5) nimmt die Formel für die ebene Welle den folgenden kurzen Ausdruck an:

$$u = a\cos\left[2\pi\left(\nu t - \mathfrak{k}\mathfrak{r}\right) + \delta\right]. \qquad (123,6)$$

Wir bemerken schließlich noch, daß ebenso wie die Schwingungsformel (§ 45) auch die Formel der ebenen Welle in komplexer Form geschrieben werden kann:

$$u = a e^{i[2\pi(\nu t - \mathfrak{k}\mathfrak{r}) + \delta]} \qquad (123,7)$$

oder, wenn wir die komplexe Amplitude $A = ae^{i\delta}$ einführen,

$$u = A e^{i2\pi(\nu t - \mathfrak{k}\mathfrak{r})}. \qquad (123,8)$$

Hier wird nur der Realteil der komplexen Zahl (123,7) oder (123,8) benutzt.

§ 124. Die Wellengleichung

Die in dem vorigen Paragraphen betrachtete Formel der ebenen Welle erscheint als partikulare Lösung einer Differentialgleichung, der sogenannten Wellengleichung. So kann beispielsweise aus den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Vakuum – den MAXWELLschen Gleichungen – für eine beliebige Kraftkomponente des elektrischen oder magnetischen Feldes die folgende Gleichung zweiter Ordnung in partiellen Ableitungen erhalten werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (124,1)$$

worin u eine beliebige Kraftkomponente des elektrischen oder magnetischen Feldes ist. Wie in den Büchern über Elektrodynamik gezeigt wird, beschreibt die Gleichung (124,1) elektromagnetische Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c im Vakuum ausbreiten.[1])

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Formel für die ebene Welle

$$u = Ae^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} = Ae^{i2\pi(xk_x + yk_y + zk_z - \nu t)} \qquad (124,2)$$

die Gleichung (124,1) befriedigt. Differenzieren wir (124,2) zweimal nach allen Koordinaten und nach der Zeit, dann finden wir

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -4\pi^2 k_x^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -4\pi^2 k_y^2 u,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -4\pi^2 k_z^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -4\pi^2 \nu^2 u.\end{aligned}\right\}$$

Setzen wir diese Ableitungen in (124,1) ein, dann erhalten wir nach Kürzung

$$\frac{\nu^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \qquad (124,3)$$

Diese wichtige Beziehung, die die Frequenz ν mit den Komponenten des Wellenvektors verbindet, ist für die Natur der Welle charakteristisch; sie wird auch das Dispersionsgesetz genannt.

Die Summe der zweiten Ableitungen nach den Koordinaten (124,1) können wir auch so darstellen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

worin Δ der sogenannte LAPLACEsche Operator ist. Schreiben wir die Wellengleichung in der Form

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \qquad (124,4)$$

so erhalten wir nicht nur eine gedrängte Schreibweise, sondern auch eine wesentliche Verallgemeinerung, da der LAPLACEsche Operator in jedem beliebigen Koordinatensystem ausgedrückt werden kann. In dem speziellen Fall der rechtwinkligen, kartesischen Koordinaten hat er die Gestalt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (124,5)$$

---

[1]) Siehe R. BECKER, „Theorie der Elektrizität", Verlag Teubner, Leipzig 1949.

In anderen Koordinatensystemen hat der Operator Δ eine andere Form. Für uns ist noch der Ausdruck des Operators Δ in sphärischen Polarkoordinaten wichtig:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (124,6)$$

Der Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten kann durch den üblichen Austausch der Variablen nach den Regeln der Differentialrechnung durchgeführt werden. Jedoch erweist sich die Rechnung beim Übergang zu räumlichen Koordinaten r, δ und φ als so umfangreich und ermüdend, daß es nicht ratsam ist, diesen Weg zu gehen. In den Büchern über Vektoranalysis wird eine einfache und elegante Methode des Überganges zu beliebigen krummlinigen, orthogonalen Koordinaten angegeben, die auch zur Ableitung der Formel (124,6) benutzt wurde. Diese Methode darzulegen, ist hier nicht der Platz, und wir beschränken uns, die fertige Formel (124,6) anzugeben. Die Wellengleichung erscheint als lineare homogene Differentialgleichung. Wie jede lineare homogene Differentialgleichung besitzt sie die folgende wichtige Eigenschaft. Nehmen wir an, daß wir die partielle Lösung u_1 von (124,1) gefunden haben, dann ist auch c_1u_1 mit c_1 als willkürlicher Konstante eine Lösung von (124,1). Sind uns die partiellen Lösungen u_1 und u_2 bekannt, so ist

$$u = c_1u_1 + c_2u_2,$$

wo c_1 und c_2 willkürliche Konstanten sind, ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung (124,1). Hierin ist die mathematische Begründung des bekannten Prinzips der Zusammenfassung oder Superposition von Wellenbewegungen eingeschlossen, welche es gestattet, mit Hilfe der Superposition ebener Wellen beliebige Wellenfelder aufzubauen. Wir werden dieses Prinzip in den nächsten Paragraphen benutzen.

§ 125. Die Superposition ebener Wellen

Die in dem vorigen Paragraphen betrachteten ebenen monochromatischen Wellen existieren in der Natur nirgends. Der Definition gemäß stellen diese Wellen einen streng periodischen Vorgang dar und müßten daher eine unendliche Ausdehnung in Zeit und Raum haben. Die wirklichen „Lichtsignale" sind jedoch stets im Raum begrenzt und werden nur im Verlaufe eines begrenzten Zeitintervalles ausgesandt, so daß sie nicht als streng harmonisch erscheinen (siehe § 68). Deshalb können wir sie als Resultat einer Superposition streng harmonischer ebener Wellen betrachten, die in einem Teil des Raumes wegen der Interferenz einander verstärken, sich aber in dem übrigen Teil des Raumes auslöschen. Solche zusammengesetzten Wellen haben einige wichtige Besonderheiten, die wir zunächst an einem Beispiel der Superposition zweier ebener harmonischer Wellen klären werden.

Nehmen wir an, daß sich beide Wellen längs der x-Achse ausbreiten und daß sich ihre Frequenzen ν_0 und ν und auch die absoluten Werte ihres Wellenvektors k_0 und k $\left(k_0 = \frac{1}{\lambda_0}, k = \frac{1}{\lambda}\right)$ nur sehr wenig voneinander unterscheiden, so daß $k_0 - k = \Delta k \to 0$, $\nu_0 - \nu = \Delta\nu \to 0$.

Haben wir somit

$$u_1 = a\cos 2\pi\,(\nu_0 t - k_0 x)\;,$$
$$u_2 = a\cos 2\pi\,(\nu t - k x)\,,$$

dann ergibt die Addition von u_1 und u_2 die zusammengesetzte Welle u:

$$u = u_1 + u_2 = a\cos 2\pi\,(\nu_0 t - k_0 x) + a\cos 2\pi\,(\nu t - k x)$$
$$= 2\,a\cos 2\pi\left(\frac{\nu_0 - \nu}{2}\,t - \frac{k_0 - k}{2}\,x\right)\cos 2\pi\left(\frac{\nu_0 + \nu}{2}\,t - \frac{k_0 + k}{2}\,x\right),$$

oder wegen des geringen Unterschiedes von ν_0 und ν, k_0 und k, angenähert

$$u = 2\,a\cos 2\pi\left(\frac{\Delta\nu}{2}\,t - \frac{\Delta k}{2}\,x\right)\cos 2\pi\,(\nu_0 t - k_0 x)\,. \qquad (125{,}1)$$

Das erhaltene Resultat kann auf folgende Weise gedeutet werden. Der zweite Faktor der Formel (125,1), $\cos 2\pi\,(\nu_0 t - k_0 x)$, stellt die Phase der Welle mit der Frequenz ν_0 und der Wellenzahl k_0 dar, und der erste Faktor,

$$2\,a\cos 2\pi\left(\frac{\Delta\nu}{2}\,t - \frac{\Delta k}{2}\,x\right),$$

gibt die langsam ($\Delta\nu \to 0$, $\Delta k \to 0$) und hierbei sich periodisch ändernde Amplitude an. Mit anderen Worten können wir sagen, daß die Welle u (125,1) als eine Welle mit der Frequenz ν_0 und der Wellenzahl k_0, aber mit *modulierter Amplitude* zu betrachten ist. Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß die von der Formel (125,1)

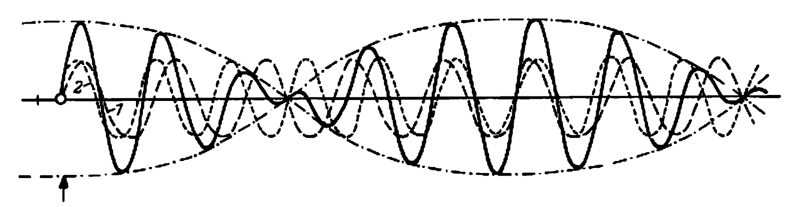


Abb. 179. Bildung von Wellengruppen

dargestellte Welle strenggenommen nicht mehr harmonisch ist: eine harmonische Welle muß von $-\infty$ bis $+\infty$ reichen, ein und dieselbe Amplitude und eine ganz bestimmte Frequenz besitzen. Die Welle (125,1) hat indessen eine sich periodisch ändernde Amplitude, und ein empfindliches Spektralgerät wird bei ihr nicht eine Frequenz, sondern die beiden Frequenzen ν_0 und ν enthüllen.

Dieses Resultat wird in der Abb. 179 veranschaulicht, in der zwei Teilstücke harmonischer Wellen mit den sich wenig unterscheidenden Wellenlängen λ_0 und λ und die als Ergebnis ihrer Superposition entstehende Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt dargestellt sind. Wie ersichtlich, zerfällt diese zusammengesetzte Welle in eine Reihe von Wellengruppen mit Amplituden, die sich nach dem Kosinusgesetz verändern.

Wir suchen jetzt die Verschiebungsgeschwindigkeit einer bestimmten Phase und die Verschiebungsgeschwindigkeit einer bestimmten Amplitude. Die letztere stimmt offensichtlich mit der Änderungsgeschwindigkeit jeder Gruppe als Ganzes überein und heißt deshalb die *Gruppengeschwindigkeit*. Zur Bestimmung

der Phasengeschwindigkeit wählen wir irgendeinen Wert der Phase und setzen $\nu_0 t - k_0 x = \text{const}$; daraus ergibt sich $\dot{x}$. Wir erhalten

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\nu_0}{k_0} = \nu_0 \lambda_0 , \qquad (125,2)$$

die bereits bekannte Formel für die Phasengeschwindigkeit. Zur Auffindung der Geschwindigkeit der Gruppenverschiebung, d. h. der Verschiebungsgeschwindigkeit einer bestimmten Amplitude, gehen wir den folgenden Weg: wir wählen einen konstanten Wert für die Amplitude aus, so daß

$$\frac{\Delta\nu}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \text{const},$$

und finden für $\dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\nu}{\Delta k} .$$

An der Grenze für $\Delta k \to 0$ wird

$$g = \frac{d\nu}{dk} . \qquad (125,3)$$

Wir sehen, daß beide Geschwindigkeiten, die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit, durch verschiedene Formeln ausgedrückt werden. Einen Vergleich dieser Formeln und die daraus zu ziehenden Folgerungen verschieben wir jedoch bis zum § 127.

§ 126. Das Wellenpaket

Wir werden jetzt zeigen, daß durch Superposition ebener Wellen ein Wellenvorgang verwirklicht werden kann, bei dem die Amplitude nur in einem kleinen Raumabschnitt von null verschieden, in dem übrigen Raum aber gleich null ist. Wir werden wieder zur Vereinfachung lineare Vorgänge oder, genauer, ebene Wellen betrachten, die nur von einer räumlichen Koordinate x und von der Zeit abhängen.

Zur Bildung eines Wellenvorganges, der im Raum eine begrenzte Ausdehnung besitzt, genügt die Zusammenfassung zweier ebener Wellen noch nicht. Es zeigt sich jedoch, daß man einen solchen Prozeß durch Zusammenfassung von Wellen in den Grenzen irgendeines Intervalles $2\Delta k$ mit sich stetig änderndem k verwirklichen kann, wobei wir die Größe des Intervalles nachfolgend festlegen werden. Wir wählen für das Intervall $2\Delta k$ irgendeinen Mittelpunkt k_0 aus und zeigen, daß unter bestimmten Bedingungen als Ergebnis einer Superposition, die jetzt infolge der stetigen Änderung von k nicht durch eine Summe, sondern durch das Integral

$$u = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) \cos 2\pi \left[\nu(k)\, t - kx\right] dk \qquad (126,1)$$

dargestellt werden muß, ein begrenzter ebener Wellenvorgang, d. h. ein Wellenpaket, erhalten werden kann.

Was die Amplitude $a(k)$ der zu überlagernden harmonischen Wellen betrifft, kommen wir überein, sie in dem gesamten Intervall $\pm\Delta k$ als konstant anzusehen und gleich $a(k_0)$ zu setzen. Die Abhängigkeit der Frequenz ν von k wird durch das Dispersionsgesetz der uns interessierenden Wellen gegeben (siehe § 124). Wie auch

immer dieses Gesetz lauten möge, wir können es stets für ein kleines Intervall Δk als $\nu(k)$ in Form einer Reihe darstellen:

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0)\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_{k=k_0} + \frac{1}{2}(k - k_0)^2\left(\frac{d^2\nu}{dk^2}\right)_{k=k_0} + \cdots. \quad (126,2)$$

Berechnen wir jetzt das Integral (126,1) näherungsweise unter der Annahme, daß das Intervall $k - k_0$ klein genug ist, um in (126,2) alle mit dem dritten Glied beginnenden Glieder vernachlässigen zu können, und sich für $\nu(k)$ der lineare Ausdruck

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0)\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_{k=k_0}$$

ergibt.

Setzen wir diesen Ausdruck für $\nu(k)$ in (126,1) ein, dann erhalten wir

$$u = a(k_0)\int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}\cos 2\pi\left[\nu(k_0)\,t + (k - k_0)\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t - kx\right]dk.$$

Dieses Integral ist leicht zu berechnen, und wir erhalten nach Einsetzen der Grenzen und Multiplikation des Zählers und des Nenners mit Δk

$$u = 2\,a(k_0)\,\Delta k\,\frac{\sin 2\pi\Delta k\left[\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t - x\right]}{2\pi\Delta k\left[\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t - x\right]}\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x). \quad (126,3)$$

Dieses Ergebnis können wir vollkommen analog der Formel (125,1) deuten: der Faktor $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ in (126,3) drückt die Phase unseres zusammengesetzten Prozesses aus, und der vor ihm stehende Faktor stellt die veränderliche (modulierte) Amplitude dar. Führen wir die Bezeichnung

$$2\pi\Delta k\left[\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t - x\right] = \xi$$

ein, dann sehen wir, daß der Charakter der Amplitudenänderung durch den Faktor $\frac{\sin\xi}{\xi}$ bestimmt wird. Diesen modulierenden Faktor fanden wir bereits im § 70; bei der Änderung der Amplitude zeigt er den folgenden Verlauf:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \xi \to 0 & \lim \frac{\sin\xi}{\xi} = 1, \\ \text{für } \xi = \pm\pi & \frac{\sin\xi}{\xi} = 0. \end{array}\right\}$$

Bei weiterer Vergrößerung des absoluten Wertes von ξ verläuft die Funktion $\frac{\sin\xi}{\xi}$ über eine Reihe von Maxima und Minima. Jedoch sind ihre Werte im Vergleich zum Hauptmaximum bei $\xi = 0$ nur klein und verschwinden schnell mit Vergrößerung des Argumentes. Auf diese Weise können wir sagen, daß als Ergebnis der Superposition praktisch nur eine Gruppe erhalten wird, deren Amplitude nur in einem begrenzten Gebiet von null verschieden ist, und sich in diesem Gebiet wie $\frac{\sin\xi}{\xi}$ ändert. In der Abb. 180 ist eine Momentaufnahme einer solchen Gruppe, also ihre Gestalt in einem bestimmten Zeitpunkt dargestellt.

Die Formel (126,3) zeigt, daß es wie in dem im vorigen Paragraphen betrachteten Fall der Superposition zweier ebener Wellen auch beim Wellenpaket möglich ist, von zwei Geschwindigkeiten zu sprechen, von der Phasen- und von der Gruppengeschwindigkeit. Wie bereits gesagt wurde, geht die Phase in den Faktor $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ ein; setzen wir die Phase $2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ gleich einer Konstanten und differenzieren, dann finden wir wie in dem vorigen Paragraphen für die Phasengeschwindigkeit

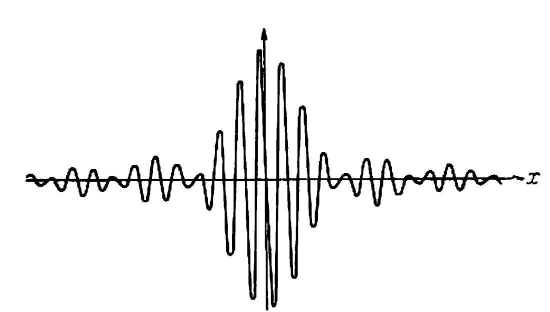


Abb. 180. Wellenpaket

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\nu_0}{k_0}.$$

Der die Amplitude modulierende Faktor $\frac{\sin\xi}{\xi}$ hat für $\xi \to 0$ den konstanten Wert 1. Bei $\xi = 0$ haben wir dann

$$x - \left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t = 0.$$

Dies zeigt, daß die Fläche gleicher Amplituden eine Ebene ist, die sich mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 = g \tag{126,4}$$

fortbewegt.

Wir sehen, daß der Ausdruck für die Verschiebungsgeschwindigkeit der Ebene gleicher Amplituden mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Formel für die Gruppengeschwindigkeit (125,3) übereinstimmt. Dies ist gleichzeitig die Verschiebungsgeschwindigkeit des gesamten Paketes.

Wir müssen jetzt bedenken, daß alle bisher erhaltenen Resultate unter der Vereinfachung erhalten wurden, die wir bei der Formel (126,3) machten, als wir in der Entwicklung von $\nu(k)$ alle Glieder von höherer als 1. Ordnung vernachlässigten, und es ist jetzt zu untersuchen, wie sich diese Vernachlässigung auf das Resultat auswirkt. Ist die zweite Ableitung $\left(\frac{d^2\nu}{dk^2}\right)_0 = 0$ (was beim Fehlen der Dispersion im Medium der Fall ist), so bleiben die Resultate erhalten. Ist jedoch $\frac{d^2\nu}{dx^2} \neq 0$, so wird folgende eigentümliche Eigenschaft des Paketes beobachtet: das Paket behält nicht seine Form bei, sondern deformiert sich im Verlaufe der Zeit, indem es allmählich zerfließt. Ist die Dispersion nur gering, so daß $\frac{d^2\nu}{dk^2}$ angenähert gleich null ist, dann können wir von einer bestimmten Form des Paketes und von seiner Verschiebung als Ganzes mit der Gruppengeschwindigkeit g sprechen.

Wir erhielten auf diese Weise eine vollständige Beschreibung des Wellenvorganges. Wir heben jetzt seine folgende Besonderheit hervor: obwohl in die Formel für das Wellenpaket (126,3) der Phasenfaktor mit bestimmtem ν_0 und k_0 eingeht, *haben wir es in Wirklichkeit mit einem zusammengesetzten Vorgang zu tun, zu dem nicht irgendeine bestimmte Wellenlänge gehört.* Im Gegenteil, wenn für die Bildung eines Paketes eine Superposition vieler harmonischer Wellen

mit stetig sich änderndem k notwendig ist, wird es die Spektralanalyse des Paketes auf einen ganzen Abschnitt des kontinuierlichen Spektrums abbilden. Ferner wird sich zeigen, daß für die Bildung eines Wellenpaketes gegebener Ausdehnung Δx das Intervall des kontinuierlichen Spektrums Δk nicht kleiner als eine bestimmte Größe sein kann.

Wir suchen jetzt die für später sehr wichtige Beziehung zwischen Δk und Δx. Hierzu betrachten wir das Paket in einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$. Die Form des Paketes wird dann durch den Faktor

$$\frac{\sin 2\pi \Delta k \cdot x}{2\pi \Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0}$$

bestimmt, worin $\xi_0 = 2\pi \Delta k \cdot x$ ist. Dieser Faktor geht bei $\xi_0 = \pm \pi$ gegen null. Wenn wir den Koordinatenursprung in den dem Hauptmaximum entsprechenden Punkt verlegen (das ist der $\xi_0 = 0$ entsprechende Punkt), dann werden die Koordinaten der ersten Minima links und rechts von diesem Maximum gleich $\pm \frac{\Delta x}{2}$ sein. Bedenken wir, daß die folgenden Maxima in bezug auf die Größe schnell absinken (siehe § 70, wo der Verlauf der Funktion $\frac{\sin \xi}{\xi}$ ausführlicher betrachtet wurde), dann können wir für die Ausdehnung des Paketes den Abschnitt Δx zwischen den beiden symmetrischen, ersten Minima annehmen. Für sie gilt die Bedingung

$$2\pi \Delta k \cdot \frac{\Delta x}{2} = \pi,$$

woraus wir dann $\Delta k \cdot \Delta x = 1$ erhalten.

Wenn wir die Ausdehnung des Paketes genauer zu bestimmen wünschen und für seine Länge die Entfernung zwischen den folgenden, symmetrisch zu dem Anfangspunkt liegenden Minima nehmen, so erhalten wir $\Delta k \cdot \Delta x = 2$ und allgemein

$$\Delta k \cdot \Delta x \geqq 1. \qquad (126{,}5)$$

Bisher betrachteten wir die eindimensionale Bildung von Gruppen, sogenannte „lineare Gruppen", zu deren Bildung wir monochromatische Wellen mit gleichgerichteten Vektoren $\mathfrak{k}$ addierten. Da alle vorigen Überlegungen für jede der drei Koordinatenachsen gelten, müssen für die Bildung eines räumlichen Paketes mit der Ausdehnung Δx, Δy, Δz auf den Koordinatenachsen die drei Bedingungen

$$\Delta x \, \Delta k_x \geqq 1, \quad \Delta y \, \Delta k_y \geqq 1, \quad \Delta z \, \Delta k_z \geqq 1 \qquad (126{,}6)$$

erfüllt sein.

Wir sehen, daß zwischen der räumlichen Ausdehnung des Paketes in einem bestimmten Augenblick ($t = 0$) und dem kontinuierlichen Spektrum harmonischer Wellen, die zur Bildung dieses Paketes notwendig sind, dieselbe gegenseitige Beziehung besteht, wie wir sie im § 70 für die Funktion der Zeit $f(t)$ und der Verteilung der Amplituden nach der Frequenz fanden. Der unendlichen sinusförmigen Welle $e^{i2\pi kx}$ entspricht ein bestimmtes k (bestimmte Wellenlänge λ). Ist aber die Welle im Raum begrenzt, so verschwindet das bestimmte k, und es erscheint ein Spektrum von Wellenlängen, deren Breite Δk sich zu $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$ berechnet.

§ 127. Die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung der beiden Geschwindigkeiten, der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit zu und vergleichen sie miteinander in den zwei Fällen:

(1) Im ersten Fall hängt die Phasengeschwindigkeit der das Paket bildenden harmonischen Wellen nicht von k ab. Von den eine solche Eigenschaft besitzenden Medien wird gesagt, daß bei ihnen keine Dispersion vorhanden ist.

(2) Im zweiten Fall besitzt das Medium eine Dispersion, und die Phasengeschwindigkeit ist eine Funktion von k.

Wenden wir uns dem Fall (1) zu. Aus der Formel für die Phasengeschwindigkeit $c' = \frac{\nu}{k}$ finden wir $\nu = c'k$. Wir berechnen jetzt die Gruppengeschwindigkeit

$$g = \frac{d\nu}{dk} = \frac{d}{dk}(c'k) = c'.$$

Die Gruppengeschwindigkeit und die Phasengeschwindigkeit sind also einander gleich.

Im Fall (2) ist c' eine Funktion von k und deshalb

$$g = \frac{d}{dk}(c'k) = c' + k\frac{dc'}{dk}. \tag{127,1}$$

Das zweite Glied rechts formen wir um in

$$\frac{dc'}{dk} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda^2 \frac{dc'}{d\lambda}.$$

Setzen wir dies in (127,1) ein, dann erhalten wir

$$g = c' - \lambda\frac{dc'}{d\lambda}. \tag{127,2}$$

Wir sehen, daß die Gruppengeschwindigkeit beim Auftreten einer Dispersion nicht mit der Phasengeschwindigkeit übereinstimmt, sondern daß in Abhängigkeit von dem Vorzeichen der Ableitung $\frac{dc'}{d\lambda}$ die Gruppengeschwindigkeit sowohl kleiner $\left(\frac{dc'}{d\lambda} > 0\right)$ als auch größer als die Phasengeschwindigkeit sein kann $\left(\frac{dc'}{d\lambda} < 0\right)$. In der Optik existieren beide Fälle: 1. bei normaler Dispersion nimmt mit Vergrößerung von λ der Brechungskoeffizient μ, d. h. das Verhältnis von $\frac{c}{c'}$ ab, wo c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Das bedeutet aber, daß c' anwächst und $\frac{dc'}{d\lambda} > 0$ ist; 2. bei anomaler Dispersion, die innerhalb der Absorptionsbereiche beobachtet wird, ist die Abhängigkeit des Brechungskoeffizienten μ von λ umgekehrt, und folglich $\frac{dc'}{d\lambda} < 0$. Für Lichtwellen im Vakuum sind beide Geschwindigkeiten gleich; in dem Medium ist bei normaler Dispersion $g < c'$, bei anomaler Dispersion $g > c'$.

Es entsteht nun die Frage, welche der beiden Geschwindigkeiten bei der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit gemessen wird. Die Analyse der verschiedenen Meßmethoden zeigt, daß keine von ihnen die Bestimmungsmöglichkeit der Phasengeschwindigkeit ergibt, sondern alle die Gruppengeschwindigkeit angeben.

Dies ist daraus ersichtlich, daß bei den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit entweder die Geschwindigkeit eines bestimmten Signales gefunden wird (Methode von RÖMER, Verdunkelung der Jupiter-Satelliten) oder aber die Geschwindigkeit einer endlichen Anzahl von Wellen, die durch ein rotierendes, gezahntes Rad hindurchlaufen (Methode von FIZEAU). Es kann jede endliche Anzahl von Wellen der Analyse unterzogen und als Resultat einer Superposition ebener, monochromatischer Wellen dargestellt werden. Dies bedeutet aber, daß sich jeder Wellenzug als Wellenpaket darstellt und wir somit die Geschwindigkeit dieses Paketes, die Gruppengeschwindigkeit, messen. Weniger augenfällig ist diese Behauptung im Falle der Aberration des Lichtes; jedoch zeigte auch hier die von P. S. EHRENFEST durchgeführte Analyse, daß die Gruppengeschwindigkeit und nicht die Phasengeschwindigkeit gemessen wird.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Phasengeschwindigkeit eine Größe ist, die der unmittelbaren Messung unzugänglich ist. Aber bei der Ausbreitung räumlich begrenzter Wellen (d. h. eines Wellenpaketes) in einem dispergierenden Medium verliert der Begriff der Phasengeschwindigkeit selbst seinen unmittelbaren Sinn, da wir es nicht mit einer Phase, sondern mit den Phasen einer unendlichen Vielfalt harmonischer Wellen zu tun haben, von denen sich eine jede mit ihrer eigenen Geschwindigkeit ausbreitet.

Eine ausführlichere Analyse zeigt, daß die Geschwindigkeitsänderung bei der Verschiebung der Phasenfläche, die bei der Ausbreitung einer Welle in einem von Resonatoren angefüllten Medium zu beobachten ist, von dem Phasensprung bedingt ist, der bei den durch die durchgehende Welle erzwungenen Schwingungen der Resonatoren entsteht. Hieraus folgt, daß die Phasengeschwindigkeit in vollkommener Übereinstimmung mit ihrer Bezeichnung nur die Verschiebungsgeschwindigkeit einer bestimmten Phase angibt und, wie eine ausführlichere Analyse zeigt, beispielsweise überhaupt nicht mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Front einer Reihe von endlichen Wellen oder mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Energie verbunden ist. Gerade deshalb widerspricht die Entstehung einer Phasengeschwindigkeit, die im Vakuum größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, keineswegs der Behauptung der Relativitätstheorie, daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum die Grenzgeschwindigkeit darstellt.

Insbesondere in der Optik wird bewiesen, daß die Geschwindigkeit einer Wellenfront unter beliebigen Bedingungen gleich c, d. h. der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

§ 128. Der Welle-Korpuskel-Parallelismus. Die Brechung des Lichtes

Der statistische Charakter des Lichtfeldes (§ 109) führte uns zu dem Schluß, daß die Wellen- und die Korpuskeleigenschaften zwei gleichwertige Seiten ein und derselben Erscheinung darstellen. Wir werden in den beiden folgenden Paragraphen an anderen Beispielen zeigen, daß die verschiedenen optischen Erscheinungen sowohl vom Wellenstandpunkt als auch vom korpuskularen Gesichtspunkt betrachtet werden können.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer Erscheinung, deren Deutungsmöglichkeit von beiden Gesichtspunkten seit langem bekannt ist, mit der Lichtbrechung.

Obgleich die Erklärung der Brechung vom Wellenstandpunkt in den Elementarkursen der Physik gebracht wird, wiederholen wir sie hier noch einmal, um einige

charakteristische Züge zu unterstreichen. Sie führt die Brechung beim Übergang von einem Medium in ein anderes auf eine Änderung der Phasengeschwindigkeit der Welle zurück. Stellen wir uns zwei Medien mit verschiedenen Brechungsindizes vor, die durch eine ebene Grenzfläche getrennt sind (Abb. 181). Wir nehmen ferner an, daß das obere Medium das Vakuum sei, d. h., daß die Lichtgeschwindigkeit gleich c ist; in dem unteren Medium sei die Lichtgeschwindigkeit gleich c'. Die Wellenlängen in dem einen und dem anderen Medium werden entsprechend $\lambda = \frac{c}{\nu}$ und $\lambda' = \frac{c'}{\nu}$ sein. Eine ebene Welle falle auf die Trennungsfläche unter dem Winkel ϑ. Zur Zeit $t = 0$ wird die Lage der Ebene gleicher Phase in dem oberen Medium durch die Gerade AA' dargestellt. Im Moment $t = t'$ sei die Welle von dem Punkt A' um die Entfernung $A'D = ct'$ fortgeschritten und habe in dem Punkt D die Grenzfläche erreicht. Während dieser Zeit wird sich die Welle von den zwischen A und D liegenden Punkten im unteren Medium ausbreiten.

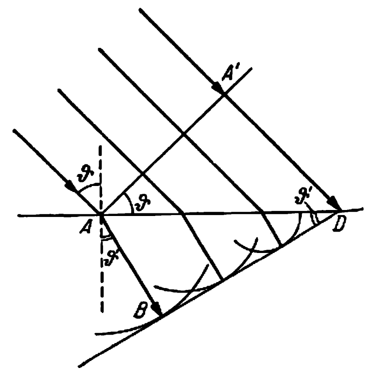


Abb. 181. Brechung (im Wellenbild)

Um die Lage der Ebene gleicher Phase in dem unteren Medium zu finden, konstruieren wir die Huyghensschen sphärischen Wellen von den auf der Trennfläche liegenden Punkten und suchen ihre Tangente. Offensichtlich wird im Moment $t = t'$ der Radius der zweiten, von A ausgehenden Welle gleich $AB = c't'$ sein. Wie aus der Zeichnung ersichtlich, folgt dann

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{ct'}{c't'} = \frac{c}{c'} = \text{const.} \tag{128,1}$$

Dies ist das Gesetz von Snellius.

Um jetzt die Brechung vom korpuskularen Gesichtspunkt zu erklären, genügt die Annahme, daß die Lichtteilchen ihren Impuls beim Durchgang durch die Trennfläche beider Medien ändern. Der Impuls des „Lichtteilchens" möge im oberen Medium p, und im unteren p' sein, wobei $p' > p$ ist (Abb. 182). Wegen der Symmetrie ändert sich die Tangentialkomponente des Impulses beim Durchgang durch die Trennfläche nicht, so daß

$$p_t = p'_t, \tag{128,2}$$

sondern es ändert sich nur die Normalkomponente ($p'_n > p_n$). Aus der Zeichnung ergibt sich

$$\sin\vartheta = \frac{p_t}{p}, \quad \sin\vartheta' = \frac{p'_t}{p'},$$

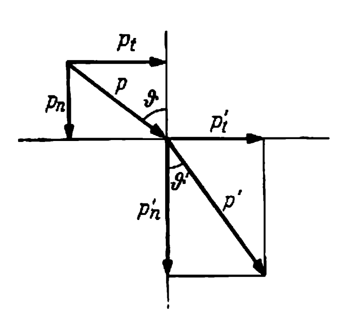


Abb. 182. Brechung (im Korpuskelbild)

bei Berücksichtigung von (128,2) wird

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{p'}{p} = \text{const}, \tag{128,3}$$

dies ist aber das Gesetz von Snellius.

Um dieses Ergebnis einer Endbetrachtung zu unterziehen, vergleichen wir die Formeln (128,1) und (128,3) miteinander. Die erste Formel erscheint als das Ergebnis der Welleninterpretation und die zweite als das Ergebnis einer korpuskularen Deutung. Wir sehen, daß im ersten Fall das Verhältnis vom Sinus des Einfalls- und zum Sinus des Brechungswinkels gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Geschwindigkeit im Medium ist, während im zweiten Fall das Verhältnis der Sinus gleich dem umgekehrten Verhältnis der Impulse der „Lichtteilchen", also gleich dem Verhältnis des Impulses im Medium zum Impuls im Vakuum ist.

Es entsteht nun die Frage, ob dieser Unterschied zur Durchführung eines Experimentes benutzt werden könnte, um zu zeigen, ob sich das Licht als Welle oder als Teilchenstrom darstellt. Wenn die „Lichtteilchen" gewöhnliche „NEWTONsche" Teilchen wären, dann wäre ihr Impuls der Geschwindigkeit direkt proportional, also $p = mv$ und

$$\frac{p'}{p} = \frac{v'}{v}. \tag{128,4}$$

Wenn wir annehmen, daß die „Lichtteilchen" der NEWTONschen Mechanik gehorchen, dann müssen wir erwarten, daß im Falle der Gültigkeit des Korpuskelbildes die Lichtgeschwindigkeit im Medium größer als im Vakuum ist. Umgekehrt muß im Falle der Richtigkeit des Wellenbildes die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum größer als im Medium sein. Dieser Versuch wurde tatsächlich von FIZEAU und FOUCAULT durchgeführt, die zu diesem Zwecke die Lichtgeschwindigkeit in Wasser bestimmten. Es zeigte sich nun, daß die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner als in Luft (im Vakuum) ist. Später unternahm MICHELSON einen analogen Versuch mit größerer Genauigkeit und verglich die Lichtgeschwindigkeit in Wasser und in Schwefelkohlenstoff mit der Lichtgeschwindigkeit in Luft (die praktisch gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist). Und dieser Versuch zeigte auch, daß das Verhältnis der Geschwindigkeiten in Luft und in Wasser gleich 1,330 ist, was praktisch dem Brechungsindex des Wassers für gelbes Licht entspricht, das MICHELSON benutzte. Der Brechungsindex des Wassers in diesem Teil des Spektrums ist tatsächlich gleich 1,333; die Differenz von 0,003 liegt innerhalb der Fehlergrenzen des Versuches. Bei Schwefelkohlenstoff, das einen hohen Brechungsindex und große Dispersion besitzt, fiel das Resultat etwas anders aus. Es zeigte sich, daß das Verhältnis der Geschwindigkeiten gleich $1{,}76 \pm 0{,}02$ ist, während der Brechungsindex von CS_2 gleich 1,63 ist. Auf diese Weise zeigte der Versuch, daß die Lichtgeschwindigkeit in Schwefelkohlenstoff geringer als in Luft ist, wie dies die Wellentheorie fordert, das Verhältnis der Geschwindigkeiten aber nicht gleich dem Brechungsindex war. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, daß die Messungen MICHELSONS, wie jede Messung der Geschwindigkeit eines Lichtsignales, die Gruppengeschwindigkeiten, nicht aber die Phasengeschwindigkeiten, deren Verhältnis gleich dem Brechungsindex ist, ergeben. In Schwefelkohlenstoff ist die Dispersion so groß, daß der Unterschied zwischen der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit bereits merklich sein muß. Benutzen wir die Formel

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}, \tag{127,2}$$

dann können wir zeigen, daß das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum

zur Gruppengeschwindigkeit des Lichtes im Medium mit dem Brechungsindex μ durch die Beziehung

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \tag{128,5}$$

verknüpft ist. Denn aus (127,2) erhalten wir

$$c' = g + \lambda \frac{dc'}{d\lambda}$$

und hieraus

$$\frac{c'}{g} = 1 + \frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda}. \tag{127,2'}$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{c'}{c} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{c'}\right) = -\frac{1}{c'} \frac{dc'}{d\lambda}.$$

Bestimmen wir hieraus $\frac{dc'}{d\lambda}$ und setzen dies in (127,2') ein, dann finden wir

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{c'}{g}$$

oder, wenn wir von neuem (127,2') benutzen,

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda}\right).$$

Bedenken wir, daß $\frac{\lambda}{g} \frac{dc'}{d\lambda}$ eine kleine Größe ist, und vernachlässigen wir Größen zweiter Ordnung, so finden wir in erster Näherung

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\mu}{d\lambda},$$

woraus sich schließlich unter der Berücksichtigung, daß $\mu c' = c$ ist, ergibt:

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda},$$

was zu beweisen war. Für Schwefelkohlenstoff erwies sich $\frac{c}{g}$ zu 1,76; aus der Abhängigkeit des Brechungsindizes von CS_2 von der Wellenlänge ergibt sich für die von Michelson benutzte Wellenlänge $\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = -0{,}126$ (der Brechungskoeffizient sinkt mit zunehmender Wellenlänge). Auf diese Weise erhalten wir aus (128,5) für den Brechungsindex den Wert

$$\mu = \frac{c}{g} + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = 1{,}76 - 0{,}126 \approx 1{,}63,$$

der mit den experimentellen Daten annähernd übereinstimmt.

Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß auf der rechten Seite der Formel (128,5) das Verhältnis der Geschwindigkeit $\frac{v'}{v}$ der *Teilchen* steht, während der Brechungsindex nach der Formel (128,1) gleich dem Verhältnis der *Phasengeschwindigkeiten* $\frac{c}{c'}$ *der Wellen* ist. Dies ist höchst wesentlich. Aus der Gleichsetzung von (128,1) mit (128,3) erhalten wir

$$\frac{p'}{p} = \frac{c}{c'}. \tag{128,6}$$

Dies besagt, daß das Verhältnis der *Impulse* der „Lichtteilchen" gleich dem reziproken Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten der Wellen ist. Wir wissen aber bereits, daß der Impuls eines Photons die Phasengeschwindigkeit des Lichtes c im Nenner und nicht im Zähler enthält, $p = \frac{h\nu}{c}$. Es ist zu beachten, daß c gleichzeitig sowohl Gruppen- als auch Phasengeschwindigkeit ist, da die Dispersion für Licht im Vakuum entfällt. Die Gleichung (128,6) zeigt also nur, daß zwischen dem Impuls des „Lichtteilchens" p' und der Phasengeschwindigkeit c' das reziproke Verhältnis

$$p' = \frac{\text{const}}{c'}$$

besteht.

Somit muß auch in dem korpuskularen Bild, wo die Photonen als „Lichtteilchen" erscheinen, die Phasengeschwindigkeit des Lichtes im Medium geringer als die Phasengeschwindigkeit im Vakuum sein.

Hieraus folgt, daß die beschriebenen Versuche, entgegen der im 19. Jahrhundert vertretenen Meinung, die Frage über die Natur des Lichtes nicht lösen: sie widersprechen weder dem Wellen- noch dem Korpuskelbild.

Zum Schluß vermerken wir noch die folgende wichtige Tatsache. Die Welle charakterisieren wir durch die Frequenz ν und die Wellenlänge λ, während für das Teilchen die Energie E und der Impuls p kennzeichnend sind. Wir können die Brechung entweder vom korpuskularen oder vom Wellengesichtspunkt beschreiben. Im ersten Fall benutzen wir die Größen E und p, im zweiten die Größen ν und λ. Wollen wir jedoch vom Korpuskelbild zum Wellenbild übergehen, dann müssen wir die folgenden, uns bekannten Beziehungen zwischen den beiden Wertegruppen benutzen:

$$E = h\nu \tag{128,7}$$

und

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{128,8}$$

Wir sehen, daß in diesen Beziehungen die Planck sche Konstante die Rolle eines Transformationsfaktors oder Schlüssels spielt, der den Übergang von einem Bild zum anderen erlaubt.

§ 129. Der Welle-Korpuskel-Parallelismus. Der Doppler-Effekt

Wir zeigen jetzt an anderen Beispielen die Deutungsmöglichkeit der optischen Erscheinungen vom korpuskularen und vom Wellenstandpunkt. Zunächst wenden wir uns dem Doppler-Effekt zu.

Der *Doppler-Effekt*, der sowohl in der Akustik als auch in der Optik auftritt, besteht bekanntlich in einer Änderung der Frequenz bei einer relativen Bewegung zwischen Quelle und Beobachter. Die Lichtquelle möge sich in A befinden und der Beobachter in B. Wenn sich die Lichtquelle um den Winkel ϑ zu der A und B verbindenden Geraden mit der Geschwindigkeit v bewegt, so unterscheidet sich die von dem Beobachter bei bewegter Quelle registrierte Frequenz von der bei ruhender Quelle wahrnehmbaren Frequenz um die Größe $\Delta\nu$, die durch die Formel

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\vartheta \tag{129,1}$$

bestimmt wird, worin c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Wellentheorie dieser Erscheinung ist auf die Betrachtung der scheinbaren Verschiebung der Wellenlänge durch die Bewegung der Quelle unter Beibehaltung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes begründet.

Es zeigt sich jedoch, daß diese Erscheinung auch vom korpuskularen Gesichtspunkt erklärt werden kann. Hierbei wird die Aussendung von Licht als „Herausschießen" eines Photons betrachtet, und auf diesen Prozeß werden die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses ebenso angewendet wie in der Korpuskulartheorie des COMPTON-Effektes.

Das Atom mit der Masse M, das sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt und somit den Impuls Mv_1 besitzt und sich im Punkt O befindet, sendet das Photon $h\nu$ aus (Abb. 183). Der Impuls dieses Photons ist gleich $\frac{h\nu}{c}$. Nach dem Gesetz der Impulserhaltung erhält das Atom im Moment der Ausstrahlung den zusätzlichen Impuls $\frac{h\nu}{c}$, der entgegengesetzt gerichtet ist (Rückstoß). Sein Impuls wird nach der Ausstrahlung gleich Mv_2. Das Gesetz der Impulserhaltung fordert, wie aus der Abbildung ersichtlich ist

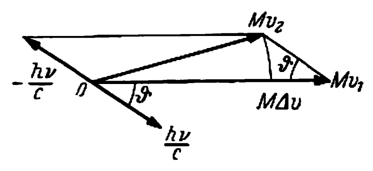


Abb. 183. Zur Korpuskulartheorie des DOPPLER-Effektes

$$Mv_1 - Mv_2 \equiv M\Delta v = \frac{h\nu}{c}\cos\vartheta\,. \tag{129,2}$$

Um jetzt das Gesetz von der Energieerhaltung anzuwenden, werden wir folgendermaßen schließen: wenn die Energie des ruhenden Atoms in den stationären Zuständen, die zur Aussendung des Photons $h\nu$ führen, gleich E_1 und E_2 ist, so folgt

$$E_1 - E_2 = h\nu\,. \tag{129,3}$$

Die Energie des sich bewegenden Atoms in angeregtem Zustand vor der Ausstrahlung ist gleich

$$E_1 + \frac{1}{2}Mv_1^2,$$

im Grundzustand nach der Ausstrahlung

$$E_2 + \frac{1}{2}Mv_2^2.$$

Die Energie des ausgestrahlten Photons ist gleich

$$h(\nu + \Delta\nu)\,.$$

Nach dem Gesetz der Energieerhaltung ist

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + E_1 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + E_2 + h(\nu + \Delta\nu)\,, \tag{129,4}$$

woraus bei Berücksichtigung von (129,3)

$$\frac{1}{2}M(v_1^2 - v_2^2) = h\Delta\nu$$

folgt, oder

$$M\Delta v\,\frac{v_1 + v_2}{2} = h\Delta\nu\,.$$

Benutzen wir (129,2) und führen die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ein, dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}\frac{h\nu}{c}\cos\vartheta &= h\,\Delta\nu, \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \frac{\bar{v}}{c}\cos\vartheta, \end{aligned}\right\}$$

dies ist aber die Beziehung (129,1), wie sie in der Wellenoptik abgeleitet wird.

Der *Compton-Effekt.* Im § 118 machten wir uns mit der Korpuskulartheorie des *Compton*-Effektes bekannt. Wir zeigen nun, daß dieser Effekt auch vom Wellengesichtspunkt aus erklärt werden kann. Im Wellenbild kann die Änderung der Frequenz bei der Streuung als das Resultat der Streuung an *bewegten* Elektronen betrachtet werden. Betrachten wir ein Elektron, das sich gleichmäßig mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ in Richtung der einfallenden Welle bewegt. Vom Standpunkt des klassischen Wellenbildes wird *in einem sich mit dem Elektron zusammen bewegenden Koordinatensystem* die Frequenz ν' der gestreuten Welle gleich der Frequenz der einfallenden Welle sein. In dem ruhenden Koordinatensystem wird sich aber die Frequenz ν wegen des Doppler-Effektes von ν' unterscheiden. Die genaue relativistische Theorie des Doppler-Effektes ergibt

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\varphi}. \tag{129,5}$$

In dem *ruhenden Koordinatensystem* erhält man für $\varphi = 0$ aus (129,5) die Frequenz ν_0 der einfallenden Welle:

$$\nu_0 = \nu' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}. \tag{129,6}$$

Eliminieren wir ν' aus (129,5) und (129,6), dann erhalten wir die Beziehung zwischen den Frequenzen ν und ν' der gestreuten und der einfallenden Welle im ruhenden Koordinatensystem:

$$\nu = \nu_0 \frac{1-\beta}{1-\beta\cos\varphi} = \frac{\nu_0(1-\beta)}{1-\beta+2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Setzen wir hier

$$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \tag{129,7}$$

wobei

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\lambda_0} = \frac{\frac{h}{mc}}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{mc^2},$$

so erhalten wir

$$\nu = \frac{\nu_0}{1+2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Das ist aber die Formel (118,10).

Wir beachten noch, daß der Bedingung (129,7) die folgende physikalische Deutung gegeben werden kann: β stellt die Geschwindigkeit dar, mit der sich das Zentrum des Trägheitssystems Elektron-Photon vor und nach dem Streuprozeß bewegt. Das Photon bewegt sich mit der Geschwindigkeit c; ihm muß die Masse $\mu = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$ zugeschrieben werden.

Ist die Masse des Elektrons gleich m, so wird die Zentrumsgeschwindigkeit des Trägheitssystems Elektron — Photon gleich

$$\frac{v}{c} = \frac{\mu}{\mu + m} = \frac{\frac{h\nu}{c^2}}{\frac{h\nu}{c^2} + m} = \frac{\frac{h\nu}{mc^2}}{\frac{h\nu}{mc^2} + 1}.$$

Da aber

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \frac{\frac{h}{mc}}{\frac{c}{\nu}} = \frac{\Lambda}{\lambda_0} = \alpha,$$

so ist die Geschwindigkeit des Trägheitszentrums gleich

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \beta,$$

was zu beweisen war.

§ 130. Der Welle-Korpuskel-Parallelismus. Das Beugungsgitter

Wir betrachten ein reflektierendes ebenes Beugungsgitter. Aus der Wellentheorie ist die Bedingung

$$a(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\lambda \tag{130,1}$$

bekannt; hierin bedeuten a die Gitterkonstante und ϑ bzw. ϑ' den Einfalls- bzw. Reflexionswinkel der ebenen monochromatischen Welle in bezug auf die Gitterebene.

Wir betrachten jetzt diese Erscheinung vom korpuskularen Gesichtspunkt. Auf das Gitter fällt ein Photonenstrom unter dem Winkel ϑ. Da aus dem Versuch bekannt ist, daß der Charakter des Beugungsbildes nicht von der Lichtintensität abhängt, sondern nur durch das Gitter selbst *als Ganzes* bestimmt wird, brauchen wir das Bild nicht zu zergliedern, beispielsweise nicht die Reflexion jedes Photons an einem bestimmten reflektierenden Strich des Gitters zu betrachten. (Diese Frage werden wir weiter unten ausführlicher behandeln.) Wir stellen uns jedoch vor, daß bei dem Auffallen eines Photons auf das Gitter dieses einen zusätzlichen Impuls erhält und bei der Reflexion einen Rückstoß erleidet. Damit ändert sich die Komponente des Gitterimpulses in Richtung der in der Gitterebene liegenden x-Achse um

$$p_x - p'_x = \Delta p_x.$$

Stellen wir uns nun vor, daß das Gitter beweglich ist und in seiner Ebene verschoben werden kann. Dann erteilt ihm der Impuls Δp_x eine Bewegung. Bei einer Verschiebung des Gitters in Richtung der x-Achse um eine Entfernung, die gleich seiner Gitterkonstante a ist, wird das Gitter von neuem mit seiner Ausgangslage übereinstimmen. Wir können also diese Bewegung des Gitters als eine periodische Bewegung mit der Periode a betrachten. In diesem Falle kann sie unter Benutzung der BOHR-SOMMERFELDschen Quantenbedingungen „quantisiert" werden (§ 106):

$$\int_0^a \Delta p_x \, dx = nh,$$

woraus

$$a\Delta p_x = nh \tag{130,2}$$

folgt. Da nun die Masse des Gitters im Vergleich zur Photonenmasse sehr groß ist, kann die absolute Größenänderung seines Impulses p bei der Reflexion vernachlässigt werden. Es ist

$$\left.\begin{aligned} p_x &= p\cos\vartheta, \\ p_x' &= p\cos\vartheta', \\ \Delta p_x &= p\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta'), \end{aligned}\right\}$$

und (130,2) nimmt die Form

$$a\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\,\frac{h}{p} \tag{130,3}$$

an.

Bedenken wir, daß p der Impuls des Photons ist, der mit der Wellenlänge durch die Beziehung

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{128,8}$$

verknüpft ist, und setzen wir diesen Ausdruck in (130,3) ein, dann erhalten wir

$$a\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\lambda, \tag{130,1}$$

also die Formel des Beugungsgitters in der üblichen Form.

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit noch darauf, daß in die Formel (130,3) der Impuls p eingeht, eine Größe, die das Teilchen charakterisiert, und daß die Beziehung (130,1) die Wellenlänge enthält. Wir können deshalb sagen, daß die Beziehungen (130,3) und (130,1) ein und dieselbe Formel darstellen, die jedoch im ersten Falle für das Korpuskelbild und im zweiten Falle für das Wellenbild aufgeschrieben ist. Wie in allen anderen Fällen findet der Übergang von einem Bild in das andere mit Hilfe der Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

statt, die beide Aspekte der optischen Erscheinungen verbindet.

§ 131. Die Hypothese von de Broglie

Der Dualismus Welle-Teilchen wurde, wie wir sehen, vor allem bei der Untersuchung der Natur des Lichtes festgestellt. Im Jahre 1924 stellte L. de Broglie bei dem Versuch, die mit diesem Dualismus verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden, die kühne Hypothese auf, daß der Dualismus nicht als Besonderheit nur der optischen Erscheinungen allein erscheint, sondern allgemeine Bedeutung hat. In der Optik, sagte er, vernachlässigten wir im Verlaufe des Jahrhunderts die korpuskulare Art der Betrachtung gegenüber der Wellenmethode; und machten wir nicht in der Theorie der Materie den umgekehrten Fehler? Dachten wir nicht allzu sehr über das Bild der „Teilchen“ nach und vernachlässigten übermäßig das Wellenbild? So etwa lautete die Frage, die sich de Broglie stellte.

Zur Annahme von Welleneigenschaften bei materiellen Teilchen veranlaßten ihn die folgenden Überlegungen. In den zwanziger Jahren des 19. Jahrhunderts wandte HAMILTON seine Aufmerksamkeit der bemerkenswerten Analogie zwischen der geometrischen Optik und der Mechanik zu (wobei es sich von selbst versteht, daß es sich damals nur um die NEWTONsche Mechanik handeln konnte). Es zeigt sich, daß die Grundgesetze dieser beiden verschiedenen Gebiete in einer mathematisch identischen Form dargestellt werden konnten. Das bedeutet, daß wir ebenso wie die Bewegung eines materiellen Punktes in einem Feld mit dem Potential $V(x, y, z)$ auch die Bewegung von Lichtstrahlen in einem optisch-inhomogenen Medium mit dem entsprechend gewählten Brechungsindex $\mu(x, y, z)$ betrachten können. Diese Analogie umfaßt nur die geometrische Optik und die klassische Mechanik. Es ist nun aber gut bekannt, daß die geometrische Optik nicht alle Eigenschaften des Lichtes erklären kann. Zur Erklärung solcher Eigenschaften wie der Interferenz und der Beugung muß die Wellenoptik benutzt werden, die eine allgemeinere Bedeutung besitzt. Die geometrische Optik erscheint nur als ein Grenzfall der Wellenoptik. Andererseits ist auch bekannt, daß die NEWTONsche Mechanik ebenfalls begrenzte Anwendbarkeit besitzt; sie kann beispielsweise nicht die Existenz der Energieniveaus in den Atomsystemen erklären. Die Idee DE BROGLIEs bestand nun darin, die Analogie zwischen Mechanik und Optik zu erweitern und der Wellenoptik eine *Wellenmechanik* gegenüber zu stellen, die allgemeiner als die klassische Mechanik auch auf die inneratomaren Bewegungen anwendbar ist.

Indem DE BROGLIE zuließ, daß die materiellen „Teilchen" neben den korpuskularen Eigenschaften auch Welleneigenschaften aufweisen, übertrug er die Übergangsregeln, denen wir schon häufig bei der Betrachtung des Welle-Korpuskel-Dualismus begegnet sind, auf die materiellen „Teilchen". Wir haben ein materielles Teilchen, beispielsweise ein Elektron der Masse m, das sich bei Abwesenheit eines Feldes gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v bewegt. Im korpuskularen Bild schreiben wir dem Teilchen die Energie E und den Impuls p zu; im Wellenbild haben wir es mit der Frequenz ν und der Wellenlänge λ zu tun. Wenn diese beiden Bilder als die verschiedenen Aspekte ein und desselben Objektes erscheinen, dann wird die Verbindung zwischen den sie charakterisierenden Größen durch die Beziehungen

$$E = h\nu \tag{131,1}$$

und

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{131,2}$$

ausgedrückt, wobei h die PLANCKsche Konstante ist (siehe § 128).

Im Falle der optischen Erscheinungen benutzen wir die Beziehung (131,2) zur Bestimmung des Impulses des Photons, das sich als ein mit Lichtgeschwindigkeit c bewegtes Teilchen der Ruhmasse null darstellt. Für materielle Teilchen gibt nach DE BROGLIE dieselbe Beziehung die Wellenlängen der ebenen monochromatischen Wellen an, die diesen Teilchen entsprechen:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Im Falle von Teilchen mit einer Ruhmasse ist $p = mv$, wobei für kleine Geschwindigkeiten m eine Konstante ist; für Geschwindigkeiten aber, die

mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind, hängt die relativistische Masse von der Geschwindigkeit ab: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. So ist für ein „Teilchen" mit einer Ruhmasse nach DE BROGLIE

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \tag{131,3}$$

Wenn wir den Wellenvektor $\mathfrak{k}$ mit dem absoluten Wert $|\mathfrak{k}| = \frac{1}{\lambda}$ einführen, so wird auf Grund von (131,2)

$$\mathfrak{p} = h\mathfrak{k}, \quad p_x = hk_x, \quad p_y = hk_y, \quad p_z = hk_z. \tag{131,4}$$

Die Formel der ebenen Welle, welche die Bewegung freier materieller „Teilchen" beschreibt, hat daher die Form:

$$\psi = Ae^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r}-\nu t)} = Ae^{i2\pi(xk_x+yk_y+zk_z-\nu t)} = Ae^{i\frac{2\pi}{h}(xp_x+yp_y+zp_z-Et)}. \tag{131,5}$$

(Die Tatsache, daß der Exponent in (131,5) das umgekehrte Vorzeichen gegenüber (123,8) hat, ist ohne Bedeutung, da nur das Quadrat $|\psi|^2$ des Moduls, d. h. $\psi^*\psi = A^2$, einen physikalischen Sinn hat.)

§ 132. Die Eigenschaften der DE BROGLIEschen Wellen

Wir berechnen nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit der DE BROGLIEschen Wellen und unterscheiden hierbei in allen Fällen die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit wird

$$c' = \frac{\nu}{k} = \frac{h\nu}{hk} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \tag{132,1}$$

sein; da $c > v$, ist die Phasengeschwindigkeit der DE BROGLIEschen Wellen größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Das darf uns nicht verwundern, da wir bereits wissen, daß die Phasengeschwindigkeit weder die Geschwindigkeit eines „Signales" noch die Geschwindigkeit einer Energieverschiebung charakterisiert und daher sowohl kleiner als auch größer als c sein kann.

Die Gruppengeschwindigkeit berechnen wir mit Hilfe der Formel (125,3) und erhalten

$$g = \frac{d\nu}{dk} = \frac{d(h\nu)}{d(hk)} = \frac{dE}{dp}. \tag{132,2}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $\frac{dE}{dp} = v$. Tatsächlich ist die Energieänderung dE des sich unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ auf dem Weg $d\mathfrak{s}$ bewegenden Teilchens gleich $dE = \mathfrak{F}d\mathfrak{s}$; mit $\mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ ergibt sich

$$dE = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}d\mathfrak{s} = d\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = d\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}$$

oder, da $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{p}$ gleichgerichtet sind,

$$dE = v\,dp,$$

woraus

$$\frac{dE}{dp} = v$$

folgt.

Somit erhalten wir aus (132,2)

$$g = v\,, \tag{132,3}$$

die Gruppengeschwindigkeit der DE BROGLIEschen Wellen ist gleich der Geschwindigkeit des Teilchens. Auf diese bemerkenswerte Beziehung kommen wir noch zurück.

Wir suchen nun die Verbindung zwischen der Frequenz der DE BROGLIEschen Welle und den Komponenten des Wellenvektors (Dispersionsgesetz). Zu diesem Zweck stellen wir zuerst die Beziehung zwischen ν und $\mathfrak{k}$ für den allgemeinen Fall relativistischer Teilchen auf und benutzen die aus § 61 bekannte relativistische Beziehung zwischen Impuls und Energie:

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + \mathfrak{p}^2 = m_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\,.$$

Setzen wir hier

$$E = h\nu \tag{131,1}$$

und

$$p_x = hk_x\,, \quad p_y = hk_y\,, \quad p_z = hk_z \tag{131,4}$$

ein, dann erhalten wir

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{h^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\,. \tag{132,4}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{m_0 c^2}{h} = \nu_0 \tag{132,5}$$

ein, dann nimmt (132,4) die Form

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \tag{132,6}$$

an. Dies ist die gesuchte relativistische Beziehung. Wir erkennen, daß für Teilchen mit der Ruhmasse $m_0 = 0$ die Formel (132,5) $\nu_0 = 0$ ergibt und (132,6) die Form

$$\frac{\nu^2}{c^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

annimmt. Dies ist eine uns schon bekannte Beziehung, die aus der Wellengleichung für elektromagnetische Wellen folgt, für Wellen also, denen die Photonen gegenübergestellt werden.

Betrachten wir noch eine bemerkenswerte Eigenschaft der DE BROGLIEschen Wellen. In der elementaren Theorie des wasserstoffähnlichen Atoms benutzten wir nach BOHR die folgende Auswahlregel der stationären Kreisbahnen:

$$mva = n\,\frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Diese Bedingung können wir in der Form

$$2\pi a = n\,\frac{h}{mv}$$

schreiben. Bedenken wir, daß $\frac{h}{mv}$ die DE BROGLIEsche Wellenlänge ist, dann haben wir

$$2\pi a = n\lambda\,. \tag{132,7}$$

Der Kreisumfang einer stationären Bahn muß gleich einer ganzen Anzahl von DE BROGLIEschen Wellen sein.

Eine analoge Bedingung gibt es auch für die elliptischen Bohrschen Bahnen. Dieser Fall ist komplizierter, da die de Brogliesche Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv}$ in den verschiedenen Punkten der elliptischen Bahn insofern verschieden ist, als die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Zur Auswahl der elliptischen Bahnen benutzten wir in der Bohrschen Theorie die beiden Quantenbedingungen:

$$\oint p_r\,dr = n_r h; \quad \oint p_\varphi\,d\varphi = n_\varphi h.$$

Ihre Addition ergibt

$$\oint (p_r\,dr + p_\varphi\,d\varphi) = (n_r + n_\varphi)\,h = nh.$$

Wir erinnern uns, daß nach der Formel (106,15)

$$p_r\,dr + p_\varphi\,d\varphi = 2T\,dt$$

ist, und erhalten

$$nh = \oint (p_r\,dr + p_\varphi\,d\varphi) = \oint 2T\,dt = \oint mv^2\,dt = \oint mvv\,dt = \oint mv\,ds.$$

Berücksichtigen wir die de Brogliesche Formel $\lambda = \frac{h}{mv}$, dann haben wir

$$nh = h \oint \frac{ds}{\lambda}$$

oder

$$\oint \frac{ds}{\lambda} = n \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{132,8}$$

in diesem Falle muß die auf der Bahnlänge Platz findende Anzahl von de Broglieschen Wellen ganzzahlig sein. Der wahre Sinn dieses interessanten Resultates besteht jedoch darin, daß die eine Elektronenbewegung beschreibende Wellenfunktion eindeutig ist.

§ 133. Experimentelle Bestätigung der de Broglieschen Hypothese Die Methode von Bragg

Die Hypothese von de Broglie wurde experimentell sehr bald glänzend bestätigt. Es wurde gezeigt, daß Strahlen von Elektronen, Protonen und auch Atomen die gleichen Interferenzerscheinungen zeigen können wie Licht oder Röntgenstrahlen.

Vor allem wollen wir sehen, von welcher Größenordnung die de Brogliesche Wellenlänge für materielle Teilchen ist. Sie gibt uns einen Hinweis dafür, welche experimentellen Methoden in dem gegebenen Fall für die Beobachtung der Interferenz angewandt werden müssen. Wir verwenden einen Strahl von Elektronen, die durch das Potential V beschleunigt werden mögen; ist dieses Potential so klein, daß wir noch die Formeln der klassischen (Newtonschen) Mechanik benutzen können, so ergibt sich die Elektronengeschwindigkeit aus der Beziehung

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300} \tag{133,1}$$

und die de Brogliesche Wellenlänge zu

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \tag{131,3}$$

Eliminieren wir v aus (133,1) und (131,3), dann erhalten wir

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{me}}\sqrt{\frac{150}{V}} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-27}}{\sqrt{9\cdot 10^{-28}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10}}}\sqrt{\frac{150}{V}} \approx \sqrt{\frac{150}{V}}\cdot 10^{-8}\,\text{cm} = \sqrt{\frac{150}{V}}\,\text{Å} = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\,\text{Å}. \quad (133,2)$$

Hieraus ersehen wir, daß für Elektronen, die mit 150 Volt beschleunigt werden, die DE BROGLIEsche Wellenlänge gleich 1 Å ist, also von der Größenordnung der Wellenlänge weicher Röntgenstrahlen.

Ist die Elektronengeschwindigkeit groß, dann ist die einfache Formel der NEWTONschen Mechanik nicht anwendbar, es muß die relativistische Korrektur für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigt werden. In solchen Fällen kann zur Bestimmung von λ die folgende Näherungsformel benutzt werden:

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}(1 - 0{,}489\cdot 10^{-6}\,V)\,\text{Å}.^{1)} \qquad (133,3)$$

Für Protonen ist bei derselben Geschwindigkeit die DE BROGLIEsche Wellenlänge etwa $\sqrt{1836}$ mal kleiner.[2] In der Tabelle XVI sind die berechneten Werte von λ für Elektronen und Protonen angeführt.

Tabelle XVI[2])

Beschleunigungs-potential (in Volt)	Wellenlänge (in Å)	
	Elektronen	Protonen
10^9	$1{,}2\cdot 10^{-5}$	$7{,}3\cdot 10^{-6}$
10^8	$1{,}2\cdot 10^{-4}$	$2{,}7\cdot 10^{-5}$
10^7	$1{,}2\cdot 10^{-3}$	$0{,}9\cdot 10^{-4}$
10^6	$0{,}87\cdot 10^{-3}$	$2{,}9\cdot 10^{-4}$
10^5	$3{,}7\cdot 10^{-2}$	$9{,}0\cdot 10^{-4}$
10^4	0,12	$2{,}9\cdot 10^{-3}$
10^3	0,39	$9{,}0\cdot 10^{-3}$
400	0,61	$1{,}4\cdot 10^{-2}$
200	0,86	$2{,}0\cdot 10^{-2}$
50	1,7	$4{,}0\cdot 10^{-2}$
10	3,9	$0{,}9\cdot 10^{-1}$

Aus dem Gesagten wird klar, daß für die Beobachtung der Interferenz materieller Teilchen Methoden angewandt werden müssen, wie sie auch für Röntgenstrahlen benutzt werden, d. h. also die Interferenz am Kristallgitter. Tatsächlich wurde die Interferenz von Elektronenstrahlen an Kristallen noch vor dem Erscheinen der Theorie von DE BROGLIE beobachtet. In den Jahren 1921–1923 fanden DAVISSON und KUNSMAN bei der Streuung von Elektronen an dünnen Metallfolien eine Abhängigkeit der Intensität vom Streuwinkel (Abb. 184). Hierbei hängen die Lage und die Größe der sich ergebenden Maxima wesentlich von der Elektronengeschwindigkeit ab. Ein zufälliger Umstand zeigte, daß die Kristallstruktur bei dieser Erscheinung eine grundlegende Rolle spielt: während der Reflexionsversuche an Nickelschichten zerbrach die Glasapparatur, und das Nickel oxydierte. Zur Wiederherstellung dieser Schicht wurde sie daraufhin längere

[1]) Anm. d. Red.: Ableitung dieser Formel auf S. 347.

[2]) Anm. d. Red.: Die Tabelle ist nach der exakten Formel von S. 347 berechnet worden.

Zeit im Vakuum und in Wasserstoffatmosphäre geglüht. Bei dieser Behandlung erfuhr die Schicht eine Rekristallisation: es bildeten sich in ihr eine Anzahl großer Kristalle. Bei erneuten Versuchen mit der Elektronenstreuung zeigte sich, daß sich das Bild wesentlich geändert hatte: die Maxima waren bedeutend ausgeprägter und ihre Anzahl größer (siehe Abb. 184 b).

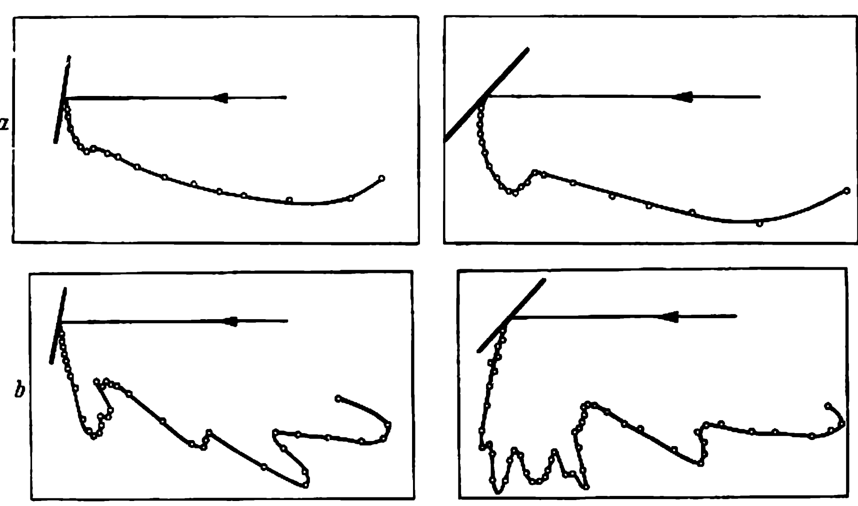


Abb. 184. Streuung von Elektronen an polykristallinem Ni a) vor und b) nach Glühen

Die Erklärung dieser eigentümlichen Selektivität bei der Reflexion von Elektronen war kaum möglich, da nicht vermutet wurde, daß dies ein Beispiel von Interferenzreflexion sei. Die folgenden Versuche von Davisson und Germer bestätigten jedoch diese Erklärung.

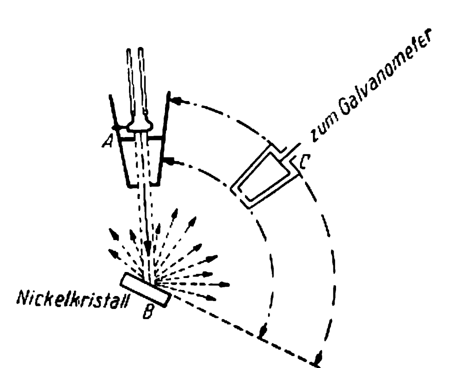


Abb. 185. Versuchsanordnung von DAVISSON und GERMER

Ein paralleler Elektronenstrahl (Abb. 185) bestimmter Geschwindigkeit, der mit Hilfe der „Elektronenkanone“ A erzeugt wird, ist auf den Kristall B gerichtet; die reflektierten Elektronen werden von dem Kollektor C aufgefangen, der mit einem Galvanometer verbunden ist. Der Kollektor kann in einen beliebigen Winkel zu dem einfallenden Strahl gestellt werden, wobei er sich in einer Ebene bewegte. Messen wir die Stromstärke des Kollektors in seinen verschiedenen Lagen, so können wir etwas über die Intensität der Reflexion in verschiedenen Richtungen aussagen. Das Ergebnis stellt sich in Form eines Polardiagramms dar, das in der Abb. 186 angegeben ist. Auf den unter ver-

schiedenen Winkeln angeführten Radiusvektoren sind Abschnitte aufgetragen, die den Intensitäten der Reflexion unter den entsprechenden Winkeln proportional sind. Es zeigte sich nun folgendes: Befindet sich in B ein Nickel-Einkristall, so wird bei der Reflexion ein scharf ausgeprägtes Maximum beobachtet, das zeigt, daß die Elektronen nach den optischen Gesetzmäßigkeiten reflektiert werden. Wird derselbe Versuch mit einer Nickelschicht aus einer Vielzahl willkürlich angeordneter kleiner Kristalle wiederholt, dann wird keinerlei Selektivität beobachtet.

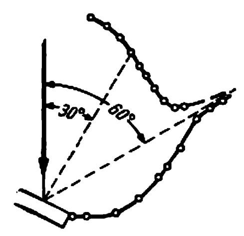


Abb. 186. Polardiagramm der Intensität von Elektronen bei der Reflexion an einem Ni-Einkristall

Der Versuch mit der gesetzmäßigen Reflexion der Elektronen an einem Einkristall stellt tatsächlich ein genaues Analogon zur Interferenzreflexion von Röntgenstrahlen an einem Kristall nach der BRAGGschen Methode (oder der Interferenzreflexion von monochromatischem Licht an einer dünnen Schicht) dar. Bekanntlich erleiden die Röntgenstrahlen nur dann an dem Kristall eine Reflexion, wenn ihre Wellenlänge und der Glanzwinkel die BRAGG-WULFsche Formel

$$n\lambda = 2\,d \sin\varphi \tag{133,4}$$

befriedigen (siehe Abschnitt IV, § 34).

Diese Formel kann zur Beobachtung der Interferenz auf doppelte Weise benutzt werden. Erstens kann auf den Kristall ein Strahl mit bestimmter Wellenlänge λ gerichtet und bei sich drehendem Kristall geprüft werden, ob die Reflexion nur bei bestimmten Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, die den Werten $n = 1, 2, 3, \ldots$ in der Formel von BRAGG-WULF entsprechen, auftritt. Auf diese Weise erhält man Spektren erster, zweiter usw. Ordnung. Zweitens kann ein und derselbe Glanzwinkel φ beibehalten und die Wellenlänge stetig geändert werden. Hierbei kann eine Reflexion nur dann erhalten werden, wenn

$$\lambda_n = \frac{1}{n}\,2\,d \sin\varphi \tag{133,5}$$

erfüllt wird, d. h. nur bei Wellenlängen λ_1, $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3}$ usw.

Für Untersuchungen mit Röntgenstrahlen wird die erste Methode benutzt, für Elektronen die zweite, da die Elektronen gewöhnlich eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen, dieser somit eine bestimmte Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv}$ entspricht, und eine Änderung dieser Geschwindigkeit durch Variation des Beschleunigungspotentials wesentlich einfacher als im Vakuum die Drehung des Kristalls durchzuführen ist.

Kombinieren wir die Formeln (133,2) und (133,5), dann erhalten wir

$$\frac{12{,}25}{V^{1/2}} = \frac{1}{n}\,2\,d \sin\varphi$$

oder

$$V^{1/2} = n\,\frac{12{,}25}{2d \sin\varphi}. \tag{133,6}$$

Wenn wir bei der in Abb. 185 dargestellten Anordnung das Beschleunigungspotential stetig verändern und jedesmal die Stromstärke des Kollektors, also die

Reflexionsintensität messen und auf der Abszisse $V^{1/2}$ und auf der Ordinate die Intensität der Reflexion auftragen, müssen wir eine Kurve mit einer Reihe scharfer Maxima erhalten, deren gleicher Abstand voneinander $\frac{12{,}25}{2d \sin \varphi}$ beträgt.

In der Abb. 187 ist die Kurve dargestellt, die sich mit einem Nickel-Einkristall unter bestimmten Bedingungen ($\varphi = 80^0$, $d = 2{,}03$ Å) ergibt.

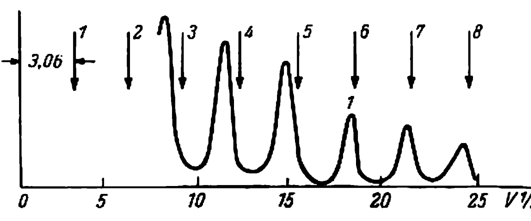


Abb. 187. Prüfung der BRAGG-WULF-Formel bei der Elektroneninterferenz an Ni

Die periodische Wiederholung der Maxima ist sehr deutlich ausgeprägt. Auf derselben Abbildung ist die Lage der nach der BRAGG-WULFschen Gleichung (133,6) berechneten Maxima durch Pfeile angezeigt. Der Vergleich mit der Lage der experimentell gefundenen Maxima zeigt, daß bei großen Werten von n ($n = 7; 8$) eine genaue Übereinstimmung besteht, während bei kleinen n eine Abweichung beobachtet wird, die um so größer ist, je kleiner n wird.

Da diese Abweichung offensichtlich einen systematischen und gesetzmäßigen Charakter besitzt, zeigt sie, daß bei der Rechnung irgendein Faktor nicht berücksichtigt wurde. Dieser Faktor ist der Brechungsindex der DE BROGLIEschen Wellen. Tatsächlich wurde bei der Ableitung der BRAGG-WULFschen Formel (siehe § 34) der Brechungsindex gleich 1 und die Wellenlänge außerhalb des Kristalls und in seinem Innern gleich gesetzt. Dies ist für sehr kurze Wellen durchaus zulässig. Für größere Wellenlängen im Gebiet der Röntgenstrahlen allerdings muß bei genauer Bestimmung der Wellenlänge der Brechungsindex berücksichtigt und eine korrigierte BRAGG-WULFsche Formel benutzt werden, die weiter unten abgeleitet werden wird. Dasselbe muß für die DE BROGLIEschen Wellen geschehen. Qualitativ wird dies bereits durch die Abweichung der berechneten von den experimentellen Reflexionsmaxima bestätigt. Wie wir sahen, wird tatsächlich die Abweichung mit wachsendem n geringer; aber bei festem Winkel φ sind nach der Formel (133,5) die Reflexionen für wachsende n Reflexionen der entsprechend abnehmenden Wellenlängen $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}$ usw.

Übungen: 1. Es ist die dem α-Teilchen entsprechende Wellenlänge auszurechnen (Energie des α-Teilchens gleich $1{,}22 \cdot 10^{-5}$ erg).

2. Es ist das Beschleunigungspotential zu berechnen, das dem Maximum erster Ordnung der Interferenzreflexion an einem Nickel-Einkristall bei einem Winkel von 50° zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahl entspricht.

§ 134. Die Brechung von Elektronenwellen und das innere Potential von Metallen

Die Erklärung für die am Schluß des vorigen Paragraphen angeführte Verschiebung der Maxima wird quantitativ durch die Berechnung des inneren Potentials im Metall aus Beobachtungen der Elektroneninterferenz bestätigt. Diese

Berechnung wird auf folgende Weise durchgeführt. Wie wir wissen, ist die Phasengeschwindigkeit der DE BROGLIEschen Wellen gleich E/p. Wenn die Elektronen in das Innere des Metalls fallen, ändert sich ihr Impuls, was vom korpuskularen Gesichtspunkt die Ursache für die Brechung der Elektronenstrahlen darstellt (siehe § 128). Die Änderung des Impulses beim Einfall in das Innere des Metalls erklärt sich dadurch, daß im Innern des Metalls ein durch die positiven Ionen des Kristallgitters bedingtes elektrisches Feld existiert. Das Potential dieses Feldes ist also positiv. Stellen wir uns jetzt eine Gerade vor, die durch eine Reihe positiver Metallionen hindurchgeht, so muß sich offensichtlich das Potential bei einer Verschiebung längs dieser Geraden periodisch ändern, da die Ionen gleiche Abstände voneinander haben. Wir können jedoch dieses sich periodisch ändernde Potential angenähert durch ein mittleres Potential ersetzen, welches auch das innere Potential des Metalls genannt wird.

Die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwellen außerhalb des Metalls ist gleich

$$c'_a = \frac{E}{p_a} = \frac{E}{m v_a} = \frac{E}{\sqrt{m^2 v_a^2}} = \frac{E}{\sqrt{2mE}},$$

wobei E die Gesamtenergie der Elektronen ist. Ist die potentielle Energie des Elektrons im Innern des Metalls U, dann wird der Impuls im Innern des Metalls $p_i = \sqrt{2m(E-U)}$ sein, und die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwellen ist

$$c'_i = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}.$$

Nach Definition ist der Brechungsindex μ gleich

$$\mu = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{c'_a}{c'_i} = \sqrt{\frac{E-U}{E}} = \frac{\lambda_a}{\lambda_i}, \qquad (134{,}1)$$

worin φ und φ' die Glanzwinkel sind, d. h. die Ergänzungswinkel zu $\pi/2$ bei dem Einfalls- und dem Brechungswinkel.

Wir müssen jetzt bedenken, daß das innere Potential des Metalls V_0 positiv und die Elektronenladung negativ ist; die potentielle Energie ist also negativ:

$$U = -eV_0;$$

die Gesamtenergie E wird üblicherweise durch das äußere Beschleunigungspotential ausgedrückt: $E = eV$. Beachten wir dies alles, dann erhalten wir aus (134,1)

$$\mu = \frac{\sqrt{V+V_0}}{\sqrt{V}} = \sqrt{1+\frac{V_0}{V}}. \qquad (134{,}2)$$

Auf diese Weise können wir den Brechungsindex durch das innere Potential ausdrücken.

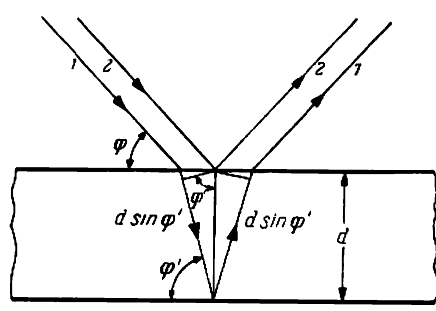


Abb. 188. Zur Ableitung der BRAGG-WULFschen Formel

Wir wollen jetzt die BRAGG-WULFsche Formel für den Fall $\mu \neq 1$ ableiten. Wir betrachten zwei interferierende Strahlen 1 und 2 in der Abb. 188. Wegen der Brechung ist der innere Glanzwinkel φ' nicht gleich dem äußeren φ. Der Gangunterschied der Strahlen 1 und 2 ist offensichtlich gleich

$$2d\sin\varphi' = 2d\sqrt{1-\cos^2\varphi'}$$

oder, wenn wir bedenken, daß

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \mu,$$

$$2d\sin\varphi' = 2d\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\mu^2}}.$$

Die Maximumbedingung für die Interferenz gibt nun

$$2d\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\mu^2}} = n\lambda_i = n\,\frac{\lambda_a}{\mu}$$

[siehe (134,1)] oder

$$2d\sqrt{\mu^2 - \cos^2\varphi} = n\lambda_a. \qquad (134,3)$$

Dies ist die Formel von Bragg-Wulf für $\mu \neq 1$.

Mit Hilfe dieser Formel können wir das innere Potential des Metalls berechnen. Setzen wir in (134,3) $\lambda_a = \sqrt{\frac{150}{V}}$, dann erhalten wir

$$4d^2(\mu^2 - \cos^2\varphi) = n^2\frac{150}{V},$$

und, wenn wir μ^2 durch $1 + \frac{V_0}{V}$ nach Formel (134,2) ersetzen, finden wir

$$V_0 = n^2\frac{150}{4d^2} - V\sin^2\varphi. \qquad (134,4)$$

Kennen wir somit das Beschleunigungspotential V und haben den Glanzwinkel φ gemessen, dann können wir V_0 für einen Kristall mit der bekannten Größe d berechnen.

Auf diese Weise ergeben sich beispielsweise die in der Tabelle XVII angeführten Werte für V_0. Wie ersichtlich, sind diese Werte hinreichend konstant und stimmen mit den aus der Theorie der Metalle errechneten Werten überein.

Tabelle XVII

Metall	Beschleunigungs-potential in Volt	λ in Å	n	μ	V_0 (Volt)
Ni	67	1,49	3	1,12	17
	142	1,03	4	1,05	16
	218	0,83	5	1,03	14
Pb	65	1,52	3	1,10	14
	125	1,09	4	1,06	15
	208	0,84	5	1,03	13
Ag	48	1,77	3	1,15	15
	96	1,25	4	1,08	15
	166	0,95	5	1,04	13

In der erläuterten Beziehung zwischen dem inneren Potential des Metalls und der Brechung von Elektronenwellen spielten die Arbeiten des sowjetischen Physikers W. E. Laschkarow eine große Rolle.

Übungen: 1. Es ist der Brechungsindex von Platin für einen Elektronenstrahl mit der Energie von 240 eV zu berechnen, der unter dem Winkel von 30° auf die

Platinoberfläche auffällt. Das innere Potential von Platin ist gleich 12 V, die Gitterkonstante beträgt 3,9 Å.

2. Bei den vorigen Aufgaben ist der Brechungswinkel des Elektronenstrahls auszurechnen.

§ 135. Die experimentelle Bestätigung der de Broglieschen Hypothese Die Methoden nach v. Laue und Debye-Scherrer

Zur Beobachtung der Interferenz von Röntgenstrahlen an Kristallen wird nicht nur nach der Methode von Bragg, sondern auch nach zwei anderen bedeutenden Verfahren gearbeitet: dem nach v. Laue und dem nach Debye-Scherrer. Beide Methoden können ebenfalls für die Darstellung der Interferenz von de Broglieschen Wellen benutzt werden. Die v. Lauesche Methode, mit der zum ersten Male die Interferenz von Röntgenstrahlen an Kristallen gezeigt wurde, besteht darin, daß ein schmales Bündel von Röntgenstrahlen mit kontinuierlichem Spektrum einen Kristall durchdringt. Die hierbei erhaltenen Interferenzstrahlen werden auf einer Photoschicht in Gestalt eines Systems symmetrischer Flecke fixiert (siehe § 33).

Der Grund, aus dem zum Gelingen des v.-Laue-Versuches das kontinuierliche Spektrum der Röntgenstrahlen notwendig ist, wurde ausführlich im § 33 erklärt. Jedoch ist es im Falle der Elektronen experimentell unmöglich, ein Bündel mit einer Gesamtheit stetig verteilter Geschwindigkeiten zu erhalten: alle die Elektronenquelle verlassenden Elektronen haben dieselbe Geschwindigkeit, oder, genauer gesagt, sie besitzen eine in engen Grenzen liegende Geschwindigkeitsverteilung. Wenn wir daher den Elektronenstrahl auf den Kristall richten, so werden wir allgemein den zur Darstellung der v. Laueschen Interferenz notwendigen Bedingungen nicht genügen. Wir müssen Schritt für Schritt die Bedingungen aufsuchen, bei denen das dem bestimmten Interferenzstrahl entsprechende Maximum entsteht, indem wir nämlich die Geschwindigkeit der Elektronen (d. h. das Beschleunigungspotential) stetig ändern und gleichzeitig die Lage des Kollektors, der die vom Kristall reflektierten Elektronen aufnimmt, variieren.

Der praktische Versuch mit Elektronen, der dem v. Laueschen Versuch analog ist, wurde von Davisson und Germer auf folgende Weise durchgeführt. Ein Nickel-Einkristall, der kubisch kristallisiert, ist in der in Abb. 189 gezeigten Weise angeschliffen [parallel zur Ebene mit dem kristallographischen Index (111)]. In Abb. 189 sind drei charakteristische Lagen des auf diese Weise angeschliffenen Kristalls angegeben. In einer von ihnen (Azimut A) geht die durch die Kollektorachse und den Strahl festgelegte Ebene durch eine der Dreieckshöhen; in der anderen Lage halbiert sie eine Dreiecksseite (Azimut B), und in der dritten Lage (Azimut C) liegt sie einer Dreiecksseite parallel.

Der Unterschied zwischen den Versuchsbedingungen in diesen drei Azimuten ist aus der Abb. 190 ersichtlich. Die angeschliffene Kristalloberfläche ist mit regelmäßigen Atomreihen bedeckt. Sie kann als Gesamtheit linearer Gitter betrachtet werden; hierbei sind die Gitterkonstanten in verschiedenen Azimuten ungleich: zum Beispiel sind sie im Azimut A gleich 2,15 Å und im Azimut B gleich 1,24 Å.

Die experimentelle Einrichtung erlaubte, den Kristall um die vertikale Achse zu drehen und den Kollektor in eine beliebige Lage um die vertikale Achse zu verstellen.

In dem Versuch von Davisson und Germer wurde ein Elektronenbündel senkrecht auf die geschliffene Ebene gerichtet und die Intensität der Elektronenreflexion unter verschiedenen Winkeln bei festem Kristall mit dem Kollektor ge-

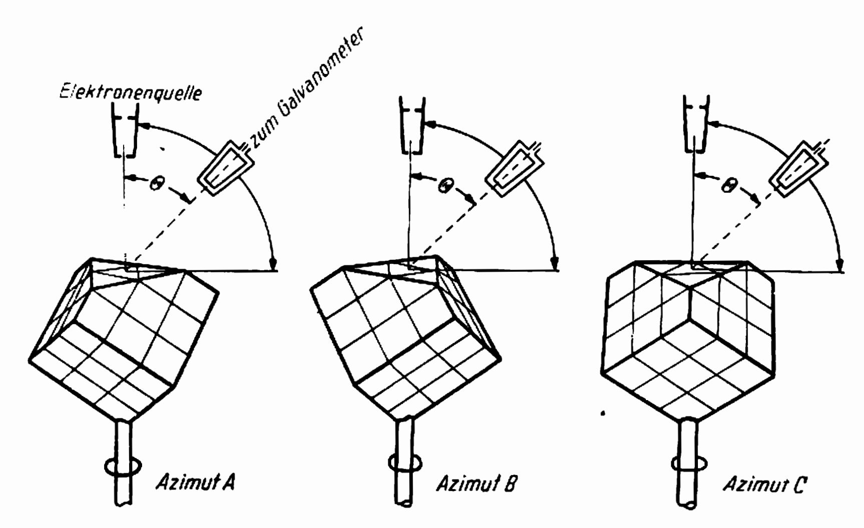


Abb. 189. Schema der Beugungsversuche

messen. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abb. 191 durch Polardiagramme der Reflexionsintensität im Azimut *A* bei verschiedenen Elektronengeschwindig-

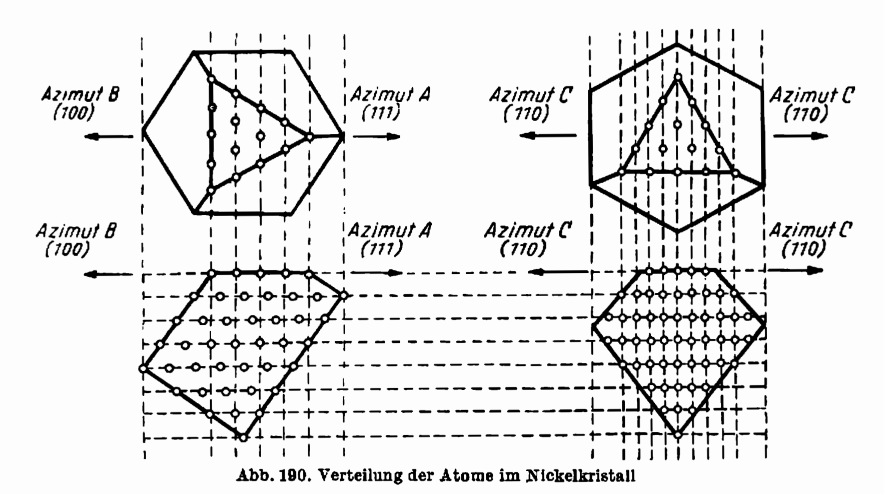


Abb. 190. Verteilung der Atome im Nickelkristall

keiten (d. h. bei verschiedener de Broglie scher Wellenlänge) veranschaulicht. Hieraus ist ersichtlich, daß bei der Elektronengeschwindigkeit von 44 eV das Maximum unter dem Winkel von 50° kaum wahrnehmbar ist (Abb. 191, a); bei 54 eV erreicht

es seine vollständige Entwicklung und nimmt bei größerer Geschwindigkeit von neuem ab; es verschwindet dann bei 68 eV. Der Versuch wurde auf folgende Weise abgewandelt: die Lage des Kollektors und die Elektronengeschwindigkeit wurden

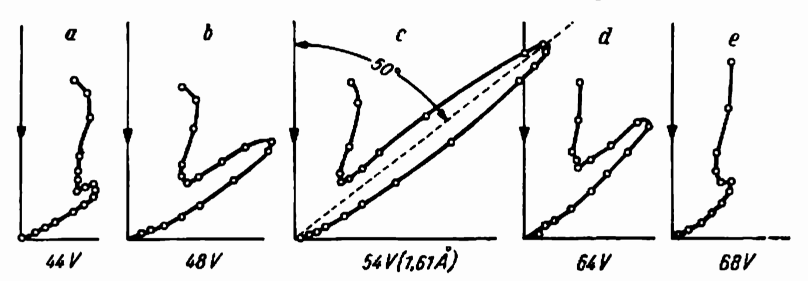


Abb. 191. Anwachsen und Verschwinden der Interferenzspitze im Azimut *A*

konstant gehalten (beispielsweise entsprechend der Daten der Abb. 191, c), der Kristall wurde um kleine Winkel um die vertikale Achse gedreht, und jedesmal wurde der entsprechende Kollektorstrom gemessen. Aus Abb. 189 ist ersichtlich, daß der Kristall aus Symmetriegründen bei der Drehung dreimal mit der Ausgangslage über-

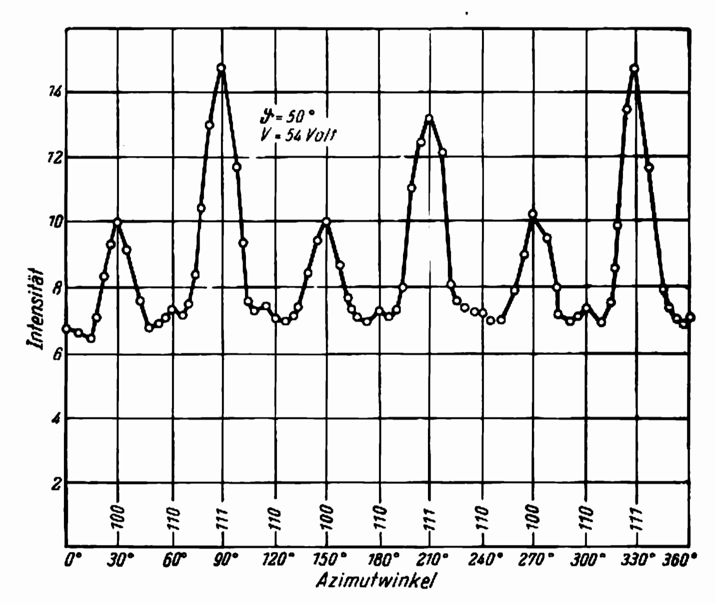
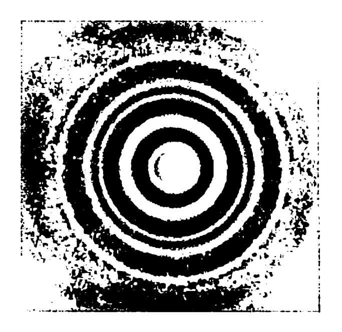


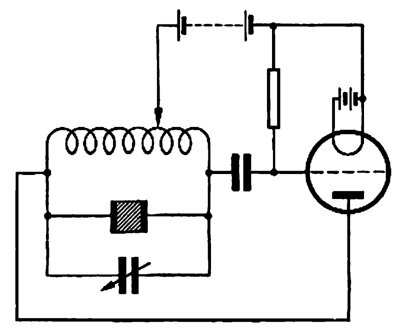
Abb. 192. Azimutale Verteilung der Intensität bei Drehung des Kristalls

einstimmen muß. Deshalb müssen sich die scharfen Maxima nach 120° wiederholen. Die Abb. 192 zeigt, daß dies auch tatsächlich beobachtet wird. Die kleinen Buckel, die auf dieser Zeichnung zwischen je zwei ausgeprägten Maxima sichtbar sind, entsprechen den kaum wahrnehmbaren Maxima für die Elektronen von 54 eV in den Azimuten *B* und *C*.

Schließlich wurde auch die dritte Untersuchungsmethode für die Interferenz von Röntgenstrahlen, die Methode von DEBYE-SCHERRER, zum Nachweis der Interferenz von Elektronenbündeln benutzt. Geht ein schmales Bündel von Röntgenstrahlen durch ein feinkristallines Pulver oder durch eine dünne Metallfolie aus Mikrokristallen hindurch, so wird es unter diesen Kristallen immer solche geben, die derart gerichtet sind, daß der betreffende Einfallswinkel gerade die Beziehung von BRAGG-WULF erfüllt. An solchen Kristallen erleiden die Röntgenstrahlen eine Reflexion, wobei alle reflektierten Strahlen bei gegebenem Wert φ in der Formel von BRAGG-WULF auf der Oberfläche eines Kegels liegen. Bringen wir in den Weg der gestreuten Strahlen eine photographische Schicht, die senkrecht zur Richtung des Primärbündels orientiert ist, so erhalten wir auf ihr eine Reihe von Kreisen. Die gleichen Bilder erhalten wir, wenn ein Elektronenbündel durch eine dünne metallische Folie hindurchgeht: die gestreuten Elektronen ergeben auf der Photoschicht ein System von Interferenzringen.

Aufnahmen von Elektroneninterferenzen nach DEBYE wurden zum ersten Male erfolgreich von G. P. THOMSON mit schnellen Elektronen (17500—56500 eV) und von P. S. TARTAKOWSKI mit verhältnismäßig langsamen Elektronen (bis 1700 eV) hergestellt.


Abb. 193. Elektroneninterferenzen an dünnen Goldfolien


Abb. 194. Elektroneninterferenzen an dünnen Kupferfolien

In den Abb. 193 und 194 sind zwei Aufnahmen wiedergegeben, die bei Folien aus Gold und Kupfer gefunden wurden. In beiden Fällen wurden die typischen Interferenzringe gefunden. Auf sehr einfache Art kann gezeigt werden, daß diese Ringe durch die gestreuten Elektronen selbst und nicht etwa durch sekundäre Röntgenstrahlen gebildet werden: beim Einschalten eines Magnetfeldes verschiebt und verzerrt sich das gesamte Interferenzbild, während ein von Röntgenstrahlen erhaltenes Interferenzbild vollständig unverändert bleiben würde.

Eine quantitative Prüfung kann auf folgende Weise durchgeführt werden. Aus geometrischen Überlegungen ist leicht zu zeigen, daß für eine gegebene Metallfolie bei unveränderter Entfernung bis zur Photoschicht zwischen dem Radius r des Beugungsringes und der Wellenlänge λ die Beziehung

$$\frac{r}{\lambda} = \text{const} \tag{135,1}$$

gelten muß. Da bei diesen Versuchen (wegen der starken Absorption langsamer Elektronen durch die Metallfolie) Elektronen benutzt werden müssen, deren Ener-

gie einige Kiloelektronenvolt beträgt, wird der einfache Ausdruck für die Wellenlänge $\lambda = 12{,}25\, V^{-1/2}$ ungenau, und es muß eine Formel mit einer den relativistischen Effekt berücksichtigenden Korrektur benutzt werden[1]):

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\,(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6}\, V)\,. \qquad (133{,}3)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (135,1) ein, dann erhalten wir

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{r V^{1/2}}{12{,}25\,(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6}\, V)} \approx \frac{r V^{1/2}}{12{,}25}\,(1 + 0{,}489 \cdot 10^{-6}\, V) = \text{const.} \qquad (135{,}2)$$

In der Tabelle XVIII sind die Versuchswerte für Goldfolien angegeben. Wie aus der dritten Tabellenspalte zu ersehen ist, wird die geforderte Konstanz befriedigend erfüllt.

---

[1]) Diesen Ausdruck erhält man auf folgende Weise. In die DE BROGLIEsche Formel

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

muß für die Masse m der relativistische Ausdruck

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

eingesetzt werden. Es wird dann

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

erhalten. Drücken wir jetzt die Geschwindigkeit v durch das Beschleunigungspotential aus und benutzen den Ausdruck für die kinetische Energie aus der Relativitätstheorie (siehe § 61), so ergibt sich

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = eV\,.$$

Wir finden hieraus

$$v = c\,\frac{\sqrt{e^2 V^2 + 2 m_0 c^2 e V}}{m_0 c^2 + eV}\,.$$

Setzen wir dies in die DE BROGLIEsche Formel ein, dann erhalten wir

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 e V \left(1 + \frac{eV}{2 m_0 c^2}\right)}}$$

oder, wenn wir das Beschleunigungspotential in Elektronenvolt ausdrücken,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{m_0 e}{150}\, V \left(1 + \frac{eV}{600\, m_0 c^2}\right)}} = \sqrt{\frac{h^2}{m_0 e}}\sqrt{\frac{150}{V}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{600\, m_0 c^2}}}\,.$$

Setzen wir die Zahlenwerte der Konstanten ein, dann erhalten wir

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \cdot \frac{1}{(1 + 0{,}978 \cdot 10^{-6}\, V)^{1/2}} \approx \sqrt{\frac{150}{V}}\,(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6}\, V)\,.$$

Dies ist aber die im Text angegebene Formel.

Schließlich können wir noch die Gitterkonstante verschiedener Kristalle aus den DEBYE-SCHERRER-Aufnahmen errechnen und mit den Resultaten vergleichen, die sich für die gleichen Kristalle mit Hilfe von Röntgenstrahlen ergeben. In dem einen wie dem anderen Fall wurden Zahlen erhalten, die befriedigend miteinander übereinstimmen (siehe Tabelle XIX). Gegenwärtig wurde auf der Grundlage dieser Interferenzversuche an Elektronenbündeln eine neue Methode der elektronographischen Analyse entwickelt, die in Genauigkeit und praktischer Anwendungsmöglichkeit nicht nur der röntgenographischen Analyse nicht nachsteht, sondern in einigen Fällen weit bequemer ist.

Tabelle XVIII

V (Volt)	r (cm)	$rV^{1/2}(1+0{,}489\cdot 10^{-6}\,V)$
24 600	2,50	398
31 800	2,15	390
39 400	2,0	404
45 600	1,86	405
54 300	1,63	388

Tabelle XIX

Metall	Gitterkonstante (in Å) aus der Interferenz von Elektronen	Gitterkonstante (in Å) aus der Interferenz von Röntgenstrahlen
Al	4,035	4,063
Au	3,99—4,20	4,06
Pt	3,89	3,91
Pb	4,99	4,92
Fe	2,85	2,86

Übung: Ein Elektronenbündel der Energie von 30 keV durchdringt eine Aluminiumfolie. Unter Annahme der Gültigkeit der BRAGG-WULFschen Formel ist der Glanzwinkel für das Interferenzbild erster Ordnung zu berechnen. Die Gitterkonstante für Aluminium ist aus der Tabelle XIX zu entnehmen.

§ 136. Interferenzerscheinungen bei Molekularstrahlen

Nach der Theorie von DE BROGLIE müssen nicht nur die Elektronen Welleneigenschaften besitzen, sondern auch beliebige materielle Teilchen, also Atome und Ionen. Da nach der DE BROGLIEschen Formel die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{mv}$ der Masse umgekehrt proportional ist, wird λ bereits für die leichtesten Atome sehr klein sein. Die experimentelle Verwirklichung der Interferenzerscheinungen für Atome ist daher mit großen Schwierigkeiten verbunden. Die bedeutende Vervollkommnung der Versuchstechnik mit den sogenannten Molekularstrahlen, d. h. gerichteten Bündeln neutraler Atome oder Moleküle, erlaubte auch in diesem Fall, die Interferenzerscheinungen deutlich zu beobachten. In der Abb. 195 sind die Intensitätskurven der Reflexion von Heliumatomen an Lithiumfluorid-Kristallen dargestellt und in der Abb. 196 dieselben Kurven für die Reflexion von H_2-Molekülen. In dem einen wie dem anderen Fall ist eine Reihe Interferenzmaxima erkennbar.

Die obere Kurve der Abb. 196 ist bei einer Temperatur von 580° K und die untere Kurve bei 290° K aufgenommen. Im ersten Fall liegen die Nebenmaxima näher zum zentralen Maximum, wie dies auch zu erwarten ist, wenn wir bedenken, daß die Temperaturerhöhung eine Geschwindigkeitsvergrößerung der Atome und

folglich eine Verringerung der de Broglieschen Wellenlänge bedeutet. Die Berechnung der Lage dieser Maxima ergibt Resultate, die sehr gut mit den experimentellen Werten übereinstimmen. Auf diese Weise bestätigen die Versuche mit

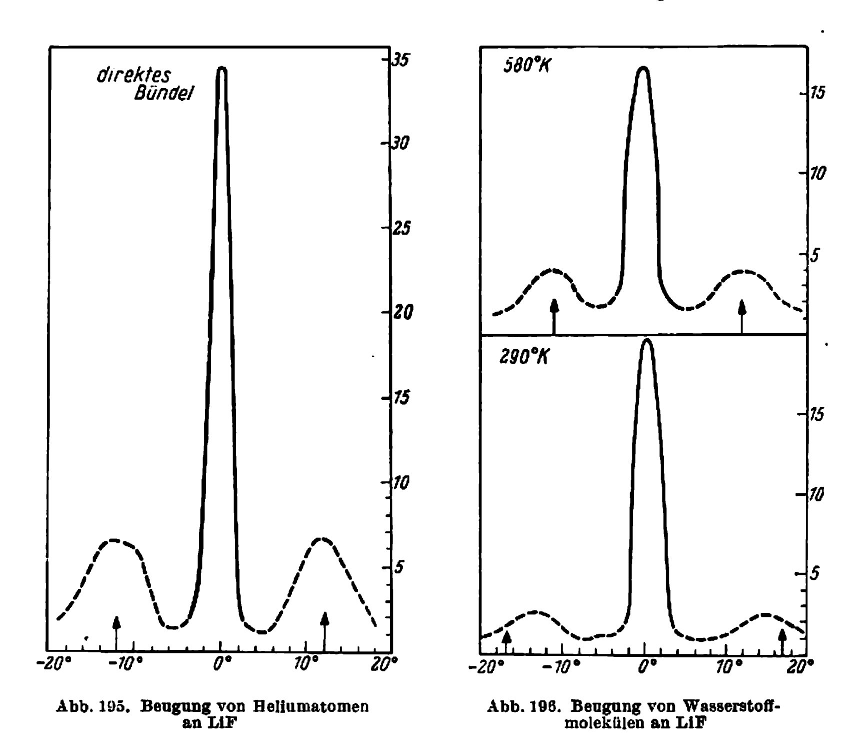


Abb. 195. Beugung von Heliumatomen an LiF

Abb. 196. Beugung von Wasserstoffmolekülen an LiF

Molekularstrahlen nicht nur qualitativ die Existenz von Materiewellen, sondern rechtfertigen auch quantitativ die de Brogliesche Formel für schwere Teilchen.

Mit besonderer Anschaulichkeit erwiesen kürzlich die Beugungsversuche mit Neutronen die Welleneigenschaften der schweren Teilchen und die Richtigkeit der de Broglieschen Formel.

§ 137. Das Wellenpaket und das Teilchen

In den vier letzten Paragraphen überzeugten wir uns davon, daß die Interferenzversuche, die mit Elektronen oder auch gesamten Atomen unternommen wurden, die Wellennatur dieser „Teilchen" ebensogut bestätigen, wie es für die entsprechenden Versuche mit Licht der Fall ist. Wir treffen wieder auf die Dualität, die wir zuerst beim Licht beobachteten. Bereits in der ersten Entwicklung der Quantentheorie wurde der reizvolle Versuch unternommen, den Widerspruch des Welle-Korpuskel dadurch zu lösen, daß das Teilchen als *Wellenpaket* betrachtet wurde. Die Grundlage hierfür war folgende Tatsache. Ein Elektron oder ein anderes materielles Teilchen kann keine ebene harmonische Welle darstellen, da eine analoge Welle unbegrenzt,

das Teilchen aber im Raum und in der Zeit lokalisiert ist, in einem bestimmten Zeitpunkt also einen bestimmten Ort im Raum einnimmt. Wir sahen jedoch (im § 126), daß aus ebenen Wellen, deren Wellenvektoren $\mathfrak{k}$ entsprechend gewählt wurden, Wellenpakete beliebig kleiner Ausdehnung aufgebaut werden können. Kann nicht das Teilchen als Wellenpaket betrachtet werden? Es zeigte sich, daß die analoge Hypothese ihre Bestätigung in jener bemerkenswerten Eigenschaft der de Broglieschen Wellen findet, daß ihre Gruppengeschwindigkeit, jene Geschwindigkeit also, mit welcher sich das Maximum des Paketes verschiebt, gerade gleich der Geschwindigkeit v des Teilchens ist

$$g = v. \tag{132,2}$$

Wie verlockend diese einfache Idee auch aussehen mag, bei näherer Betrachtung erweist sie sich als vollkommen falsch. Die Lösung lautet folgendermaßen. Die brauchbaren Eigenschaften des Paketes, die wir im § 126 fanden, seine Widerstandsfähigkeit und Bewegung als Ganzes mit Gruppengeschwindigkeit, geben nicht alle Eigenschaften des Paketes an. Sie wurden von uns nur als erste Näherungen erhalten, da wir für die Bewegung des Paketes im § 126 die angenäherte Beziehung zwischen ν und k

$$\nu(k) \approx \nu(k_0) + (k - k_0)\left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0$$

benutzten und alle nachfolgenden Glieder der Entwicklung vernachlässigt haben. Wenn wir die Rechnung genau durchführen, dann erhalten wir ein etwas anderes Resultat; obgleich sich das Maximum des Paketes mit der Geschwindigkeit $\frac{d\nu}{dk}$ verschiebt, die gleich der Geschwindigkeit v der de Broglieschen Wellen ist, behält das Paket selbst bei der Bewegung in einem dispergierenden Medium seine Form und Abmessungen nicht bei, sondern es verbreitert sich, verflacht allmählich.

Es ist nicht schwer, den Grund dieser Auflösung aus den folgenden qualitativen Überlegungen zu verstehen. Nehmen wir an, daß in einem bestimmten Zeitintervall sich ein Paket auf dem Wege der Superposition ebener Wellen gebildet hat. Zu seiner Bildung war die Addition von Wellen mit den Wellenlängen oder, was dasselbe ist, mit den Wellenzahlen k notwendig, die sich stetig in dem Intervall $\pm\Delta k$ ändern. Zeigt das Medium keine Dispersion, so breiten sich die einzelnen Wellen mit derselben Geschwindigkeit aus, und das Paket bleibt erhalten. Ist aber eine Dispersion vorhanden, dann breiten sich die das Paket bildenden ebenen Wellen mit verschiedener Phasengeschwindigkeit aus: die schnelleren werden vorauslaufen und die langsameren zurückbleiben. Infolgedessen werden schon im folgenden Zeitintervall die zur Bildung des Paketes passenden Phasenbeziehungen zwischen den ebenen Wellen verletzt, und das Paket wird sich ausdehnen, zerfließen. Die Geschwindigkeit dieses Zerfließens wird durch den Unterschied der Gruppengeschwindigkeiten zwischen den schnellsten und den langsamsten Wellen charakterisiert, durch die Größe $\frac{d^2\nu}{dk^2}\cdot\Delta k$ also; wir haben aber gerade das $\frac{d^2\nu}{dk^2}$ enthaltende Glied bei der ersten Betrachtung der Pakete vernachlässigt.

Ziemlich umfangreiche Rechnungen, die wir hier nicht durchführen wollen, zeigen, daß das aus de Broglieschen Wellen gebildete Paket, das im Zeitpunkt $t = 0$ die Form der Gaussschen Fehlerkurve

$$u(x, 0) = Ce^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

hat, worin u die Amplitude des Paketes im Punkt mit der Koordinate x und die Größe b die halbe Breite des Paketes im Zeitpunkt $t = 0$ charakterisieren, seine Ausdehnung in einem Zeitraum verdoppeln wird, der durch die Formel

$$t = 2\pi \sqrt{3}\, \frac{b^2 m}{h}$$

ausgedrückt ist, wobei m die Masse des Teilchens und h die PLANCKsche Konstante bedeuten. Für ein Teilchen mit der Masse $m = 1$ g, das eine Ausdehnung von 2 mm ($b = 0{,}1$ cm) besitzt, verdoppelt sich das entsprechende Paket in $6 \cdot 10^{17}$ Jahren. Aber für ein Teilchen mit der Masse eines Elektrons ($m = 0{,}9 \cdot 10^{-27}$ g) ist bei $b \approx 10^{-12}$ cm die Zeit $t \approx 1{,}6 \cdot 10^{-26}$ s; dies bedeutet, daß das einem Elektron entsprechende Paket augenblicklich zerplatzen würde, was aber natürlich den elementaren Beobachtungen widerspricht.

§ 138. Die statistische Deutung der DE BROGLIE-Wellen

In dem vorigen Paragraphen sahen wir, daß der Versuch, die Teilchen als Wellenpakete zu deuten, einen Mißerfolg erlitt: die Pakete zerlaufen und verschwinden, die „Teilchen" dagegen besitzen diese Eigenschaft nicht.

Allgemeine Überlegungen weisen außerdem darauf hin, daß atomare Teilchen nicht als Wellenpakete betrachtet werden können. Als notwendiges Kennzeichen der Elementarteilchen erscheint ihre Unteilbarkeit. Wir stellen die Behauptung auf, daß die negative Elektrizität deshalb aus Elektronen besteht, weil beim Umladungsvorgang nur eine Elektrizitätsmenge übertragen werden kann, die gleich der Ladung entweder eines oder einiger Elektronen ist, in jedem Fall also gleich einer ganzen Zahl. Dieselben Betrachtungen über den Photoeffekt führen zu dem Schluß der Existenz von Photonen, da es sich zeigt, daß monochromatisches Licht der Frequenz ν nur in ganzen Photonen $h\nu$ die Energie übernimmt oder sie im Absorptionsprozeß abgibt, niemals aber in Teilen eines Photons.

Diese Eigenschaft der Unteilbarkeit besitzen die Wellen nicht. An der Grenze zweier Medien verschiedener Phasengeschwindigkeit wird die Welle in eine reflektierte und eine gebrochene zerlegt, beim Durchgang durch einen Kristall wird sie in eine Anzahl von Beugungsbündeln aufgeteilt. Wenn wir das Elektron als Wellenpaket betrachten würden, dann müßte zum Beispiel bei der Beugung eines sehr schwachen Bündels, wenn nämlich die Elektronen einzeln durch den Kristall hindurchgehen, jedes abgebeugte Bündel nur einen Teil eines Elektrons enthalten, was aber tatsächlich nicht der Fall ist.

Wenn jedoch die Teilchen in solchen Fällen wie Reflexion, Brechung und Beugung ungeteilt erhalten bleiben, dann können wir behaupten, daß das Teilchen beim Auffallen auf die Trennfläche zweier Medien *entweder* reflektiert wird *oder* in das zweite Medium übergeht. In einem solchen Fall kann die Verbindung zwischen den Wellen und den Teilchen nur statistisch gedeutet werden: das Amplitudenquadrat der Welle an dem Ort, an dem ihre Intensität gemessen wird, ist ein Maß für die *Wahrscheinlichkeit*, das Teilchen an diesem Ort zu finden.

Um diese Deutung zu verstehen, betrachten wir einen typischen Interferenzversuch: eine ebene Welle fällt auf einen undurchsichtigen Schirm, in den zwei

Löcher S_1 und S_2 gebohrt sind (Abb. 197). Es entsteht auf einem genügend weit entfernten Schirm (Photoschicht, Fluoreszenzschirm) ein Interferenzbild, das aus aufeinanderfolgenden hellen und dunklen Streifen besteht. Die Erklärung dieses Bildes vom Wellenstandpunkt ist allgemein bekannt: wir müssen uns vorstellen, daß die ebene Welle von links auf den Schirm I fällt; die Bohrungen S_1 und S_2 werden zu Zentren HUYGHENSscher Kugelwellen, die sich rechts vom Schirm ausbreiten und miteinander interferieren. Auf dem Schirm II, wo der Gangunterschied dieser Wellen gleich null oder gleich einer ganzen Zahl von Halbwellen ist, erhalten wir eine maximale Amplitude und damit das Maximum des hellen Streifens. Dort aber, wo der Gangunterschied gleich einer ungeraden Zahl von Halbwellen ist, werden die Wellen bei der Interferenz einander auslöschen, die Amplitude ist gleich null, und wir erhalten einen dunklen Streifen.

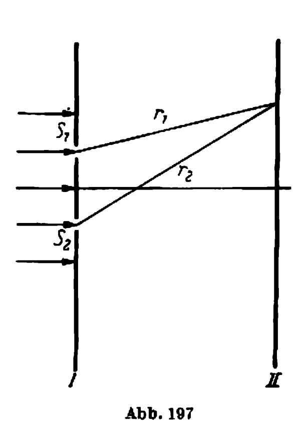


Abb. 197

Wie können wir nun die Entstehung dieser Streifen verstehen, wenn wir die Elektronen als unteilbare „Teilchen“ betrachten? Stellen wir uns vor, daß das auffallende Elektronenbündel sehr schwach ist. Wie der Versuch zeigt, hängt der Charakter des Interferenzbildes nicht von der Intensität ab. Nehmen wir an, daß die Photoschicht das Einfallen der einzelnen Elektronen registrieren kann. (Im weiteren Text werden wir oft von Elektronen sprechen, denken aber an beliebige Mikroteilchen.) Dann werden beim Durchgang eines schwachen Elektronenstromes durch den Schirm I zu Anfang willkürlich verteilte dunkle Punkte auf der Photoschicht erscheinen, die Spuren des Auftreffens von Elektronen. Es könnte noch vermerkt werden, daß die Zahl dieser Flecke, die Zahl der Elektronentreffer also, an den Punkten der Maxima des Interferenzbildes größer ist. Bei hinreichend langer Versuchsdauer müssen diese einzelnen Spuren die Interferenzstreifen bilden. Auf diese Weise sind die hellen Interferenzstreifen diejenigen Orte, auf die die Elektronen öfter auftreffen; die dunklen Streifen diejenigen Orte, wo sie überhaupt nicht auffallen. (Hier wird das Positiv dargestellt. Wie sich von selbst versteht, sind die Orte der Photoschicht dunkel, auf die die maximale Zahl von Elektronen auftreffen.)

Wenn wir jetzt diese Überlegungen nicht auf eine große Zahl von Elektronen anwenden, sondern auf die einzelnen Elektronen, so können wir auch sagen, daß die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron aufzufinden, dort am größten ist, wo die Amplitude des Wellenfeldes ihren maximalen Wert hat, und null dort, wo die Amplitude null ist. Da nun die Amplitude sowohl positiv als auch negativ sein kann, die Wahrscheinlichkeit aber stets eine positive Zahl ist, so müssen wir die Wahrscheinlichkeit durch das Quadrat der Amplitude charakterisieren.

Vereinbaren wir eine solche statistische Deutung der DE BROGLIEschen Wellen, dann können wir auch die bequeme Vorstellung der Wellenpakete beibehalten. Wir nehmen ein Wellenpaket derart an, daß es jenes Raumgebiet einnimmt, in dem sich das Elektron zu irgendeiner bestimmten Zeit befindet, und überlassen das Paket sich selbst. Suchen wir jetzt die Form des Paketes zu irgendeinem späteren Zeitpunkt t, so wird das Quadrat seiner Amplitude an dem einen oder anderen

Ort der Wahrscheinlichkeit proportional sein, das Elektron an diesem Ort im Zeitpunkt t zu finden.

§ 139. Die Ungenauigkeitsrelation

Die statistische Deutung der DE BROGLIEschen Wellen, die in dem vorigen Paragraphen betrachtet wurde, erlaubt, die auf theoretischem Wege erhaltenen Resultate mit den experimentellen Tatsachen zu verbinden. Es bleibt jedoch noch die Frage nach der Natur der Mikroteilchen: der Elektronen, Photonen usw. Die Grundschwierigkeit liegt hier darin, daß wir zur Beschreibung der experimentellen Tatsachen sowohl das Teilchenbild als auch das Wellenbild benutzen müssen. Die Elektronen z. B. zeigen im Versuch mit der WILSON-Kammer scharf begrenzte Spuren, d. h., sie benehmen sich wie Geschosse, die sich auf einer bestimmten Flugbahn bewegen, und geben andererseits bei einem Durchgang durch mikrokristalline Folien helle und dunkle Interferenzringe. Sie verhalten sich also wie Wellen, die dem Prinzip der Superposition unterworfen sind. Da die Eigenschaften von Teilchen und Wellen nicht nur sehr verschieden sind, sondern in vielen Beziehungen einander ausschließen, die Elektronen aber zweifellos eine einheitliche Natur haben, so muß gefolgert werden, daß die Elektronen tatsächlich nicht vollständig weder als das eine noch als das andere erscheinen, sondern daß die Wellen- und Teilchenbilder in einigen Fällen passen und in anderen Fällen sich dagegen als untauglich erweisen. Die Eigenschaften der Mikroteilchen sind so merkwürdig, ihr Verhalten dem der üblichen Mikroteilchen so unähnlich, daß wir für sie kein passendes Vorbild haben. Trotzdem wir zur Beschreibung *ein und derselben Objekte* sowohl das Wellen- als auch das Korpuskelbild anwenden müssen, ist dennoch klar, daß wir diesen Objekten *nicht alle* Eigenschaften der Teilchen und *nicht alle* Eigenschaften der Wellen zuschreiben können. Beispielsweise müssen die Welleneigenschaften des Elektrons unvermeidlich irgendwelche Beschränkungen in der Anwendbarkeit der das Teilchen in der klassischen Mechanik charakterisierenden Begriffe bedingen.

Wir werden jetzt sehen, welche Beschränkungen auftreten. In der klassischen Mechanik haben die Teilchen die folgenden Grundeigenschaften: jedes Teilchen nimmt in einem beliebigen Zeitpunkt einen genau definierten Ort im Raum ein (wobei unter „Ort" die Koordinaten des Schwerpunktes verstanden werden) und besitzt einen bestimmten Impuls [für Teilchen mit einer Ruhmasse ungleich null entspricht dem bestimmten Impuls ($p = mv$) eine bestimmte Geschwindigkeit v]. Die gleichzeitige Bestimmung der Lage und der Geschwindigkeit erscheint als die charakteristische Eigenschaft makroskopischer Teilchen, so daß in der klassischen Physik der „Zustand" des Systems von Teilchen vollständig durch die Gesamtheit aller Koordinaten und aller ihnen entsprechenden Impulse charakterisiert wird. Wir werden nun sofort sehen, daß gerade die Welleneigenschaft der Elektronen eine wesentliche Einschränkung einer *solchen* Beschreibung des Zustandes eines Systems von Mikroteilchen mitbringt.

Nehmen wir an, daß uns die Lage eines Mikroteilchens auf der x-Achse mit einer gewissen Ungenauigkeit Δx bekannt ist, so daß wir behaupten können, das Teilchen befindet sich irgendwo zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$. Jetzt denken wir daran, daß alle Tatsachen in der Atomphysik auch mit Hilfe des Wellenbildes beschrieben werden können (§§ 128—130). Die Tatsache, daß die Lage des Teilchens nur mit

einer gewissen Ungenauigkeit Δx bekannt ist, wird in dem Wellenbild offensichtlich dadurch beschrieben, daß die Amplitude der Wellenfunktion nur in einem Bereich von null verschieden ist, der annähernd gleich Δx ist. Wie wir wissen, kann eine solche Funktion durch Superposition harmonischer Wellen aufgebaut werden, erscheint selbst aber nicht als harmonische Welle. Es sind ihr daher keine bestimmten Werte ν und k zuzuschreiben, d. h., die im Raum begrenzte Wellenfunktion stellt sich als ein *Wellenpaket* dar, für dessen Aufbau durch Superposition Wellen mit sich stetig in den Grenzen des bestimmten Intervalls Δk änderndem Wellenvektor $\mathfrak{k}$ addiert werden müssen. Die Beziehung zwischen der Ausdehnung Δx des Paketes und dem Intervall Δk wird bekanntlich durch die Bedingung

$$\Delta x\, \Delta k_x \geqq 1 \qquad (126,5)$$

gegeben. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Ungleichung mit der PLANCKschen Konstante h und bedenken, daß nach dem DE BROGLIEschen Postulat $hk_x = p_x$ ist, dann erhalten wir

$$\Delta x\, \Delta p_x \geqq h\,. \qquad (139,1)$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß x und p_x nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben können: ist der Wert von x bestimmt, d. h. ist $\Delta x = 0$, dann ist $\Delta p_x \to \infty$, und dies bedeutet, daß p_x keinen bestimmten Wert besitzt und umgekehrt. Sind x und p_x innerhalb der bekannten Grenzen Δx und Δp_x ungenau, so wird zwischen diesen Ungenauigkeiten die Beziehung (139,1) gelten, aus der dann folgt, daß je kleiner Δx, d. h. je genauer die Lage des Teilchens bestimmt ist, um so größer Δp_x, d. h. um so ungenauer die entsprechende Impulskomponente ist.

Für die beiden anderen Koordinaten erhalten wir analoge Ungleichungen [siehe die Formeln (126,6)]:

$$\Delta y\, \Delta p_y \geqq h \qquad (139,1')$$

und

$$\Delta z\, \Delta p_z \geqq h\,. \qquad (139,1'')$$

Diese Ungleichungen werden die HEISENBERGschen Ungenauigkeitsrelationen genannt. *Sie stellen die Begrenzung in der Anwendbarkeit der klassischen Begriffe auf die Mikroteilchen dar, über die wir am Anfang dieses Paragraphen sprachen.* Wie schon gezeigt wurde, ist für makroskopische Teilchen gerade die Möglichkeit einer genauen Bestimmung der Lage und des Impulses in jedem Zeitpunkt charakteristisch. Die Beziehung (139,1) zeigt nun, daß eine solche Beschreibung des Zustandes für die Mikroteilchen seinen Sinn verliert. Dies folgt aus der Beziehung (139,1), nach der Δx und Δp_x nicht *gleichzeitig* gleich null sein können [analog ist es mit Δy und Δp_y und entsprechend mit Δz und Δp_z nach den Beziehungen (139,1′) und (139,1″)]. Hieraus ergibt sich eindeutig, daß es keinen Sinn hat, die Frage nach den gleichzeitigen genauen Werten von x und p_x zu stellen, da bei dem Mikroteilchen solche Werte nicht existieren.

Dies ist eine unvermeidliche Folgerung daraus, daß Elektronen und andere Mikroteilchen neben den korpuskularen Eigenschaften auch Welleneigenschaften zeigen. Die korpuskularen Eigenschaften fordern, daß das Teilchen in Raum und Zeit lokalisiert werden kann. Aber auch eine angenäherte Lokalisierung (endliche Werte von Δx, Δy, Δz) führt dazu, daß das entsprechende Wellenfeld eine begrenzte Ausdehnung haben muß. Hier tritt nun eine Tatsache auf, die für ein beliebiges Wellenfeld gilt: *Auf keinen Fall kann ein Wellenfeld die Gestalt haben, daß es eine begrenzte Ausdehnung besitzt und als Welle mit einem bestimmten*

Wert von λ auftritt (d. h. mit bestimmtem Wert k). Es ist entweder das eine oder das andere möglich: entweder haben wir eine harmonische Welle, die durch einen bestimmten Wert der Wellenlänge λ charakterisiert wird. Eine solche Welle ist unbegrenzt, und das bedeutet, daß nicht die Rede von irgendeiner Lokalisation sein kann; oder wir haben ein begrenztes Wellenfeld, dann aber gibt es keine Welle mit einem bestimmten Wert von λ, sondern es gibt ein Wellenpaket, das ein kontinuierliches Spektrum enthält, und λ ändert sich innerhalb eines bestimmten Intervalles, das um so breiter ist, je schmaler das Paket, d. h. je genauer die Lokalisation ist.

§ 140. Die Bestimmung des Ortes und des Impulses von Mikroteilchen

In dem vorigen Paragraphen leiteten wir die Ungenauigkeitsrelation ab, indem wir von der Doppelnatur des Elektrons ausgingen. Jetzt wenden wir uns den Experimenten zu, mit deren Hilfe die Koordinaten des Elektrons und sein Impuls bestimmt werden können. Wie am Schluß des vorigen Paragraphen werden wir uns hierbei streng an die im Versuch festgestellten Tatsachen halten, nämlich an die zweifache, korpuskulare und wellenförmige Natur der Mikroteilchen. Im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen werden wir verfolgen, wie die Anwendbarkeit der für makroskopische Körper passenden Beschreibungsweise auf Mikroteilchen durch die Welleneigenschaften der Mikroteilchen eingeschränkt wird.

Die Erörterung der zur Bestimmung der Koordinate und des Impulses beim Mikroteilchen erforderlichen Experimente ist neben der Anschaulichkeit auch aus anderem Grunde wichtig.

Die Theorie führt zu dem Schluß, daß nicht von den gleichzeitigen, genauen Werten der Koordinate und des Impulses eines Mikroteilchens gesprochen werden kann; wenn man nun aber ein Gedankenexperiment – das wegen *technischer Schwierigkeiten* nicht praktisch verwirklichbar ist – angeben könnte, mit dessen Hilfe diese beiden Größen der Messung mit beliebigem Genauigkeitsgrad zugänglich wären, so würde dies bedeuten, daß es in der Theorie einen inneren Widerspruch gibt.

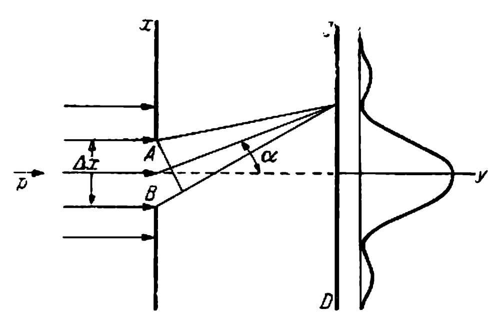


Abb. 198. Bestimmung der Lage eines Elektrons durch Beugung am Spalt

Betrachten wir den experimentellen Aufbau, der die Bestimmung der Lage des Elektrons direkt erlaubt. Auf einen Schirm mit dem Spalt AB der Breite Δx, den wir nachfolgend als „Diaphragma“ bezeichnen wollen, fällt von links ein Elektron in einer Richtung senkrecht zur Ebene des Diaphragmas (Abb. 198). Wir legen die x-Achse parallel und die y-Achse senkrecht zum Diaphragma. Wenn wir das Elektron rechts vom Diaphragma entdecken, beispielsweise durch eine Szintillation, die das Elektron auf dem Fluoreszenzschirm CD hervorruft, oder durch einen Fleck auf der Photoschicht, dann können wir behaupten, daß es durch den Spalt AB hindurchgegangen ist. In diesem Fall kann der „Ort des Elektrons“

im *Augenblick des Durchganges durch den Spalt* offensichtlich als Lage des Spaltes in bezug auf die übrigen Teile des Gerätes bestimmt werden. Ist das Diaphragma genügend starr und mit den übrigen Teilen des Gerätes fest verbunden, so wird dadurch die Lage des Spaltes in bezug auf das gesamte System festgelegt und die Lage des Elektrons im Augenblick des Durchganges durch den Spalt mit der Ungenauigkeit Δx, die gleich der Breite des Spaltes ist, bekannt sein. Mit einer Verengung des Spaltes können wir mit immer größerem Genauigkeitsgrad die Lage des Elektrons bestimmen. Auf den ersten Blick sieht man, daß uns auch der Impuls mit vollständiger Genauigkeit bekannt ist. Ist die Flugrichtung des Elektrons *links* vom Diaphragma senkrecht zur Ebene des Diaphragmas, so wird die x-Komponente des Impulses *links vom Schirm* gleich null und die y-Komponente beispielsweise gleich p sein; der Impuls hat also einen bestimmten Wert. Jedoch erleidet bei dem Durchgang durch den Spalt die ebene de Broglie-Welle, welche die Bewegung des freien Elektrons darstellt, eine Beugung. Dies bedeutet folgendes: Stellen wir uns an Stelle eines Elektrons einen parallelen Strom von Elektronen vor, der durch das Diaphragma in Richtung der y-Achse hindurchgeht, dann erhalten wir auf der Photoschicht ein Beugungsbild, das aus einem verwaschenen Hauptmaximum symmetrisch zur y-Achse und kleineren Maxima höherer Ordnung zu beiden Seiten des Hauptmaximums besteht (siehe die Kurve auf der rechten Seite der Abb. 198). Aus der Form des Beugungsbildes erkennen wir, daß die *Mehrzahl* der Elektronen nach dem Durchgang durch den Spalt die Anfangsrichtung und somit den Wert $p_x = 0$ beibehält. Es gibt jedoch auch Elektronen, die ihre Richtung ändern und auf verschiedene Stellen der Photoschicht mit einer Wahrscheinlichkeit fallen, die dem Verlauf der Kurve auf der rechten Seite der Abb. 198 entspricht.

Richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die folgende wichtige Tatsache. Das oben beschriebene Beugungsbild entsteht nur dann, wenn durch den Spalt eine große Anzahl von Elektronen gleichzeitig hindurchgeht. Man könnte nun denken, daß eine große Anzahl von Elektronen für die Beugung notwendig ist, daß sich aber ein einzelnes Elektron irgendwie anders benimmt. Das trifft jedoch nicht zu. Seit langem ist schon aus der Optik bekannt, daß der Charakter des Beugungsbildes nicht von der Intensität des Lichtes abhängt. Vor nicht langer Zeit konnten die sowjetischen Physiker L. Bibermann, N. Suschkin und W. Fabrikant zeigen, daß bei genügend langer Versuchsdauer ein Beugungsbild auch dann entsteht, wenn einzelne Elektronen durch das Beugungssystem in verhältnismäßig großen Zeitabständen hindurchgehen und sich folglich absolut unabhängig voneinander benehmen. Dieses Bild stimmt mit demjenigen vollkommen überein, das von einem Strom von zehnmillionmal größerer Intensität erzeugt wird. Das zeigt, daß die Änderung der Flugrichtung, die zur Entstehung des charakteristischen Beugungsbildes führt, bei dem Einzeldurchgang der Elektronen durch das Beugungssystem (in dem uns interessierenden Fall durch den Spalt) entsteht.[1]

---

[1]) In dem Versuch von L. Bibermann, N. Suschkin und W. Fabrikant war das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elektronendurchgängen durch das Beugungssystem ungefähr 30000 mal (!) größer als die Zeit, die ein Elektron für den Durchgang durch das ganze Gerät benötigte. Trotzdem unterscheidet sich das entstehende Beugungsbild überhaupt nicht von dem Bild, das von einem Bündel erhalten wird, dessen Intensität 10^7mal größer ist. (Vorträge der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Bd. LXVI, Seite 185, 1949.)

Es entsteht die Frage: Wie ist es *vom korpuskularen Gesichtspunkt* zu verstehen, daß einige Elektronen beim Durchgang durch den Spalt ihre Richtung ändern? Offensichtlich kann das Elektron seine Richtung nur durch eine Wechselwirkung mit den Schirmrändern oder mit dem ganzen Schirm ändern. Auf diese Weise entsteht die Richtungsänderung im Korpuskelbild dadurch, daß das Elektron im Augenblick des Durchganges durch den Spalt einen zusätzlichen Impuls Δp_x in Richtung der x-Achse erhält. Für die Mehrzahl der Elektronen und besonders für solche, die durch das Diaphragma ohne eine Richtungsänderung hindurchgehen und in einem Ort auftreffen, der dem Schwärzungsmaximum der Photoschicht entspricht, ist dieser zusätzliche Impuls gleich null. Da nun aber die Schwärzung kontinuierlich zu beiden Seiten des Maximums abnimmt, muß es neben diesen Elektronen auch noch solche geben, die auf verschiedene Stellen der Photoschicht fallen und folglich bei dem Durchgang durch den Spalt den zusätzlichen Impuls Δp_x erwerben.

Somit können wir behaupten, daß im Augenblick des Durchganges durch den Spalt die Koordinate des Elektrons mit der Ungenauigkeit Δx und der Impuls mit der Ungenauigkeit Δp_x bekannt sind. Wenn wir jetzt den Spalt verengen, um die Genauigkeit der Koordinatenbestimmung zu erhöhen, wird entsprechend die Ungenauigkeit von Δp_x wachsen, da das Hauptbeugungsmaximum um so breiter wird, je enger der Spalt ist. Hieraus folgt, daß unsere Einrichtung um so besser zur Bestimmung der Lage des Elektrons geeignet ist, je größer die Ungenauigkeit des Impulses ist.

Es ist möglich, die Einrichtung jetzt so abzuändern, daß mit ihrer Hilfe die experimentelle Bestimmung von Δp_x möglich ist. Der Impuls des Mikroteilchens kann bestimmt werden, wenn wir das Gesetz der Impulserhaltung auf die Wechselwirkung des Mikroteilchens mit dem Diaphragma, durch das es hindurchgeht, anwenden.

Da bei dem Durchgang durch den Spalt das Teilchen einen zusätzlichen Impuls parallel zum Diaphragma in Richtung der x-Achse erhält, wird das Diaphragma mit dem Spalt einen Rückstoß erleiden, der ebenfalls in der x-Achse, aber in umgekehrter Richtung liegt. Wäre dieser Rückstoß bekannt, so würden wir auch Δp_x kennen, und wenn die y-Komponente ohne Änderung bleibt, würde uns der Impuls des Elektrons im Zeitpunkt seines Durchganges durch den Spalt genau bekannt sein.

Zur Messung des Rückstoßes muß das Diaphragma genügend leicht und beweglich sein. Wenn das Diaphragma bis zum Durchgang des Elektrons in bezug auf die übrigen Teile des Gerätes ruhte, so würden wir durch die Messung der Geschwindigkeit, die es beim Elektronendurchgang erhält, und bei Kenntnis seiner Masse den zusätzlichen Impuls Δp_x finden, den es selbst und folglich auch das Elektron erwirbt.

Ein solches Experiment ist aus technischen Gründen nicht verwirklichbar, weil wir z. B. keinen so leichten Schirm bauen können, daß er durch die Wechselwirkung mit einem Elektron eine merkliche Geschwindigkeit annimmt. Diese Tatsache hat jedoch keinen Einfluß auf die Richtigkeit der Schlüsse, die auf Grund des zu erwartenden Vorganges zu ziehen sind. Tatsächlich unterscheidet sich diese Betrachtung in nichts von der Theorie des Compton-Effektes, bei dem die Anwendungsmöglichkeit des Impulserhaltungsgesetzes auf die Zusammenstöße von Mikroteilchen experimentell bewiesen ist. Ist jedoch das Diaphragma

beweglich, so kann es schon nicht mehr als festes Bezugssystem zur Bestimmung der Lage des Elektrons beim Durchgang durch den Spalt dienen, wie eng letzterer auch sein mag.

Betrachten wir jetzt eine Einrichtung mit unbeweglichem Diaphragma. Wie wir sehen, erlaubt sie die Messung der Lage des Teilchens mit der Ungenauigkeit Δx, die beliebig klein gemacht werden kann. Da wir bei festem Diaphragma den Rückstoß nicht berücksichtigen können, den dieses beim Elektronendurchgang erleidet, so bleibt der zusätzliche von dem Teilchen aufgenommene Impuls in den bekannten Grenzen Δp_x ungenau. Es ist leicht zu zeigen, daß die Ungenauigkeiten Δx und Δp_x durch die Beziehung $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqq h$ verknüpft sind.

Aus der Abb. 198 ist ersichtlich, daß

$$\Delta p_x = p \sin\alpha = \frac{h}{\lambda} \sin\alpha . \tag{140,1}$$

Berücksichtigen wir jetzt das Auftreffen eines Elektrons auf der Photoschicht nur innerhalb der Grenzen des Hauptmaximums der Beugung, so wird α der Winkel zwischen der y-Achse und der Richtung zum ersten Beugungsminimum sein. Die Lage dieses Minimums wird durch die Bedingung bestimmt, daß der Gangunterschied der Wellen, die an den oberen und unteren Diaphragmarändern abgebeugt werden, gleich λ ist. Dies ergibt

$$\Delta x \sin\alpha = \lambda . \tag{140,2}$$

Die Multiplikation von (140,1) und (140,2) ergibt

$$\Delta x \, \Delta p_x = h . \tag{140,3}$$

Berücksichtigen wir auch die Nebenmaxima, so erhalten wir an Stelle der Bedingung (140,3) $\Delta x \cdot \Delta p_x = nh$, und folglich allgemein

$$\Delta x \, \Delta p_x \geqq h . \tag{140,4}$$

Dies ist die Ungenauigkeitsrelation.

Um die quantitative Seite solcher beschränkten Anwendungen klassischer Begriffe auf Mikroteilchen, wie sie von den Ungenauigkeitsrelationen festgestellt werden, abzuschätzen, ist es nützlich, p durch die Geschwindigkeit auszudrücken ($p = mv$), und es folgt aus (140,3)

$$\Delta v = \frac{h}{m \Delta x} . \tag{140,5}$$

Da h eine sehr kleine Größe ist,

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} ,$$

hängt Δv hauptsächlich von dem Verhältnis zwischen den Zahlenwerten h und m ab. Prinzipiell ist zu sagen, daß die Ungenauigkeitsrelation für beliebige makroskopische Massen gelten muß, da bewiesen werden kann, daß die klassische Mechanik als Grenzfall der Quantenmechanik erscheint. Aus der Beziehung (140,5) ist ersichtlich, daß bei Vergrößerung der Masse Δv gegen null strebt, da bei makroskopischen Massen die vernünftigen Werte von Δx auf jeden Fall bedeutend größer als der Zahlenwert von h sind. Im Gegensatz hierzu kann bei Mikroteilchen, bei denen die Größenordnung der Masse nahe der Größenordnung von h ist, die Ungenauigkeit Δv große Werte im Vergleich zu Δx annehmen. Wir zeigen das an zwei Beispielen. Handelt es sich um einen Körper mit der Masse m gleich 1 g, so ist offensichtlich, daß eine Genauigkeit von $\Delta x = 10^{-4}$ cm $= 1\,\mu$

zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes vollkommen genügt. In diesem Fall ist

$$\Delta v = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} = 6{,}6 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}};$$

die Ungenauigkeit der Geschwindigkeit liegt also weit außerhalb der Grenzen der Meßmöglichkeit. Wie zu erwarten war, spielt bei makroskopischen Körpern die Ungenauigkeitsrelation praktisch keine Rolle.

Wenden wir jedoch dieselbe Beziehung auf ein Elektron an, dann wird das erhaltene Resultat ganz anders. Die Masse des Elektrons ist gleich $9 \cdot 10^{-28}$ g $\approx$ 10^{-27} g, also von derselben Größenordnung wie h. Die Größenordnung von Δv hängt offensichtlich von der Genauigkeit der Lagebestimmung, somit von der Größe Δx, ab. Beispielsweise werde gefordert, die Zugehörigkeit eines Elektrons zu einem bestimmten Atom festzulegen. In diesem Fall muß die Genauigkeit der Bestimmung der Lage zumindest $\Delta x = 10^{-9}$ cm sein, da die Abmessungen des Atoms selbst von der Größenordnung 10^{-8} cm sind. Die Beziehung (140,5) ergibt dann

$$\Delta v = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{0{,}9 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-9}} = 7{,}3 \cdot 10^{9}\ \text{cm/s}.$$

Δv ist wenigstens um eine Größenordnung größer als die meßbare Geschwindigkeit selbst (siehe § 86).

Die Tatsache, daß in diesem und analogen Fällen die Größenordnung von Δx die entscheidende Rolle spielt, erlaubt, das scheinbar paradoxe Verhalten der Mikroteilchen in der Wilson-Kammer zu erklären. Tatsächlich beobachten wir hier *bei genügend großer Energie der Teilchen* streng geradlinige Flugbahnen, und es kann keinerlei Anzeichen einer Ungenauigkeit des Impulses, die durch die Welleneigenschaften bedingt ist, beobachtet werden. Bei dieser Erklärung müssen wir bedenken, daß sich bei der Betrachtung der geradlinigen Flugbahnen im Mikroskop diese als Girlande kleiner Nebeltröpfchen darstellen. Das Tröpfchen ist sozusagen ein „Meßgerät", das die Lage des Mikroteilchens angibt. Die Durchmesser des Tröpfchens sind von der Größenordnung 10^{-4} cm; deshalb ist in dem gegebenen Fall $\Delta x = 10^{-4}$ cm und Δp von der Größenordnung 10^{-23} g$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Da nun andererseits die geradlinigen Flugbahnen nur bei sehr großen Energien der Mikroteilchen beobachtet werden, so wird Δp im Vergleich zu p sehr klein sein und das Teilchen sich innerhalb der angegebenen Genauigkeitsgrenzen wie ein klassisches Teilchen verhalten. Allgemein kann gesagt werden, *daß bei sehr großen Energien die de Brogliesche Wellenlänge sehr klein wird und daß wie in der Optik bei sehr kleinen Wellenlängen die geometrische Näherung vollkommen ausreichend ist.* Wenn die Erscheinungen der Beugung nicht berücksichtigt werden, dann können in der Optik ohne große Fehler Lichtstrahlen und bei Mikroteilchen Flugbahnen betrachtet werden.

Übungen: 1. Die Energie eines α-Teilchens, das von Radium ausgestrahlt wird, beträgt $4{,}8 \cdot 10^{6}$ eV. Unter Benutzung der Ungenauigkeitsrelation ist zu klären, bei welcher Genauigkeit der Lagebestimmung des α-Teilchens es noch möglich ist, die Ungenauigkeit Δp des Impulses p selbst zu vernachlässigen. Dasselbe ist für Elektronen mit einer Energie von 10^{8} eV auszuführen. (Hinweis: Bei solchen

Energien verhält sich ein Elektron bereits relativistisch, und sein Impuls muß nach der Formel $p = \frac{h}{\lambda}$ berechnet werden.)

2. Ein Teilchen ist in einem Gebiet „eingeschlossen", dessen lineare Abmessungen von der Größenordnung 10^{-8} cm sind. Wie groß muß die kleinste Energie dieses Teilchens sein, um die Ungenauigkeitsrelationen befriedigend zu erfüllen? Diese Energie ist in erg und in Elektronenvolt auszudrücken.

3. Es ist die Rolle der Ungenauigkeitsrelation in der Mechanik eines Wasserstoffmoleküls abzuschätzen. Bei Kenntnis der Molekülabmessungen ist die minimale vernünftige Genauigkeit der Lagebestimmung ihrer Atome abzuschätzen und die entsprechende Ungenauigkeit des Impulses zu finden.

4. Die NEWTONsche Mechanik wird nicht anwendbar, wenn die DE BROGLIEsche Wellenlänge von der Größenordnung des zu untersuchenden Systems ist. Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt die Anwendbarkeit der NEWTONschen Mechanik auf das Wasserstoffatom und stellen wir uns vor, daß sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit dem Durchmesser $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm bewegt und sein Drehimpuls $\frac{h}{2\pi}$ ist (die erste BOHRsche Wasserstoffbahn). Aus diesen Daten ist die Geschwindigkeit des Elektrons und die DE BROGLIEsche Wellenlänge zu finden.

5. Die analoge Betrachtung führen wir für ein Wasserstoffatom in einem Wasserstoffmolekül durch. Die Masse des Wasserstoffatoms ist aus der Tabelle zu ersehen. Die Geschwindigkeit wird auf folgende Weise bestimmt: Das Wasserstoffmolekül ist als linearer Oszillator anzusehen und die mittlere kinetische Energie $\left(E = \frac{1}{2}kT\right)$ der Atome im Wärmegleichgewicht bei der Temperatur von 300° K zu finden. Die auf diesem Wege ausgerechnete DE BROGLIEsche Wellenlänge ist mit der Amplitudenschwingung des Wasserstoffatoms unter der Annahme, daß ihre Frequenz gleich $10^{14}\,s^{-1}$ ist, zu vergleichen. Dieselben Rechnungen sind bei der Temperatur von 10° K auszuführen und beide Fälle miteinander zu vergleichen.

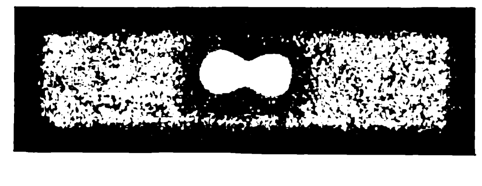
§ 141. Falsche Deutungen der Ungenauigkeitsrelation

Die Ungenauigkeitsrelationen gaben zu verschiedenen falschen Deutungen und idealistischen Entstellungen Anlaß.

Oftmals begegnet man den folgenden Deutungen: „Die Mikroteilchen – Elektronen, Protonen, Photonen – sind sehr klein, aber sie *besitzen* in jedem Zeitpunkt bestimmte Koordinaten und einen bestimmten Impuls, sie benehmen sich also wie stark verkleinerte Abbilder von Billardkugeln oder Schrotkörnchen und unterscheiden sich von ihnen nur quantitativ durch ihre Abmessungen. Es existiert dabei ein Naturgesetz, das durch die Ungenauigkeitsrelationen ausdrückbar ist und das es nicht gestattet, gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit sowohl Lage als auch Impuls festzustellen."

Eine solche Auslegung ist vor allem vom philosophischen Gesichtspunkt unannehmbar, da sie Grenzen der Erkenntnis aufstellt und deshalb zur Begründung des Agnostizismus, einer der Spielarten des Idealismus, dienen kann. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachten wir einen Versuch.

Stellen wir uns eine Anordnung mit *zwei* Spalten vor, vor der in einiger Entfernung eine Photoschicht angeordnet ist. Geht durch ein solches Diaphragma ein paralleles Bündel von Elektronen, dann muß auf der Photoschicht das bekannte Beugungsbild von zwei Spalten entstehen, das sich nicht einfach durch die Intensität, sondern seinem ganzen Charakter nach von dem Beugungsbild eines Spaltes unterscheidet. Schließen wir den einen der Spalte: wir erhalten auf der Photoschicht die Abbildung eines offenen Spaltes, die mit dem Spalt selbst identisch ist (oder bei genügender Enge des Spaltes das Beugungsbild eines Spaltes). Schließen wir den Spalt, der zuvor geöffnet war, und öffnen den zweiten: wir erhalten von neuem die Abbildung eines geöffneten Spaltes. Öffnen wir beide



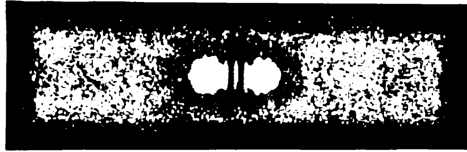


Abb. 199. Die obere Photographie ist aufgenommen worden beim Durchgang von Licht, anfänglich durch das eine und danach durch das andere Loch; die untere Photographie wurde bei gleichzeitigem Durchgang des Lichtes durch beide Löcher erhalten.

Spalte, so ist das entstehende Bild nicht eine einfache Zusammensetzung der beiden bei einem geöffneten Spalt erhaltenen Bilder, sondern es besteht aus hellen und dunklen Streifen, deren Lage durch *beide Spalte* bestimmt werden. In der Abb. 199 sind zwei Photographien von W. K. Arkadjew wiedergegeben, die das Gesagte illustrieren. Diese Aufnahme wurde mit Lichtstrahlen ausgeführt, mit Elektronen ist das Bild vollkommen analog.[1])

[1]) Der auf Seite 356 erwähnte Versuch von Bibermann, Suschkin und Fabrikant ist ein neuer und noch klarerer Beweis dafür, daß die Elektronen auf keinen Fall als ein Ensemble von „klassischen" Teilchen, von Kugeln, betrachtet werden dürfen. In diesem Versuch diente ein Magnesiumoxydkristall als beugendes System. Die Elektronen, die durch einen solchen Kristall einzeln in verhältnismäßig großen Zeitabständen hindurchfliegen, werden hierbei durch die Beugung in bestimmte Richtungen zum Beugungsmaximum abgelenkt. Das Elektronen-Mikrogeschoß könnte mit einem oder mit nur sehr wenigen Atomen des Kristallgitters in Wechselwirkung treten; indessen wird der Charakter des Beugungsbildes, die Verteilung der Maxima und Minima durch das gesamte Gitter, durch eine gewaltige Zahl von in tausend Schichten verteilten Atomen bestimmt. Wir vermerken noch, daß analoge Beugungsversuche auch mit Neutronen gemacht wurden, die keine elektrische Ladung besitzen, sondern mit den Atomen des Gitters durch die überaus schnell mit der Entfernung abnehmenden Kernkräfte in Wechselwirkung treten. Dadurch ist die Deutung des Beugungsbildes als Resultat der Wechselwirkung der Neutronen mit einzelnen Gitteratomen absolut ausgeschlossen.

Dieser Versuch stimmt keineswegs mit der Teilchenvorstellung des Elektrons überein, das sich auf einer bestimmten Flugbahn bewegt, also in jedem Zeitpunkt bestimmte, obwohl unbekannte Koordinaten und einen bestimmten Impuls besitzt. Ein solches Teilchen, als dessen Veranschaulichung ein Schrotkörnchen dienen möge, das bis zur Grenze des Möglichen verkleinert wurde, muß unbedingt durch *einen* bestimmten Spalt hindurchgehen; ein zweiter Spalt kann keinerlei Einfluß auf seine Flugbahn haben. Indessen benehmen sich die Elektronen und andere Mikroteilchen *wesentlich verschieden* in dem einen und dem anderen Falle, d. h. bei offenem oder geschlossenem zweitem Spalt. Der beschriebene Versuch zeigt, daß die Elektronen und anderen Mikroteilchen auf keinen Fall als reine Mikroschrotkugeln betrachtet werden können. Die Vorstellung von einem sehr kleinen Teilchen, das sich auf einer bestimmten Bahn bewegt und in jedem Punkt dieser Bahn eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt, solange an ihm keine Messung durchgeführt wird, kann keineswegs als Bild eines bewegten Elektrons dienen. Der Begriff der Flugbahn verliert für ein Elektron seinen Sinn *ebenso, wie in der Wellenoptik der Begriff des Lichtstrahls seinen Sinn verliert.*

Deshalb liegt der Sinn der Ungenauigkeitsrelationen nicht darin, daß sie uns verbieten, irgendwelche wirklich existierenden Eigenschaften der Mikroteilchen zu erkennen. Sie begrenzen nicht den Grad der Erkenntnis, sondern die Anwendbarkeit der Begriffe der klassischen Mechanik, die ihrem Wesen nach eine *korpuskulare* Mechanik ist. Wie bereits unterstrichen wurde, erscheint in der klassischen Mechanik die gleichzeitige Angabe aller Koordinaten q_i des Systems makroskopischer Teilchen und aller ihnen entsprechenden Impulse p_i als für die vollständige Beschreibung des Zustandes des Systems notwendig. Wie wir bereits sahen, ist für die Mikroteilchen eine solche Beschreibung nicht verwirklichbar. Es ist also klar, daß die Frage nach den *gleichzeitigen* Werten der Koordinaten und der Impulse des Elektrons allgemein jedes physikalischen Sinnes entbehrt, da das Elektron *seiner ganzen Natur nach* ein Objekt ist, dem ein ähnliches Charakteristikum *nicht eigen* ist.

Wenn wir nichtsdestoweniger danach streben, das Verhalten des Elektrons mit den Ausdrücken der klassischen Mechanik zu beschreiben, seinen Impuls und seine Lage gleichzeitig anzugeben, so gibt es hierfür einen bestimmten Grund. Das Schema eines jeden in der Atomphysik durchführbaren Experimentes ist so beschaffen, daß wir mit Hilfe irgendeiner experimentellen Einrichtung die Antwort auf eine Frage zu erhalten wünschen, die sich auf den Gang dieses oder jenes objektiven im Raum und in der Zeit stattfindenden Prozesses bezieht. Diese Frage stellen wir, wenn wir letzten Endes Geräte benutzen, die makroskopische Körper darstellen. Das Verhalten dieser Geräte, beispielsweise die Drehung einer Galvanometernadel oder die Bewegung einer Registrierfeder, unterliegt der klassischen Mechanik; die Einrichtung selbst, die geometrische Anordnung ihrer Teile, der Spalte, der Kondensatoren, der Magnetfelder usw., bilden ein räumlich-zeitliches Bezugssystem. Es versteht sich von selbst, daß wir auch das Verhalten der untersuchten Mikroteilchen in demselben räumlich-zeitlichen Bezugssystem beschreiben müssen, wenn wir die gleichen Begriffe der klassischen Mechanik benutzen wollen, mit deren Hilfe wir unseren makroskopischen Zustand beschreiben. Wir messen zum Beispiel die Verschiebung eines hellen Fleckes, der von auftreffenden Elektronen auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen hervorgerufen wurde, oder wir interessieren uns für die Ablenkung eines Elektrons

an einem gegebenen Ort des Gerätes usw. Wenn wir hierbei auf das Elektron oder Mikroteilchen eine diesen Objekten nicht eigene klassische Beschreibung anwenden, müssen wir die *Grenze ihrer Anwendbarkeit* angeben, da die Mikroteilchen Gesetzen unterliegen, die von den Gesetzen der klassischen Mechanik verschieden sind. Die Ungenauigkeitsrelationen geben nun gerade diese Grenze an.

Eine andere fehlerhafte Deutung der Ungenauigkeitsrelation ist deshalb besonders gefährlich, weil sie unvermeidlich zum subjektiven Idealismus führt. Diese Deutung wird beharrlich von vielen westlichen Physikern vertreten, insbesondere von den Vertretern der sogenannten „Kopenhagener Schule“ der modernen theoretischen Physik (N. Bohr, W. Heisenberg, P. Jordan u. a.), die nach ihrer philosophischen Weltanschauung offene Parteigänger der reaktionären machistischen Philosophie oder ihr nahestehender Richtungen sind. Bei den Interpretationen der Kopenhagener Schule wird in der Quantenmechanik besondere Aufmerksamkeit der Beobachtung zugewandt. So behauptet beispielsweise Heisenberg, daß, während der Gegenstand der klassischen Physik objektive Ereignisse in Raum und Zeit waren, für deren Existenz ihre Beobachtung bedeutungslos ist, die Quantentheorie Prozesse betrachtet, die sozusagen während der Beobachtung plötzlich entstehen und über die es sinnlos ist, für das Intervall zwischen den Beobachtungen anschauliche, physikalische Aussagen zu machen. Ein anderer Vertreter derselben Schule, P. Jordan, der sich offen seiner Zugehörigkeit zur positivistischen (d. h. machistischen) Schule in der Philosophie rühmt, geht noch weiter. In seinem Buch über Quantenmechanik behauptet er, daß der sogenannte Positivismus (d. h. Machismus) „nur die unmittelbaren Tatsachen des Erlebnisses als eigentlichen Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung anerkennt, so daß die Psychologie, im weitesten Umfang genommen, sich als die allumfassendste Wissenschaft erweist, während die Physik ein kleines Teilgebiet von ihr ist“.

Jedoch haben ähnliche offen idealistische Behauptungen keinerlei Grundlage in der Quantentheorie im allgemeinen und in den Ungenauigkeitsrelationen im besonderen. Tatsächlich untersucht die Quantentheorie nicht den Beobachter und seine Erlebnisse, sondern die Wechselwirkung wirklich existierender Objekte, die wir „Mikroteilchen“ nennen, mit anderen real existierenden, aber makroskopischen Objekten, physikalischen Körpern, welche insbesondere die Geräte sind. Daß die Teilnahme eines subjektiven Beobachters hierbei überhaupt nicht erforderlich ist, folgt schon daraus, daß jedes beliebige der betrachteten Experimente ohne die geringste Änderung der Resultate vollkommen objektiv gemacht werden kann: das Auge des Beobachters kann durch eine Photoschicht oder ein Photoelement ersetzt werden, beliebige Zeichen können automatisch gemacht werden usw. Die Einwirkung des Gerätes auf den meßbaren Gegenstand ist das Ergebnis der Wechselwirkung der *physikalischen Körper, das Resultat objektiver Prozesse, die sich in Raum und Zeit nach den Gesetzen der Physik abwickeln,* keineswegs aber das Resultat eines psychologischen Beobachtungsaktes. Wir können also mit vollständiger Bestimmtheit behaupten, daß *die Rolle eines menschlichen Beobachters in der Quantentheorie genau die gleiche wie in der Newtonschen Mechanik ist.* Offensichtlich hat ein analoger „Beobachter“ keinerlei Einfluß auf das meßbare Objekt. Die Tatsache, daß in der Quantenmechanik der „Beobachter“ keinerlei Rolle spielt, ist unter anderem daraus ersichtlich, daß die Ungenauigkeitsrelationen von uns im § 139 aus einer Betrachtung der Wellenpakete abgeleitet wurden, *bei der weder ein Beobachter noch ein Beobachtungs-*

prozeß überhaupt berücksichtigt wurde. Dieser Schluß ist ausschließlich auf die eigentümlichen Besonderheiten der Mikroteilchen begründet, Besonderheiten, derentwegen wir zur Beschreibung ihres Verhaltens sowohl das Wellen- als auch das Korpuskelbild benutzen müssen. Obgleich die Ungenauigkeitsrelationen auf diese Weise ausschließlich den Charakter einer Begrenzung der Beschreibung mit den Begriffen der klassischen Physik haben, wobei diese Begrenzungen aus den besonderen Eigenschaften der objektiv existierenden Mikroteilchen folgen, gehen die Physiker der Kopenhagener Schule von den Ungenauigkeitsrelationen aus und bauen ein philosophisches System auf, die sogenannte Komplementaritätstheorie, die einen offen idealistischen Charakter trägt. Dieses sogenannte Komplementaritätsprinzip wurde weit über die Deutung einer bestimmten physikalischen Tatsache ausgedehnt und in den Rang eines Universalprinzips erhoben, das jede Erkenntnis begrenzt und nicht nur in der Physik, sondern auch in der Biologie und sogar in den Gesellschaftswissenschaften gelten solle. Aber auch die Formulierung der Ungenauigkeitsrelationen selbst trägt in der Komplementaritätstheorie einen deutlich ausgeprägten machistischen Charakter: der ganze Erkenntnisvorgang führt zur Beschreibung der experimentellen Einrichtung und zur Registrierung der Meßresultate, wobei dem Mikroteilchen selbst, auf das die Messung ja angewandt wird, entweder überhaupt keine Realität oder nur eine begrenzte zugeschrieben wird. Einer der Vertreter der Kopenhagener Schule, Ph. Frank, sagt dazu direkt: „Das Teilchen für sich hat keine physikalische Realität, aber ein Teilchen, das in einem bestimmten Punkt durch das Diaphragma geht, ist eine physikalische Realität.“ Es versteht sich von selbst, daß ähnliche Standpunkte nichts mit der materialistischen Erkenntnistheorie gemein haben.

§ 142. Die Ungenauigkeitsrelationen und das Prinzip der Kausalität

Ein immer wieder in der westlichen Literatur anzutreffender und jeder Grundlage entbehrender Schluß behauptet, daß aus den Ungenauigkeitsrelationen angeblich die Nichtanwendbarkeit des Kausalitätsprinzips folgt. Bereits im Jahre 1927 behauptete Heisenberg in seiner Arbeit, in der er die Ungenauigkeitsrelationen formulierte, als allgemeine Folge dieser Relationen, daß „die Quantenmechanik die Haltlosigkeit des Kausalitätsgesetzes feststellt“. Diese Behauptung wurde wie folgt begründet: Das Kausalitätsprinzip fordert, daß es bei genauer Kenntnis des Zustandes des Systems für irgendeinen bestimmten Zeitpunkt möglich ist, seinen Zustand für einen beliebigen künftigen Zeitpunkt genau vorherzusagen. Die klassische Mechanik Newtons erfüllt diese Forderung in vollem Umfang, wie besonders klar das Beispiel der Astronomie zeigt. Bekanntlich erlaubt die Astronomie (Himmelsmechanik) die Vorausberechnung der Bewegung der Planeten, ihrer Flugbahnen und ihrer Geschwindigkeiten für beliebige zukünftige Zeiten mit einer solchen Genauigkeit, wie sie die mathematische Lösung der Aufgabe fordert, und damit die genaue Vorhersage der astronomischen Erscheinungen, wie beispielsweise Sonnen- oder Mondfinsternisse, für irgendeine gewünschte Zeit. Diese Möglichkeit liegt in der mathematischen Form der Grundgleichungen der klassi-

schen Mechanik selbst. Diese Gleichungen lauten in der für die Erörterungen der prinzipiellen Fragen passendsten Form folgendermaßen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, f. \tag{142,1}$$

In dem einfachsten Fall eines materiellen Punktes, der sich in einem bestimmten Kraftfeld bewegt, ist $k = 1, 2, 3$, d.h., es gibt sechs Differentialgleichungen erster Ordnung nach der Zeit. Die Lösungen dieser Gleichungen geben die Möglichkeit, alle Koordinaten q_k und alle Impulse p_k als Funktion der Zeit und sechs willkürlicher Konstanten auszudrücken:

$$q_k = f_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \quad p_k = \varphi_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \tag{142,2}$$

Haben wir alle sechs Koordinaten q_k^0 und Impulse p_k^0 für einen anfänglichen Zeitpunkt $t = 0$ durch die entsprechenden Messungen bestimmt, dann können wir diese bekannten Größen q_k^0 und p_k^0 in (142,2) einsetzen und daraus dann alle sechs willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_6$ berechnen. Hiernach erlauben die Formeln (142,2) die Vorhersage von q_k und p_k für jeden beliebigen Zeitpunkt t. Es ergibt sich somit, daß aus dem Anfangszustand, der *durch die Gesamtheit aller Koordinaten und aller Impulse bestimmt wird*, der Zustand für jeden beliebigen, künftigen Zeitpunkt in voller Übereinstimmung mit dem Kausalitätsgesetz vorhergesagt werden kann.

Die Ungenauigkeitsrelationen behaupten nun jedoch, daß die gleichzeitigen Werte der Koordinaten und Impulse nur mit den unvermeidlichen Ungenauigkeiten Δq_k und Δp_k, die die Beziehungen $\Delta q_k \cdot \Delta p_k \geqq h$ befriedigen, gemessen werden können. Hieraus zog HEISENBERG den Schluß, daß der Anfangszustand nicht genau bestimmt worden und deshalb auch nicht der zukünftige Zustand genau vorhergesagt werden kann – im Widerspruch zu dem Gesetz der Kausalität. Dieser Schluß ist jedoch falsch. Zwar können die gleichzeitigen Werte der Koordinaten und Impulse der Mikroteilchen nur mit den Ungenauigkeiten bestimmt werden, die durch die Ungenauigkeitsrelationen bedingt sind. Jedoch muß der Begriff „Zustand des Systems" in der Quantenmechanik anders formuliert werden als in der klassischen Mechanik. Besonders für die vollständige Bestimmung des Zustandes ist *eine andere Gesamtheit von Parametern* erforderlich. Die *quantitative* Formulierung des Kausalitätsgesetzes kann also nur dann durchgeführt werden, wenn die Veränderlichen, die den Zustand bestimmen, bekannt sind.

Erklären wir dies an einem Beispiel. Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes, die MAXWELLschen Gleichungen, stellen sich als ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung nach der Zeit dar für die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte j, die als Funktionen der Koordinaten und der Zeit betrachtet werden können. Die Kenntnis von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ϱ und j für einen bestimmten Zeitpunkt erlaubt also, ihre Werte für einen beliebigen (künftigen oder vergangenen) Zeitpunkt vorherzusagen. Somit kann das Kausalitätsprinzip für das elektromagnetische Feld nur dann quantitativ formuliert werden, wenn der „Zustand" des Feldes durch die richtige Wahl der Parameter ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ϱ, j) bestimmt wird.

Aus diesem Beispiel können wir klar erkennen, daß für die Formulierung des Kausalitätsprinzips in allen physikalischen Erscheinungen eine klare Bestimmung des Begriffes „Zustand des Systems" notwendig ist und ebenso eine klare Angabe derjenigen Parameter, von denen der Zustand des Systems abhängt.

Wenden wir uns jetzt den mikroskopischen „Teilchen“ und der Quantenmechanik zu. In den folgenden Abschnitten dieses Buches werden wir sehen, daß der Zustand eines Mikroteilchens durch eine Funktion ψ bestimmt wird, die sogenannte Wellenfunktion oder einfach ψ-Funktion (als ihr einfachstes Beispiel kann die Darstellung der ebenen DE BROGLIEschen Welle in komplexer Form dienen), welche eine Funktion *allein der Koordinaten und der Zeit* oder *allein der Impulse und der Zeit* ist. Wir werden sehen, daß diese Funktion eine Differentialgleichung (allgemein die SCHRÖDINGERsche Gleichung, siehe § 143) erster Ordnung nach der Zeit befriedigt.

Hieraus folgt, daß die Angabe der ψ-Funktion für den Zeitpunkt $t = 0$ ihre Werte für beliebige künftige Zeitpunkte vorherbestimmt. Der Zustand eines Systems von Mikroteilchen, der in Übereinstimmung mit den Forderungen der Quantenmechanik und nicht der klassischen Mechanik bestimmt ist, folgt also eindeutig aus dem vorhergegangenen Zustand, *wie es das Kausalitätsgesetz fordert.*

Es ist keineswegs erstaunlich oder paradox, daß wir den Zustand von Mikroteilchen *mit den ihnen nicht eigenen Begriffen der klassischen Mechanik* nicht genau beschreiben können, sondern eine statistische Methode benutzen müssen. Hieraus kann man jedoch auf keinen Fall den Schluß der Unhaltbarkeit des Kausalitätsgesetzes in der Mikrowelt ziehen. Es zeigt sich nur, daß die quantitative Formulierung des Kausalitätsprinzips für ein System kleiner fester Körper auf Mikroteilchen nicht anwendbar ist und daß die Beschreibung des Zustandes eines Mikroteilchens durch Angabe der gleichzeitigen Werte aller Koordinaten und aller Impulse *nicht der Natur des Mikroteilchens entspricht.*

Die Behauptung, daß die Quantenmechanik angeblich das Kausalitätsgesetz „widerlegt“, dient als Anlaß zu einer Reihe idealistischer Verdrehungen bis zur Begründung des Fideismus. So behauptet zum Beispiel EDDINGTON in seinem Buch „Die Natur der physikalischen Welt“: „. . . die Argumente der modernen Wissenschaft geben vielleicht die Möglichkeit zu dem Schluß, daß die Religion für den gesunden, wissenschaftlichen Verstand mit Beginn des Jahres 1927 annehmbar wird“, und DIRAC behauptet, daß „. . . die Natur in einem bestimmten Zeitpunkt eine freie Wahl trifft“.

Alle ähnlichen Behauptungen besitzen weder in den Ungenauigkeitsrelationen noch in der Quantenmechanik eine Grundlage. P. LANGEVIN charakterisierte sie als „intellektuelle Ausschweifung“. In seiner interessanten Rede „Über die Begriffe der Moleküle und der Atome“ sagt LANGEVIN: „Der Versuch zeigt uns, daß wir nicht genau in einem und demselben Zeitpunkt die Lage und die Geschwindigkeit eines Teilchens bestimmen können. Sofort schließen wir hiernach: den Naturgesetzen liegt die Ungenauigkeit zu Grunde. Warum wollen wir jedoch nicht zugeben, daß unsere korpuskulare Auffassung nicht vollständig der Wirklichkeit entspricht, daß es unmöglich ist, sich die inneratomare Welt vorzustellen, wenn wir unsere makroskopische Auffassung von dem sich bewegenden Körper bis zu den äußersten Grenzen extrapolieren? Aus dieser Tatsache, daß uns die Natur keine genaue Antwort auf die die Bewegung eines Teilchens betreffende Frage erteilt, wäre es von unserer Seite viel zu anmaßend zu schließen: in der Natur gibt es keinen Determinismus. Viel einfacher ist es zu sagen: Die Frage selbst ist schlecht gestellt – in der Natur existiert kein korpuskulares Mikroteilchen . . .“

„Die Welt, in der wir jetzt leben, ist sehr viel reicher als die Welt in der Form, in der sie PASCAL darstellte. Er nahm ein und dieselbe Struktur nach Art einer sich

ständig verkleinernden Skala für das unendlich Große wie für das unendlich Kleine an. Von diesem Standpunkt aus müßten wir dieselben Ansichten von allen Stockwerken unseres Gebäudes vorfinden und ein und dieselben Vorstellungen benutzen. Die Welt wäre mit japanischen Puppen vergleichbar, die immer gleich sind, nur immer kleiner und kleiner. Zum Glück erweist sich die Natur als reicher, und dies bedeutet, als interessanter. Jedes neue Stockwerk, auf dem unser Versuch uns aufzuhalten gestattet, gibt uns neue Wahrheiten und fordert eine neue Anstrengung für den theoretischen Bau."

In den letzten drei Paragraphen betrachteten wir ausführlich die Ungenauigkeitsrelationen und die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen. Wir sahen, daß sie keineswegs irgendwelche Grenzen der Erkenntnis aufstellen, sondern nur die Nichtanwendbarkeit der klassischen Vorstellungen auf die Bewegung mikroskopischer Teilchen angeben. Genauer gesagt, geben diese Beziehungen ein quantitatives Maß dafür, bis zu welchen Grenzen der Zustand von Mikroobjekten noch durch die Angabe der Koordinaten und Impulse beschrieben werden kann, ähnlich wie dies in der klassischen Mechanik für makroskopische Körper gemacht wird. Wie wir an Beispielen sahen, ergeben die Ungenauigkeitsrelationen $\Delta q \cdot \Delta p \approx h$ bei einer für den gegebenen Fall vernünftigen Ungenauigkeit Δq bei der Bestimmung der Koordinate für Δp einen vernachlässigbar kleinen Wert, so daß sich das Objekt vollkommen „klassisch" verhält, also von seiner Bahn und seiner Geschwindigkeit in jedem Punkt der Bahn gesprochen werden kann. Im entgegengesetzten Fall erweist sich das Bild des „klassischen Teilchens" als unpassend, und der Begriff der Bahn verliert seinen Sinn, *ebenso wie in dem Gebiet der Wellenoptik der Begriff des Lichtstrahls seinen Sinn* verliert. Daraus folgt also, daß die eigentümlichen physikalischen Eigenschaften der Elektronen und der anderen Mikroteilchen die Quelle der Ungenauigkeitsrelationen sind, keineswegs aber die Eigenschaften eines erkennenden Subjekts.

Die Gültigkeitsgrenzen der klassischen Vorstellungen im Gebiet der Atomwelt bedeuten aber in keinem Falle eine Begrenzung unserer Erkenntnisfähigkeit, sondern nur eine Begrenzung des *mechanistischen* Weltbildes. Dieses Bild erwies sich bereits in der Theorie des elektromagnetischen Feldes, von dem kein mechanisches Modell zu konstruieren gelang, obgleich unzählige Versuche dazu gemacht wurden, als unhaltbar. Die weitere Entwicklung der Physik, die bedeutenden Erfolge in der Erkenntnis der äußeren Welt, insbesondere aber die Entwicklung der Atomphysik, zeigten mit aller Klarheit die Begrenztheit der mechanistischen Weltanschauung. Aber Lenin erklärte in „Materialismus und Empiriokritizismus", daß die Annahme irgendwelcher unveränderlicher Elemente, eines „unveränderlichen Wesens der Dinge" usw. nicht Materialismus, sondern metaphysischer, d. h. antidialektischer Materialismus ist. Und weiter: Es ist natürlich totaler Unsinn, die Sache so hinzustellen, als ob der Materialismus die „geringere" Realität des Bewußtseins oder unbedingt ein „mechanisches", nicht aber ein elektromagnetisches oder ein sonstiges noch ungleich komplizierteres Bild der Welt als sich bewegender Materie behauptete.[1])

Hieraus folgt, daß sowohl die Quantenmechanik als auch jede andere physikalische Theorie ihre Anwendungsgrenze besitzt. Insbesondere gibt sie keine Antwort auf die Frage, weshalb sich die Elektronen so eigentümlich benehmen, weil die sich

[1]) Lenin: „Materialismus und Empiriokritizismus". Dietz Verlag, Berlin 1952, Seite 270.

auf die Natur der Mikroteilchen selbst beziehenden Fragen über ihre Grenzen hinausgehen. Die moderne Physik erwartet von der weiteren Entwicklung der Theorie der Mikrowelt die Lösungen einer großen Anzahl tiefster Probleme über die Natur der Mikroteilchen, wie z. B. die Umwandlung von „Elementarteilchen" ineinander usw. Als ein Zwischenstadium wird wahrscheinlich die sogenannte relativistische Quantenmechanik zu gelten haben, in deren System nicht nur der Welle-Korpuskel-Dualismus berücksichtigt werden muß, sondern auch die Besonderheiten der Bewegung bei Geschwindigkeiten, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind. Die Schaffung einer solchen Theorie, die eine Synthese der quantenhaften und der relativistischen Erscheinungen darstellt, ist Sache der Zukunft. Es ist durchaus möglich, daß in einem späteren Entwicklungsstadium der Wissenschaft auch die Ungenauigkeitsrelationen in einem neuen Licht erscheinen, ähnlich wie der phänomenologische zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der statistischen Physik eine neue Beleuchtung erhielt.

Andererseits sahen wir auch, daß die Ungenauigkeitsrelationen, die auf die objektiven Eigenschaften wirklich existierender Mikroteilchen begründet sind, von den idealistischen Physikerschulen zur Begründung des angeblichen „Zusammenbruches des Materialismus", der „Abschaffung" des Kausalitätsgesetzes usw. bis zur „wissenschaftlichen" Begründung der Religion benutzt wurden (Eddington, A. Compton). Die obenerwähnte Stellung Jordans, der die Physik als kleines Teilgebiet der Psychologie kennzeichnete, ist wohl am charakteristischsten hierfür. Diesen Unterschied zwischen der idealistischen und materialistischen Deutung ein und derselben Tatsachen oder Erscheinungen hat W. I. Lenin in den folgenden Worten mit äußerster Schärfe charakterisiert: Die wirklich erkenntnistheoretische Frage, die die philosophischen Richtungen scheidet, besteht nicht darin, welchen Grad von Genauigkeit unsere Beschreibungen der kausalen Zusammenhänge erreicht haben und ob diese Angaben in einer exakten mathematischen Formel ausgedrückt werden können, sondern darin, ob die objektive Gesetzmäßigkeit der Natur oder aber die Beschaffenheit unseres Geistes, das diesem eigene Vermögen, bestimmte apriorische Wahrheiten zu erkennen usw., die Quelle unserer Erkenntnis dieser Zusammenhänge ist.[1])

[1]) Lenin: „Materialismus und Empiriokritizismus". Dietz Verlag, Berlin 1952, Seite 148.

XI. DIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

§ 143. Die SCHRÖDINGER-Gleichung und der physikalische Sinn ihrer Lösung

Eine der bemerkenswertesten Besonderheiten der atomaren Teilchen ist die Existenz diskreter Energieniveaus. Die Notwendigkeit der Postulierung solcher diskreten Niveaus wurde bereits in den ersten Entwicklungen der Quantenphysik ausgesprochen (siehe Abschnitt VI). Für die klassische Physik bedeutete jedoch die Zulassung diskreter Energieniveaus eine vollkommen fremdartige Annahme, die ihr absolut zuwiderlief. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß in der Quantenmechanik die Quantelung der Energie nicht nur den Grundlagen dieser Mechanik nicht widerspricht, sondern aus ihren Gleichungen auf ebenso natürliche Weise folgt, wie beispielsweise die Existenz der harmonischen Obertöne einer Saite aus den Gleichungen der klassischen Mechanik. Dieses Resultat wurde als eines der ersten in der Entwicklung der Quantenmechanik erhalten und erwies sich seit dieser Zeit als höchst zutreffend. Sehr schnell zeigte es sich jedoch, daß aus der Grundgleichung der Quantenmechanik und aus der Deutung ihrer Lösungen auch andere Folgerungen zu ziehen waren, die nicht weniger eigentümlich waren als die Quantelung selbst. Diese Folgerungen gaben die Möglichkeit, einen weiten Kreis neuer Erscheinungen zu erklären und die Nützlichkeit der Quantenmechanik sicherzustellen. Schließlich konnte man ein logisches, vollkommen neues System der Quantenmechanik aufbauen.

Um den Leser auf dieses System vorzubereiten, gehen wir in unserer Darlegung einen Weg, der sich eng dem geschichtlichen anschließt. Wir werden uns in diesem Abschnitt auf die Aufstellung der Grundgleichung der Quantenmechanik und auf einige Aufgabenbeispiele beschränken, die in mathematischer Hinsicht besonders einfach sind; ferner werden wir einige Anwendungen dieser Gleichung geben. Das System der Quantenmechanik selbst werden wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen.

Bis jetzt betrachteten wir nur die Bewegung freier Mikroteilchen und überzeugten uns davon, daß ihre Bewegung durch ebene DE BROGLIEsche Wellen zu beschreiben ist. Wir müssen jetzt die Bewegung von Teilchen in verschiedenen Kraftfeldern untersuchen. Mit diesem Ziel werden wir zu Anfang eine Differentialgleichung aufstellen, die der DE BROGLIEschen Gleichung genügt, und werden sie dann auf den Fall einer Bewegung in Kraftfeldern erweitern. Auf diese Weise erhalten wir die Grundgleichung der Quantenmechanik, die SCHRÖDINGER-Gleichung.

Im § 124 wurde gezeigt, daß die Wellengleichung für die elektromagnetischen Wellen (die den Photonen entsprechen) unmittelbar aus den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes, den MAXWELLschen Gleichungen, folgt. Schreiben wir

die Wellengleichung auf und setzen in ihr die Lösung in Form ebener Wellen ein, dann erhalten wir eine Beziehung zwischen der Frequenz und den Komponenten des Wellenvektors, die für die Natur der elektromagnetischen Wellen charakteristisch ist (Gesetz der Dispersion):

$$\frac{\nu^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{124,3}$$

Wir gehen jetzt aber den umgekehrten Weg. Uns ist das Gesetz der Dispersion der DE BROGLIEschen Wellen bereits bekannt:

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \tag{132,6}$$

worin

$$\nu_0 = \frac{mc^2}{h}. \tag{132,5}$$

Mit Hilfe dieses Gesetzes und der Formel für die DE BROGLIEschen Wellen

$$\psi = Ae^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} \tag{131,5}$$

erhalten wir die uns interessierende Gleichung für freie Mikroteilchen.

Vor allem müssen wir jedoch folgendes anmerken: Das Gesetz der Dispersion wurde aus der von der *Relativitätstheorie* aufgestellten Beziehung zwischen Impuls und Energie

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{61,12}$$

abgeleitet. Die Gleichung von SCHRÖDINGER gilt jedoch für Teilchen, die sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die genügend klein im Vergleich zu c sind. In diesem Fall ist $\frac{v}{c} \ll 1$, und folglich $p \ll mc$. Aus (61,12) finden wir[1])

$$\frac{E}{c} = \sqrt{m^2c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} = mc\left[1 + \frac{1}{m^2c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\right]^{1/2}$$
$$= mc\left[1 + \frac{1}{2m^2c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \dots\right].^{2)}$$

Vernachlässigen wir die Glieder höherer Ordnung, dann erhalten wir

$$E = mc^2 + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \tag{143,1}$$

Ersetzen wir hier E durch $h\nu$, p_x durch hk_x usw. in Übereinstimmung mit den DE BROGLIEschen Postulaten (131,1) und (131,4), dann finden wir

$$h\nu = mc^2 + \frac{h^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

oder weil nach (132,5) $mc^2 = h\nu_0$ ist, so wird

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{h^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \tag{143,2}$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{h}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{143,2'}$$

Dies ist aber das gesuchte Gesetz der Dispersion in NEWTONscher Näherung.

---

[1]) Wir benutzen die Quadratwurzel nur mit dem Pluszeichen. Die Dualität der Vorzeichen vor der Wurzel hat jedoch eine sehr wichtige Bedeutung. Diese Frage betrachten wir im Band II.

[2]) Anm. d. Redaktion: Für $\frac{v}{c} \ll 1$ gilt $m_0 \approx m$.

Bedenken wir, daß in der NEWTONschen Mechanik die Energie wegen der Unbestimmtheit des Nullwertes der potentiellen Energie stets eine willkürliche Konstante enthält, dann können wir den Anfangswert der Energie zweckmäßig verändern und in (143,1) annehmen, daß

$$E - mc^2 = E'.$$

Dann nimmt diese Beziehung die uns schon bekannte Form

$$E' = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{143,3}$$

an [siehe (57,11)]. Entsprechend ändern wir auch den Anfangswert der Frequenzen und setzen

$$\nu' = \nu - \nu_0 .$$

Hierbei nimmt (143,2) die Form

$$h\nu' = \frac{h^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \tag{143,4}$$

an, und dann schreibt sich (143,2′) entsprechend

$$\nu' = \frac{h}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{143,5}$$

Die erhaltene Beziehung (143,5) und die ihr äquivalente (143,4) stellen ebenfalls das Gesetz der Dispersion in NEWTONscher Näherung dar.

Differenzieren wir nun die Formel für die DE BROGLIEschen Wellen (131,5) einmal nach der Zeit und zweimal nach den Koordinaten:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -2\pi i\nu\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (2\pi i)^2 k_x^2\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = (2\pi i)^2 k_y^2\psi \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = (2\pi i)^2 k_z^2\psi .$$

Hieraus finden wir ν, k_x, k_y, k_z. Nun setzen wir diese Größen in das Dispersionsgesetz (143,4) ein, dann erhalten wir sofort

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

oder

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi . \tag{143,6}$$

In diesem Abschnitt werden uns nur die Lösungen von (143,6) interessieren, die stehenden monochromatischen Wellen entsprechen. Für solche Wellen kann die Lösung als Produkt zweier Funktionen dargestellt werden, von denen die eine eine Funktion nur der Koordinaten und die andere eine Funktion nur der Zeit ist, wobei die Abhängigkeit von der Zeit durch den Faktor $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ ausgedrückt wird, so daß

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z)\, e^{-i\frac{2\pi}{h}Et} \tag{143,7}$$

ist. Wir vermerken vor allem, daß für solche Lösungen die linke Seite von (143,6)

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \tag{143,8}$$

ergibt. Setzen wir die Lösung (143,7) in (143,6) ein und berücksichtigen (143,8), dann erhalten wir nach Division durch den Zeitfaktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ und Umstellung der Glieder

$$\Delta\psi^0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi^0 = 0. \qquad (143,9)$$

Die Gleichung (143,6) erscheint als die gesuchte Wellengleichung für ein freies Teilchen; der Teil der Lösung, der nur von den Koordinaten abhängt, genügt der Gleichung (143,9). Weiterhin können wir die (143,9) befriedigende Funktion ohne das Zeichen ^{0} schreiben, wenn wir uns daran erinnern, daß in dem vorliegenden Abschnitt nur die Rede von „monochromatischen" Lösungen der Gleichung (143,6) ist, für die es genügt, ψ^0 den Faktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ beizufügen.

Die Gleichung (143,9) erhielten wir für den Fall eines freien Mikroteilchens. Überlegen wir nun, wie sie sinnvoll auf den Fall eines Teilchens erweitert werden kann, das sich in einem durch die potentielle Energie U charakterisierten Kraftfeld bewegt. Die Gesamtenergie in einem solchen Feld ist $E = T + U$. Für ein freies Teilchen ist die Gesamtenergie gleich der kinetischen Energie, d. h., es ist $E = T$. Für die uns interessierende Verallgemeinerung ist nun die Frage zu lösen, was unter der bei einer Bewegung im Feld in die Gleichung (143,9) eingehenden Energie zu verstehen sei, die Gesamtenergie oder die kinetische? Würden wir die Energie E als Gesamtenergie betrachten, so wäre in der verallgemeinerten Gleichung kein Glied, das dieses oder jenes Feld beschriebe. Verstehen wir dagegen unter E im Falle eines *freien Teilchens* nur die kinetische Energie, so werden wir bei einer Bewegung im Feld mit der potentiellen Energie U an Stelle von E in (143,9) die kinetische Energie $T = E - U$ setzen müssen, so daß die Gleichung (143,9) die Form

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\,\psi = 0 \qquad (143,10)$$

annimmt. Dies ist aber die gesuchte Gleichung der Quantenmechanik, die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein Teilchen im Potentialfeld.

Wie alle Grundgleichungen der Physik (beispielsweise die NEWTONschen Gleichungen der Mechanik oder die MAXWELLschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes) besitzt die SCHRÖDINGER-Gleichung keine strenge Ableitung. Sie wird nicht abgeleitet, sondern wird aufgestellt, und ihre Richtigkeit wird durch die Übereinstimmung ihrer Resultate mit dem Versuch bestätigt.

Die allgemeinere Gleichung für die Funktion ψ, die nicht nur von den Koordinaten, sondern auch von der Zeit abhängt, entspricht der Gleichung (143,10). Für den Fall eines konservativen Feldes, in dem die potentielle Funktion U nicht explizit von der Zeit abhängt, können wir immer voraussetzen, daß die Abhängigkeit von ψ von der Zeit durch die „monochromatischen" Faktoren $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ ausgedrückt wird. Bedenken wir, daß in diesem Falle die Beziehung (143,8) gilt, und schreiben wir die Gleichung (143,10) in der Form

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = E\psi$$

mit

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}, \tag{143,11}$$

dann finden wir

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{143,12}$$

Dies ist die allgemeine SCHRÖDINGER-Gleichung, die auch die Zeit enthält.

Zum Schluß machen wir noch folgende Anmerkung. Zur Aufstellung der SCHRÖDINGER-Gleichung für ein freies Teilchen können wir an Stelle der Wellenfunktion für ein freies Teilchen, die in der Form

$$\psi = A e^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)}$$

geschrieben wird, auch die konjugiert komplexe Funktion

$$\psi^* = A^* e^{-i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} \tag{143,13}$$

benutzen. Wie leicht ersichtlich, ist in dem letzten Fall

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 2\pi i\nu\psi^*, \quad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -4\pi^2 k_x^2\psi^* \text{ usw.}$$

An Stelle von (143,6) erhalten wir dann

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi^*. \tag{143,14}$$

Entsprechend würde sich auch die Gleichung (143,12) ändern. Wir werden jedoch sofort sehen, daß nicht die Funktion ψ selbst einen physikalischen Sinn hat, sondern das Quadrat ihres Moduls, d. h. $\psi\psi^*$. Somit ist es nebensächlich, in welcher dieser beiden möglichen Formen die SCHRÖDINGER-Gleichung geschrieben wird.

Betrachten wir nun den physikalischen Sinn ihrer Lösung. Wir schreiben die Wellengleichung der klassischen Physik auf, mit der wir im § 124 bekannt geworden sind,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \tag{124,4}$$

und vergleichen sie mit der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi. \tag{143,12}$$

Die klassische Wellengleichung hat bekanntlich reelle Lösungen der Form $a \cdot \cos[2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t) + \delta]$. Durch eine unmittelbare Prüfung können wir uns leicht davon überzeugen, daß die SCHRÖDINGER-Gleichung nicht von diesen reellen Lösungen befriedigt wird, sondern daß sie nur *komplexe* Lösungen befriedigen, wie beispielsweise für $U = 0$

$$\psi = A e^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)}.$$

Diese Besonderheit wird dadurch bedingt, daß sie im Unterschied zu der klassischen Wellengleichung die *erste* Ableitung nach der Zeit und die *zweite* nach den Koordinaten enthält. Dies folgte aus dem Suchen nach einer Wellengleichung, die dem Dispersionsgesetz der DE BROGLIEschen Wellen (in NEWTONscher Näherung)

$$\nu = \frac{h}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \tag{143,5}$$

entsprach, das ν im ersten Grad und die Komponenten des Wellenvektors im zweiten Grade enthält.

Diese Tatsache ist für das Verständnis der SCHRÖDINGER-Gleichung höchst wesentlich. Es zeigt sich, daß die Gleichung zwar in einigen Fällen von periodischen Lösungen befriedigt wird, aber keinerlei wirkliche, sich in einem physikalischen Medium ausbreitende Wellen beschreibt. Wenn wir trotzdem manchmal von stehenden und laufenden „Wellen" der Materie, von Knoten und Bäuchen sprechen, so tun wir dies ausschließlich zur Veranschaulichung. Nach der heute angenommenen, statistischen Deutung ist der Sinn der Lösung dieser SCHRÖDINGER-Gleichung ein vollkommen anderer.

Tatsächlich sahen wir in dem vorigen Abschnitt, daß das Verhalten eines freien Elektrons durch eine ebene DE BROGLIEsche Welle beschrieben wird, daß aber nur das Quadrat der Amplitude dieser Welle einen physikalischen Sinn hat, wobei dieses Amplitudenquadrat gleich dem Quadrat des Moduls der komplexen ψ-Funktion ist, die die SCHRÖDINGER-Gleichung (143,12) für $U = 0$ befriedigt. Mit

$$\left.\begin{aligned} \psi &= A e^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} \equiv a e^{i\delta} \cdot e^{i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)}, \\ \psi^* &= A^* e^{-i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} \equiv a e^{-i\delta} \cdot e^{-i2\pi(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \nu t)} \end{aligned}\right\}$$

erhalten wir tatsächlich

$$a^2 = |A|^2 = \psi^* \psi .$$

Dieses Quadrat der Amplitude deuten wir statistisch: $a^2 d\tau = \psi^* \psi d\tau$ ist nach § 138 die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen in dem Raum $d\tau = dx dy dz$ aufzufinden, d. h. in dem Gebiet mit den Koordinaten zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$. Diese statistische Deutung wird auch für die Lösung der Gleichung (143,12) im allgemeinen Fall beibehalten: das Quadrat des Moduls der komplexen Funktion ψ, die dieser Gleichung genügt, wird als Wahrscheinlichkeitsdichte dafür gedeutet, das Teilchen im Raum $d\tau$ um den Punkt mit den Koordinaten x, y, z zu finden. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist proportional $\psi \psi^* d\tau$.

Die Funktion ψ muß ihrem Sinn gemäß einige Bedingungen erfüllen. Vor allem muß sie überall stetig und eindeutig sein. Wenn wir $\psi \psi^* d\tau$ als Wahrscheinlichkeit deuten, muß notwendig diese Funktion ψ so normiert werden, daß die Wahrscheinlichkeit eines wirklichen Ereignisses gleich 1 wird. Da sich die kartesischen Koordinaten von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, besteht das wirkliche Ereignis darin, daß sich das Teilchen *irgendwo* im Raum befindet. Die Normierungsbedingung lautet deshalb:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi \, d\tau = 1 . \qquad (143,15)$$

In den Lehrbüchern der Analysis wird gezeigt, daß ein unbestimmtes Integral mit unendlichen Grenzen dann existiert, wenn die Funktion genügend schnell mit der Entfernung von dem Koordinatenanfang abnimmt. Speziell eine Funktion mit einem integrierbaren Quadrat muß zumindest wie $1/r^p$, für $p > 1$, abnehmen. Wir werden in diesem und den folgenden Abschnitten sehen, daß die aufgezählten natürlichen Bedingungen in der Quantenmechanik eine außerordentliche Bedeutung haben. Die Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung kommen diesen Forderungen nur bei sehr bestimmten Bedingungen nach, beispielsweise bei bestimmten diskreten Energiewerten, die als Parameter in die Gleichung eingehen. Wie an konkreten Beispielen gezeigt wird, liegt hierin der Schlüssel zur Erklärung der Quantelung der mechanischen Größen in der Quantenmechanik.

§ 144. Reflexion und Durchgang durch einen Potentialberg

Im Abschnitt X betrachteten wir die Bewegung eines Teilchens im feldfreien Raum. Als erstes Anwendungsbeispiel der SCHRÖDINGER-Gleichung untersuchen wir das Verhalten eines Teilchens an der Grenze zweier Gebiete *I* und *II*, wobei in jedem von ihnen die potentielle Energie konstant ist, sich aber voneinander um einen endlichen Wert unterscheidet. Wir vereinfachen die tatsächlich auftretenden Bedingungen, indem wir annehmen, daß sich die potentielle Energie an der Grenze der Gebiete *I* und *II* sprunghaft ändert, wie dies in der Abb. 200 angegeben ist.

Wählen wir ein Koordinatensystem derart aus, daß die x-Achse der Bewegungsrichtung des Teilchens parallel ist. Dann wird ψ eine Funktion nur von x sein. Der LAPLACEsche Operator reduziert sich hierdurch auf die zweite Ableitung $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, und die SCHRÖDINGER-Gleichung nimmt die einfachere Form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\,\psi = 0$$

an.

Hierbei ist die potentielle Energie durch die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} (I)\ U = 0 & \text{für } x \leqq 0, \\ (II)\ U = U_0 & \text{für } x \geqq 0 = \text{const} \end{array}\right\}$$

gegeben.

Zur Lösung dieser Aufgabe muß der Ausdruck für U als Funktion der Koordinaten eingesetzt und die Integration durchgeführt werden. Da unter den gegebenen Bedingungen U nicht in Form einer analytischen Funktion von x ausgedrückt werden kann, müssen wir folgendermaßen vorgehen. Wir stellen die SCHRÖDINGER-Gleichung einzeln für das Gebiet *I* und für das Gebiet *II* auf und suchen die Lösungen in beiden Fällen, d. h. die Funktionen ψ_1 und ψ_2. Da die Funktion ψ im ganzen Raum stetig sein muß, fordern wir, daß an der Grenze der Gebiete, an der der Potentialsprung stattfindet, die Funktionen ψ_1 und ψ_2 einander gleich werden. Wie weiter gezeigt wird, muß an der Grenze beider Gebiete nicht nur die Funktion ψ selbst, sondern auch ihre erste Ableitung stetig sein. Beide Stetigkeitsbedingungen, die Stetigkeit der Funktion und ihrer ersten Ableitung, geben uns die Möglichkeit, die Lösung der Aufgabe bis zum Ende durchzuführen.

Wir schreiben die SCHRÖDINGER-Gleichung:

für das Gebiet *I*

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi_1 = 0, \tag{144,1}$$

für das Gebiet *II*

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\,\psi_2 = 0. \tag{144,2}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$k_1 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = 2\pi\frac{mv_1}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \tag{144,3}$$

und

$$k_2 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U_0)} = 2\pi\frac{mv_2}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \tag{144,4}$$

ein, wobei λ_1 und λ_2 die entsprechenden Wellenlängen in den Gebieten *I* und *II* sind. Die Gleichungen (144,1) und (144,2) schreiben wir um in die Form

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0 \tag{144,1'}$$

und

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0 . \tag{144,2'}$$

Dies sind gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Ihre Partiallösungen haben die Form $e^{\pm ik_1x}$ und $e^{\pm ik_2x}$. Offensichtlich stellen sich diese Partiallösungen als ebene DE BROGLIEsche Wellen im Gebiet *I* und im Gebiet *II* dar. Nehmen wir eine beliebige von ihnen, zum Beispiel e^{ik_1x}, und multiplizieren sie mit dem „monochromatischen" Zeitfaktor $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et} = e^{-i2\pi\nu t}$, dann erhalten wir

$$e^{ik_1x} \cdot e^{-i2\pi\nu t} = e^{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda_1}-\nu t\right)} .$$

Das ist aber die Formel der ebenen Welle, die sich im Gebiet *I* in Richtung der positiven x-Achse ausbreitet.

Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (144,1′) und (144,2′) lauten:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x} , \tag{144,5}$$

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x} . \tag{144,6}$$

Betrachten wir jetzt die Bedingungen für den Übergang eines Teilchens aus dem Gebiet *I* in das Gebiet *II* in den folgenden beiden Fällen: a) wenn die Gesamtenergie E des Teilchens größer als die potentielle Energie U im Gebiet *II* ist (Abb. 200a) und b) wenn $E < U$ (Abb. 200b).

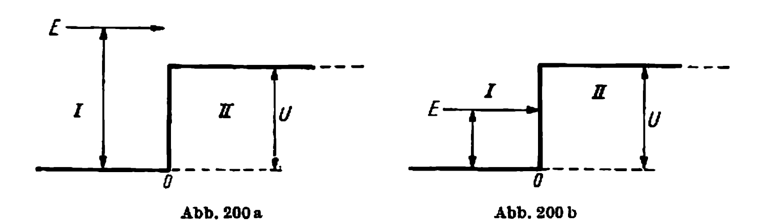


Abb. 200 a Abb. 200 b

a) Bei $E > U$ geht das der klassischen Mechanik gehorchende Teilchen unbedingt (anders ausgedrückt, *mit der Wahrscheinlichkeit gleich eins*) aus dem Gebiet *I* in das Gebiet *II* über. Nehmen wir an, daß dieses Teilchen eine elektrische Ladung trägt und sich im Gebiet *I* von links nach rechts bewegt. An der Grenze zwischen *I* und *II* kommt es in das Feld des Bremspotentials U. Da aber seine Gesamtenergie E größer als U ist, wird das Teilchen dieses Bremsfeld überwinden und seine Bewegung im Gebiet *II* mit der jetzt verminderten Energie $E - U$ fortsetzen.

Wir werden sofort sehen, daß sich ein Teilchen, beispielsweise ein Elektron, nach der SCHRÖDINGER-Gleichung vollkommen anders benehmen muß. Dies ergibt sich schon aus den folgenden qualitativen Überlegungen. Die Bewegung des Elektrons stellt eine ebene DE BROGLIEsche Welle dar. An der Grenze der beiden Gebiete, an der eine sprunghafte Änderung des Potentials stattfindet, muß sich

diese Welle wie eine gewöhnliche Lichtwelle an der Grenze zweier Gebiete mit verschiedenen Brechungskoeffizienten (siehe § 134) benehmen. Dies bedeutet, daß die DE BROGLIEsche Welle an der Grenze der beiden Gebiete *I* und *II* teilweise reflektiert und teilweise in das Gebiet *II* eintreten wird. Wir können auch sagen, daß das Elektron bei dem Übergang von einem Gebiet in das andere eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zur Reflexion besitzt und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, weiter in das Gebiet *II* einzudringen.

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, diese Wahrscheinlichkeiten aufzufinden. Zu diesem Zwecke bedenken wir vor allem, daß die partielle Lösung e^{ik_1x} einer Welle entspricht, die sich in Richtung der positiven x-Achse bewegt (von links nach rechts), also die einfallende Welle verkörpert, während die partielle Lösung e^{-ik_1x} der reflektierten Welle entspricht. Dasselbe gilt für die partiellen Lösungen $e^{\pm ik_2x}$. Bedenken wir, daß sich im Gebiet *I* sowohl die einfallende als auch die reflektierte Welle ausbreitet, dann sehen wir, daß für dieses Gebiet die allgemeine, aus zwei Gliedern bestehende Lösung

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x} \tag{144,5}$$

einen Sinn hat, wobei a_1^2 die Intensität der einfallenden Welle und b_1^2 die Intensität der reflektierten Welle darstellt. Im Gebiet *II* breitet sich nur die hindurchlaufende Welle aus. Deshalb müssen wir in (144,6) $b_2 = 0$ setzen und erhalten dann

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x}. \tag{144,6'}$$

Nehmen wir jetzt an, daß die Amplitude der einfallenden Welle a_1 gleich 1 ist, und berechnen die übrigen beiden Amplituden b_1 und a_2. Hierfür müssen wir die „Grenzbedingungen" benutzen, die aussagen, daß an der Grenze der Gebiete nicht nur die Funktion ψ selbst, sondern auch ihre erste Ableitung stetig ist. Die Stetigkeit der ersten Ableitung folgt aus den folgenden Überlegungen: Wir stellen uns vor, daß die vertikale Stufe auf der linken Seite der Abb. 201 durch eine geneigte ersetzt wird (in der Abb. 201 gestrichelt); die Breite dieses Übergangsgebietes sei $2l$, und das Potential möge sich in diesem Gebiet stetig von 0 bis U ändern. Beachten wir die Bezeichnungen (144,3) und (144,4) und schreiben die beiden Gleichungen (144,1′) und (144,2′) in der Form

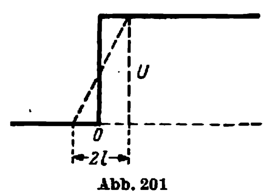


Abb. 201

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k'^2\psi. \tag{144,7}$$

Hierbei ändert sich der Koeffizient k' in dem Gebiet von $-$ bis $+l$ stetig von $k' = k_1$ bis $k' = k_2$. Einerseits haben wir für dieses Gebiet

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l}$$

und andererseits, wenn wir den Mittelwertsatz auf die rechte Seite von (144,7) anwenden,

$$\int_{-l}^{+l} k'^2\psi\,dx = 2l\overline{k'^2\psi}.$$

Somit ist

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l} = -2l\overline{k'^2\psi}$$

oder, wenn wir durch $l \to 0$ zur Grenze übergehen,

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}.$$

Die Stetigkeit der Funktion ψ an der Grenze beider Gebiete ergibt

$$(\psi_1)_{x=0} = (\psi_2)_{x=0}$$

oder, wenn wir (144,5) mit $a_1 = 1$ und (144,6′) benutzen,

$$1 + b_1 = a_2. \tag{144,8}$$

Aus der Stetigkeit der Ableitung

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

finden wir mit Hilfe von (144,5) und (144,6′)

$$1 - b_1 = \frac{k_2}{k_1} a_2. \tag{144,9}$$

Lösen wir die Gleichungen (144,8) und (144,9) nach b_1 und a_2 auf, dann erhalten wir

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{144,10}$$

In Analogie zur Optik können wir jetzt den Reflexionskoeffizienten R und den Durchlässigkeitskoeffizienten D definieren. Der Reflexionskoeffizient ist gleich dem Verhältnis des Amplitudenquadrates der reflektierten zu dem der einfallenden Welle oder, wenn wir bedenken, daß die Amplitude a_1 der einfallenden Welle nach Voraussetzung gleich 1 ist:

$$R = b_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \tag{144,11}$$

Für die Berechnung des Durchlässigkeitskoeffizienten D müssen wir das Verhältnis der Amplitudenquadrate der hindurchgehenden und der einfallenden Welle mit dem Verhältnis der Teilchengeschwindigkeiten in den entsprechenden Gebieten aus folgendem Grunde multiplizieren. Der Durchlässigkeitskoeffizient ist gleich dem Verhältnis von durchgehendem zu einfallendem Teilchenstrom. Stellen wir uns jetzt einen Zylinder mit der Grundfläche 1 cm² und einer Höhe vor, die gleich dem Zahlenwert der Geschwindigkeit v ist. Die Teilchendichte in diesem Zylinder sei gleich ϱ, also ist die Gesamtzahl der Teilchen in ihm gleich ϱv, und alle diese Teilchen gehen in 1 s durch den Boden des Zylinders hindurch. Ist der Teilchenstrom gleich ϱv, dann ist der Durchlässigkeitskoeffizient

$$D = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Da aber die Teilchendichte ϱ dem Quadrat der Amplitude der DE BROGLIEschen Welle proportional ist und das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

oder unter Berücksichtigung von (144,3) und (144,4)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$D = \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = a_2^2 \cdot \frac{k_2}{k_1} \tag{144,12}$$

(a_1 ist nach dem Vorhergehenden gleich eins), und wenn wir für a_2 den Ausdruck (144,10) benutzen, dann finden wir

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \tag{144,13}$$

Die Koeffizienten R und D können wir vom korpuskularen Gesichtspunkt folgendermaßen deuten: R ist für das Teilchen die Wahrscheinlichkeit einer Reflexion an der Grenze der Gebiete und D die Wahrscheinlichkeit, in das Gebiet *II* einzutreten, oder anders ausgedrückt, die Wahrscheinlichkeit, die Potentialschwelle zu überwinden.

Durch Addition von (144,11) und (144,13) finden wir $R + D = 1$, was nach dem Additionstheorem der Wahrscheinlichkeiten zu erwarten ist, da ein Teilchen an der Grenze entweder reflektiert wird oder weiterläuft.

Berechnen wir nun die Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizienten in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Gesamtenergie E zur potentiellen Energie U. Wir haben

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = 2\pi\frac{p_1}{h}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U)} = 2\pi\frac{p_2}{h}, \\ R &= \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{1-U/E}}{1+\sqrt{1-U/E}}\right)^2, \\ D &= 1 - R = 4\frac{\sqrt{1-U/E}}{(1+\sqrt{1-U/E})^2}. \end{aligned}\right\}$$

In der Tabelle XX sind einige Zahlenwerte von R und D angeführt. Aus dieser Tabelle ersehen wir folgendes: ist die Energie des Teilchens doppelt so groß wie die Höhe der „Potentialstufe" U, dann hat die Wahrscheinlichkeit der Reflexion einen schon recht beträchtlichen Wert um 3%, und bei $U = E$ ist ein Eindringen in das Gebiet *II* allgemein unmöglich, während nach der klassischen Mechanik in diesem Fall das Teilchen mit Gewißheit in das Gebiet *II* übergeht, aber nur mit einer kinetischen Energie, die dort gleich null ist.

Tabelle XX

$\frac{U}{E}$	R	D	$\frac{E}{U}$
0,1	0,0007	0,9993	10
0,5	0,0296	0,9704	2
0,8	0,1459	0,8541	1,25
0,9	0,2700	0,7300	1,11
1,0	1,000	0,000	1,0

Der Grund dafür, daß wir von dieser Quantenreflexion bei den gewöhnlichen makroskopischen Versuchen mit Elektronen nichts beobachten, liegt darin, daß sich das Potential an der Grenze auf einem Gebiet „makroskopischer" Größe ändert und nicht unvermittelt sprunghaft, wie in Abb. 200a, anwächst. Besitzt jedoch

die Breite des Übergangsgebietes atomare Abmessungen (1–10 Å), so muß dieser Effekt auftreten und berücksichtigt werden.

b) Nach der klassischen Mechanik muß für $E < U$ der Übergang aus dem Gebiet I in das Gebiet II unmöglich sein, da unter dieser Bedingung (die potentielle Energie größer als die Gesamtenergie) die kinetische Energie des Teilchens im Gebiet II negativ und die Geschwindigkeit daher imaginär sein müßte.

Berechnen wir nun den Reflexionskoeffizienten für diesen Fall, wobei wir die Quantenmechanik benutzen. Vor allem müssen wir unsere Aufmerksamkeit darauf richten, daß für $E < U$ die Größe k_2 rein imaginär wird:

$$k_2 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U)} = i\,\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)} = ik\,,$$

wobei $k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}$. Infolgedessen muß bei der Berechnung von R nach der Formel (144,11) die Quadrierung durch die Multiplikation der konjugiert komplexen Größen RR^* ersetzt werden oder, was dasselbe ist, durch die Bildung des Quadrates des Moduls:

$$R = \left|\frac{k_1 - ik}{k_1 + ik}\right|^2 = 1\,,\quad D = 1 - R = 0\,.$$

Für $E < U$ ist somit der Reflexionskoeffizient gleich 1, d. h., die Reflexion ist vollständig. Wie wir sehen, stimmt dieses Resultat vollständig mit dem erwarteten überein. Unerwartet erscheint jedoch, daß es trotz der vollständigen Reflexion eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür gibt, das Teilchen im Gebiet II zu finden. Mit anderen Worten, die Reflexion findet nicht unbedingt an der Grenze der Gebiete selbst statt, sondern einige Teilchen dringen in das Gebiet II ein und kehren dann in das Gebiet I zurück. Da für $E < U$ der Koeffizient k_2 rein imaginär und somit gleich ik wird, nimmt die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für das Gebiet II die Form

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} = a_2 e^{-kx}$$

an, und die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen in der Längeneinheit zu finden, wird gleich

$$\psi_2\psi_2^* = \psi_2^2 = a_2^2 e^{-2kx} = a_2^2 e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}\,x}\,. \qquad (144{,}14)$$

Das bedeutet aber, daß es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür gibt, das Teilchen im Gebiet II zu finden. In der Tat fällt diese Wahrscheinlichkeit exponentiell (d. h. sehr schnell) mit der Vergrößerung von x ab, sie ist jedoch von null verschieden: das Mikroteilchen kann in ein Gebiet eindringen, das für ein makroskopisches Teilchen „verboten“ ist.

Berechnen wir beispielsweise die relative Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in der Entfernung $x = 1$ Å $= 10^{-8}$ cm von der Grenze aufzufinden, wenn $U - E = 1$ eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg. Wir haben dann

$$\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}\,x = \frac{12{,}56}{6{,}6\cdot 10^{-27}}\sqrt{1{,}87\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}}\cdot 10^{-8} = 1{,}045\,,\quad e^{-1{,}045} = 0{,}35\,.$$

Wie ersichtlich, ist die Wahrscheinlichkeit sehr groß (ungefähr 35%); bei $x = 5$ Å wird sie gleich $e^{-5{,}2} = 0{,}005$, d. h. klein, aber noch deutlich merkbar; bei 10 Å ist der Exponentialfaktor bereits eine verschwindend kleine Größe $e^{-10{,}45} = 4{,}54 \cdot 10^{-5}$.

Die Deutung der erhaltenen Resultate vom Wellengesichtspunkt bereitet keine Schwierigkeiten, da der Fall $E < U$ dem Fall der totalen inneren Reflexion

in der Optik entspricht. Vom Gesichtspunkt der geometrischen Optik kann das Licht beim Übergang aus einem dichteren Medium in ein weniger dichtes nicht in das weniger dichte Medium eindringen, wenn der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist. Wie die Wellenoptik zeigt und der Versuch bestätigt, gibt es in Wirklichkeit in dem weniger dichten Medium auch bei Einfallswinkeln, die größer als der Grenzwinkel sind, ein Wellenfeld mit exponentiell abnehmender Amplitude. Hierbei wird die Abnahme der Amplitude angenähert durch den Faktor $e^{-2\pi x/\lambda}$ und die Abnahme der Intensität durch den Faktor $e^{-4\pi x/\lambda}$ bestimmt, einem Gesetz, das der Abnahme der Wahrscheinlichkeitsdichte ψ^2 für $E < U$ analog ist. Die Berechnung zeigt ferner, daß trotz des Eindringens von Licht in das zweite Medium der Mittelwert der normal zur Trennfläche liegenden Komponente des POYNTINGschen Vektors (Energiestrom) über einen genügend großen Zeitraum gleich null ist. Dies zeigt, daß es eine einseitig aus dem ersten in das zweite Medium gerichtete Energiebewegung nicht gibt.

Eine ausführliche, von A. A. EICHENWALD durchgeführte Analyse zeigte, daß sich bei totaler innerer Reflexion die Linien des POYNTINGschen Vektors als gekrümmt erweisen. Sie dringen zuerst in das zweite Medium ein und kehren dann von neuem in das erste zurück; die Reflexion wird also vollständig bleiben, obwohl sich im zweiten Medium ein Feld gebildet hat. Dadurch wird in unserem Fall der Reflexionskoeffizient R gleich 1 und der Eindringungskoeffizient in das zweite Medium gleich null: die Teilchen werden in das Gebiet II „eintreten", dringen auf einige Entfernung ein und kehren wieder in das Gebiet I zurück.

Erweist sich auf diese Weise die Wellendeutung des Eindringens in das „verbotene" Gebiet als sehr einfach, so stellt sich dieselbe Erscheinung vom korpuskularen Gesichtspunkt auf den ersten Blick als unverständlich dar. Ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen rechts von der Schwelle zu finden, nicht gleich null, so bedeutet dies die Möglichkeit, es dort zu beobachten. Wie gezeigt wurde, ist es vom Standpunkt der klassischen Mechanik unmöglich, das Teilchen in einem Gebiet, in dem $E < U$ ist, zu beobachten, da der Übergang eines Teilchens aus dem Gebiet I in das Gebiet II, in dem $E < U$ ist, mit einer Verletzung des Gesetzes der Energieerhaltung verbunden wäre.

In der Quantenmechanik bedeutet es jedoch kein Paradoxon, ein Teilchen in einem Gebiet beobachten zu können, in dem $E < U$ ist. Zuerst müssen wir uns daran erinnern, daß nach der Ungenauigkeitsrelation für Mikroteilchen gleichzeitige genaue Werte für x und p nicht angegeben werden können. Deshalb hat es keinen Sinn, von gleichzeitig bestimmten Werten der potentiellen (Funktion x) und der kinetischen (Funktion p) Energie zu sprechen. Was bedeutet es ferner, das Teilchen rechts von der Schwelle zu finden? Offensichtlich müssen wir hierzu seine Koordinate x messen.

Bei der Analyse der uns interessierenden Frage zeigt sich jetzt, daß sich nicht jede Methode der Koordinatenmessung für den Fall $E < U$ eignet, und wenn sie sich auch als passend erweist, erhält das Teilchen vom Meßgerät doch einen solchen zusätzlichen Energiebetrag, daß das Gesetz von der Energieerhaltung nicht verletzt wird.

Führen wir nun diese Analyse durch. Es möge uns gelungen sein, die Koordinate eines Teilchens angenähert zu messen. Wir wissen, daß sich das Teilchen irgendwo rechts von der Schwelle innerhalb eines Abschnittes von der Länge l befindet.

In diesem Fall ist die Koordinate des Teilchens schon nicht mehr vollkommen unbestimmt, sondern wird uns mit der Ungenauigkeit $\Delta x = l$ bekannt sein. Wenn wir nun aber schon die Koordinate des Teilchens mit der Ungenauigkeit $\Delta x = l$ bestimmten, dann muß der Impuls die Ungenauigkeit

$$\Delta p \geqq \frac{h}{l} \tag{144,15}$$

erhalten.

Woraus kann nun dieser zusätzliche Impuls entstanden sein? Um mit voller Überzeugung behaupten zu können, daß sich das Teilchen rechts und nicht links von der Schwelle befindet, muß das Auflösungsvermögen des optischen Gerätes, mit dessen Hilfe die Bestimmung der Koordinaten des Teilchens durchgeführt wird, genügend hoch sein. Wie aus der Optik bekannt ist, muß zu diesem Zweck die Wellenlänge des zur Beleuchtung des Teilchens benutzten Lichtes entsprechend klein sein. In diesem Falle erhält das Teilchen bei der Streuung des Lichtes einen COMPTON-Rückstoß, der die Ungenauigkeit des Impulses bedingt.

Der Ungenauigkeit des Impulses Δp entspricht nun die Ungenauigkeit der Energie $\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$. Schätzen wir sie ab. Da die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen aufzufinden, nach der Formel (144,14) mit dem Anwachsen von x exponentiell abnimmt, hat es nur Sinn, das Teilchen in solchen Entfernungen von der Schwelle zu suchen, für die der Exponent in (144,14) von der Größenordnung 1 ist, d. h.

$$\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}\,l \approx 1\,,$$

woraus sich

$$l \approx \frac{h}{4\pi\sqrt{2m(U-E)}}$$

ergibt. Auf diese Weise wird die Ungenauigkeit des Impulses nach (144,15)

$$\Delta p \geqq 4\pi\sqrt{2m(U-E)}$$

sein und folglich auch

$$\Delta p > \sqrt{2m(U-E)}\,.$$

Deshalb ist

$$(\Delta p)^2 > 2m(U-E)$$

und

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} > U-E\,.$$

Die zusätzliche Energie, die das Teilchen bei der Messung der Koordinaten erhält, ist größer als der Unterschied zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie; die Beobachtung eines Teilchens rechts von der Schwelle widerspricht also nicht dem Gesetz der Energieerhaltung.

§ 145. Die Potentialschwelle endlicher Breite

Setzen wir die Lösung von Potentialschwellen-Aufgaben fort und beschäftigen uns mit der Untersuchung des Falles, bei dem der Potentialwall eine endliche Breite besitzt. Die Bedingungen der Aufgabe die wir in diesem Paragraphen lösen wer-

den, sind folgende: Das Teilchen bewegt sich parallel zur x-Achse von links nach rechts in einem Feld, das wir in drei Gebiete aufteilen.

Im Gebiet I ist für $x \leq 0$ die potentielle Energie $U = 0$.

Im Gebiet II ist für $0 \leq x \leq d$ die potentielle Energie $U = \text{const} \neq 0$

Im Gebiet III ist für $x \geq d$ die potentielle Energie $U = 0$.

Dieser Schwellentyp stellt schematisch die Bedingungen dar, denen wir bei der Lösung vieler Aufgaben in der Atomphysik begegnen (z. B. Emission von Elektronen aus Metallen, radioaktiver Zerfall usw.).

Schreiben wir die SCHRÖDINGER-Gleichung für jedes Gebiet einzeln: für die Gebiete I und III ($U = 0$) ist

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi = 0 \tag{145,1}$$

und für das Gebiet II ($U \neq 0$)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U)\, \psi = 0\,. \tag{145,2}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind entsprechend

$$\psi_{I,\,III} = e^{\pm i k_1 x} \qquad \left(k_1 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda}\right), \tag{145,3}$$

$$\psi_{II} = e^{\pm i k_2 x} \qquad \left(k_2 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m\,(E - U)}\right). \tag{145,4}$$

In dem vorigen Paragraphen betrachteten wir den Übergang eines Teilchens in ein unendliches Gebiet mit anderer potentieller Energie. Wir sahen, daß es bei beliebigem Verhältnis zwischen der Energie des Teilchens und der Höhe der Potentialschwelle für das Teilchen eine bestimmte Wahrscheinlichkeit gibt, eine Reflexion zu erleiden, und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, in das Gebiet II einzudringen. In dem uns vorliegenden Fall hat die Potentialschwelle eine endliche Breite; wir werden hier eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür finden, daß das Teilchen durch das Gebiet II hindurch geht und in das Gebiet III eintritt. Insbesondere ist interessant, daß auch dann, wenn die Gesamtenergie des einfallenden Teilchens kleiner als seine potentielle Energie im Gebiet II ist, diese Wahrscheinlichkeit einen endlichen Wert hat, wobei das Teilchen in diesem Fall mit derselben Energie in das Gebiet III eintritt, welche es im Gebiet I besaß.

Der Unterschied des betrachteten Falles zu dem im vorigen Paragraphen untersuchten besteht darin, daß hier sowohl an der Grenze der Gebiete I und II als auch an der Grenze der Gebiete II und III eine Reflexion stattfinden kann. Also werden die Lösungen lauten:

$$\psi_I = e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, \quad \psi_{II} = a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, \quad \psi_{III} = a_3 e^{ik_1 x}. \tag{145,5}$$

Wie im vorigen Paragraphen wird auch hier der Koeffizient a_1 gleich eins angenommen.

Zur Berechnung der Koeffizienten R und D müssen wir zuerst die Konstanten b_1, b_2, a_2, a_3 bestimmen. Zu diesem Zweck benutzen wir die Stetigkeitsbedingung der Funktion ψ und ihrer ersten Ableitung an den Grenzen der Gebiete I und II, II und III, also an den Stellen $x = 0$ und $x = d$. Berechnen wir diese Bedingungen:

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \qquad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \tag{145,6}$$

$$(\psi_{II})_{x=d} = (\psi_{III})_{x=d}, \qquad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=d} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=d}. \tag{145,7}$$

Sie ergeben

$$\left.\begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ k_1 - k_1 b_1 &= k_2 a_2 - k_2 b_2, \\ a_2 e^{ik_2 d} + b_2 e^{-ik_2 d} &= a_3 e^{ik_1 d}, \\ a_2 e^{ik_2 d} - b_2 e^{-ik_2 d} &= a_3 \frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 d}. \end{aligned}\right| \quad (145{,}8)$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem, dann erhalten wir für a_3 den folgenden Ausdruck:

$$a_3 = \frac{4k_1 k_2 e^{ik_1 d}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2 d} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2 d}}. \quad (145{,}9)$$

Wir werden jetzt den Reflexionskoeffizienten R nicht berechnen, da diese Berechnung im Vergleich zu dem im vorigen Paragraphen Gesagten nichts prinzipiell Neues erfordert. Deshalb werden wir die übrigen Konstanten b_1, a_2, b_2 nicht benötigen. Der Durchlässigkeitskoeffizient D der Schwelle [siehe Formel (144,12)] wird in diesem Fall einfach gleich dem Quadrat des Moduls a_3 sein, da die Wellenlänge in den Gebieten I und III gleich ist:

$$D = |a_3|^2 = a_3 a_3^*. \quad (145{,}10)$$

Für uns hat die Größe D dann Interesse, wenn $E < U$ ist. Hier ist

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m\,(E - U)}$$

offensichtlich eine rein imaginäre Zahl. Wir setzen

$$k_2 = ik,$$

worin

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m\,(U - E)} \quad (145{,}11)$$

ist. Die Exponentialfunktionen $e^{\pm ik_2 d}$, die in den Nenner von (145,9) eingehen, werden in diesem Fall die reellen Zahlen $e^{\mp kd}$. An Stelle von (145,9) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \frac{i \cdot 4k_1 k e^{ik_1 d}}{(k_1 + ik)^2 e^{kd} - (k_1 - ik)^2 e^{-kd}}, \\ a_3^* &= \frac{-i \cdot 4k_1 k e^{-ik_1 d}}{(k_1 - ik)^2 e^{kd} - (k_1 + ik)^2 e^{-kd}}. \end{aligned}\right|$$

Führen wir die hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ein, dann können wir a_3 und a_3^* in der Form

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \frac{i \cdot 2k_1 k e^{ik_1 d}}{(k_1^2 - k^2)\,\mathfrak{Sin}\, kd + 2ikk_1\,\mathfrak{Cof}\, kd}, \\ a_3^* &= \frac{-i \cdot 2k_1 k e^{-ik_1 d}}{(k_1^2 - k^2)\,\mathfrak{Sin}\, kd - 2ikk_1\,\mathfrak{Cof}\, kd} \end{aligned}\right\}$$

ausdrücken. Dies ergibt

$$D = a_3 a_3^* = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 - k^2)^2\,\mathfrak{Sin}^2\, kd + 4k^2 k_1^2\,\mathfrak{Cof}^2\, kd}.$$

Bedenken wir, daß

$$\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

ist, dann erhalten wir

$$D = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 + k^2)^2 \mathfrak{Sin}^2 kd + 4k_1^2 k^2}. \tag{145,12}$$

Wir können in der überwiegenden Mehrzahl der uns interessierenden Fälle $\mathfrak{Sin}^2 kd$ einfach gleich $\frac{1}{2} e^{2kd}$ setzen, dann erhalten wir zum Beispiel für ein Elektron bei $U - E = 150$ V und $d = 10^{-8}$ cm

$$kd = \frac{2\pi}{10^{-8}} \cdot 10^{-8} = 6{,}28.$$

Deshalb ist

$$e^{2kd} = e^{12{,}56} = 2{,}9 \cdot 10^5, \quad e^{-2kd} = e^{-12{,}56} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Schreiben wir jetzt D in der Form

$$D = \frac{4}{\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{k} + \frac{k}{k_1}\right)^2 e^{2kd} + 4}$$

und bedenken, daß die 4 im Nenner gegenüber e^{2kd} vernachlässigt werden kann und daß k_1 und k von der gleichen Größenordnung sind, dann erhalten wir bis auf einen unwesentlichen Faktor

$$D \approx e^{-2kd} = e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}\,d}. \tag{145,13}$$

Diese Formel zeigt, daß die Durchlässigkeit der Schwelle in starkem Maße von ihrer Breite d abhängt.

Berechnen wir den Wert des Exponentialfaktors für Elektronen. Nehmen wir für die Masse des Elektrons $m = 9{,}8 \cdot 10^{-28}$ g, für die Plancksche Konstante $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·s und ist der Unterschied zwischen der Höhe der Schwelle U und der Energie des Elektrons gleich V Elektronenvolt oder $1{,}6 \cdot 10^{-12}\, V$ erg, so ist

$$\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)} = 1{,}08 \cdot \sqrt{V} \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}.$$

Für die Differenz $U - E = V = 5$ eV erhalten wir die folgenden Werte des Exponentialfaktors für verschiedene Breiten der Schwelle:

d (in Å)	1	1,3	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
D	0,1	0,04	0,03	0,013	0,008	$5{,}80 \cdot 10^{-7}$	$3{,}4 \cdot 10^{-11}$

Wie wir sehen, ist bei einer Breite der Schwelle von 1 Å (Atomabmessungen) die Durchlässigkeit ziemlich groß (einige Prozent), aber schon bei $d = 10$ Å wird sie verschwindend klein.

Als interessant muß noch vermerkt werden, daß für ein Teilchen der Durchgang durch die Potentialschwelle nicht von einem Energieverlust begleitet ist: es verläßt die Grenze der Schwelle mit derselben Energie, mit der es eingetreten ist.

Wir betrachteten den Durchgang eines Teilchens durch eine Potentialschwelle von vereinfachter rechtwinkliger Gestalt. Es kann gezeigt werden, daß der Durchlässigkeitskoeffizient einer Schwelle von willkürlicher Form (Abb. 202) mit genügender Annäherung durch eine Formel ausgedrückt werden kann, die als eine natürliche Verallgemeinerung der Formel (145,13) erscheint:

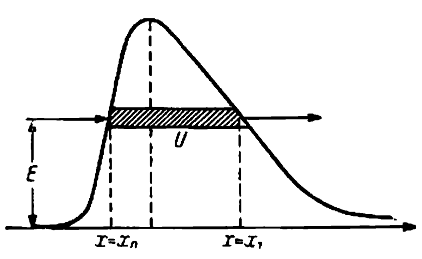


Abb. 202. Potentialberg willkürlicher Form

$$D = C e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m}\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{(U-E)}\,dx}, \qquad (145{,}14)$$

wobei C eine unwesentliche Konstante der Größenordnung 1 ist. Diese Formel werden wir im weiteren bei einigen konkreten physikalischen Aufgaben benutzen.

Der Durchgang durch den Potentialberg wird oftmals bildlich als *Tunneleffekt* bezeichnet: bei der Überwindung des Berges überklettert das Teilchen nicht den Gipfel, sondern es geht *durch ihn* wie durch einen Tunnel hindurch. Die Grundlagen für die Theorie des Tunneleffektes wurden in der Arbeit von L. J. MANDELSTAM und M. A. LEONTOWITSCH dargelegt.

Viele Erscheinungen, die in der klassischen Mechanik nicht erklärt werden können, sind in der Quantenmechanik dank der in den beiden letzten Paragraphen betrachteten eigentümlichen Eigenschaften der Mikroteilchen leicht zu erklären. Diesen Fragen wollen wir uns noch in den folgenden Paragraphen zuwenden.

§ 146. Die Schwingungen einer Saite

Die in den vorigen Paragraphen betrachteten Aufgaben zeigen uns eigentümliche Gesetze, die die Bewegung sehr kleiner Teilchen lenken. In den folgenden Paragraphen zeigen wir nun, auf welche Weise aus der SCHRÖDINGER-Gleichung vollkommen ungezwungen eine uns schon bekannte Besonderheit der Atomsysteme, die diskreten Energieniveaus, folgt, die sie scharf von den Systemen unterscheidet, die der klassischen Mechanik gehorchen. Wir werden sehen, daß diese Besonderheit in enger Verbindung mit einigen Eigenschaften der SCHRÖDINGERschen Differentialgleichung steht, Eigenschaften, die schon vor langem bei der Lösung bestimmter Aufgaben in der klassischen Physik entdeckt wurden.

Um im weiteren das Verständnis zu erleichtern, werden wir zu Anfang eine klassische Aufgabe betrachten, die von unserem Gesichtspunkt aus sehr charakteristisch ist, nämlich die Schwingungen einer gespannten Saite, die auf ihrer gesamten Länge ein und dieselbe Dichte ($\varrho = \text{const}$) und die gleiche Spannung ($P = \text{const}$) besitzt.

Die Schwingungsgleichung einer Saite ist die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (146{,}1)$$

wobei $u(x,t)$ die Abweichung der Saite von der Ruhelage ist und c' die Ausbreitungs-

geschwindigkeit der Welle auf der Saite, die mit der Spannung P und der Dichte ϱ durch die Formel

$$c' = \sqrt{\frac{P}{\varrho}} \tag{146,2}$$

verknüpft ist. Bei konstantem P und ϱ ist $c' = \text{const.}$

Nehmen wir zuerst an, daß die Saite unendlich lang sei und betrachten den Fall der harmonischen (monochromatischen) Welle. Dann führt jedes Teilstück der Saite harmonische Schwingungen aus, und wir können die Lösung der Gleichung (146,1) in der Form

$$u(x,t) = y(x)\,e^{i2\pi\nu t} \tag{146,3}$$

suchen. Setzen wir diese Lösung in (146,1) ein, dann erhalten wir nach Division durch $e^{i2\pi\nu t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c'^2}\,y = 0 \tag{146,4}$$

oder, wenn wir ν/c' durch $1/\lambda$ ersetzen,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,y = 0\,. \tag{146,5}$$

Diese Gleichung wird von den Lösungen $e^{\pm i\frac{2\pi}{\lambda}x}$ befriedigt. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y = B_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} + B_2 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x}\,, \tag{146,6}$$

worin B_1 und B_2 willkürliche komplexe Konstanten sind, die die Anfangsphasen δ_1 und δ_2 enthalten (siehe § 45):

$$B_1 = b_1 e^{i\delta_1}, \quad B_2 = b_2 e^{-i\delta_2}.$$

Führen wir in die Lösung (146,6) die reellen Amplituden b_1 und b_2 ein, dann erhalten wir

$$y = b_1 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_1\right)} + b_2 e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_2\right)}. \tag{146,7}$$

Fügen wir jetzt zu jedem Glied von (146,7) den Zeitfaktor $e^{i2\pi\nu t} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}c't}$ hinzu, dann erhalten wir die allgemeine Lösung der Gleichung (146,1):

$$u(x,t) = b_1 e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right]} + b_2 e^{-i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]} \tag{146,8'}$$

oder, wenn wir nur den Realteil nehmen,

$$u(x,t) = b_1 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right] + b_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]. \tag{146,8}$$

Jedes dieser Lösungsglieder stellt eine Welle dar, die sich auf der Saite ausbreitet; entspricht das erste Glied einer Welle, die sich von links nach rechts mit der Geschwindigkeit $+c'$ ausbreitet, so entspricht das zweite Glied einer Welle, die von rechts nach links mit der Geschwindigkeit $-c'$ läuft.

Nehmen wir an, daß $b_1 = b_2 = \frac{a}{2}$, und bilden wir die Summe der in (146,8) eingehenden Kosinus nach der bekannten trigonometrischen Regel:

$$u(x,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}c't+\delta\right) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos(2\pi\nu t+\delta)\,, \tag{146,9}$$

mit $\frac{\delta_1+\delta_2}{2}=\delta'$, $\frac{\delta_1-\delta_2}{2}=\delta$. Es ist offensichtlich, daß diese Lösung stehende Wellen auf der Saite darstellt, für die bei Werten von x, welche die Bedingung

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)=0$$

erfüllen, die Abweichung bei beliebigem t gleich null sein wird. Dies bedeutet, daß es auf der Saite Punkte gibt, in denen die Abweichung die ganze Zeit über gleich null ist, sogenannte Knoten, zwischen denen sich Punkte befinden, in denen die Abweichung einen maximalen Wert hat, die sogenannten Bäuche.

Nehmen wir jetzt an, daß die Saite an einem Ende fest eingespannt ist (beispielsweise bei $x=0$). Auf diese Weise erhalten wir eine Grenzbedingung:

$$u(0,t)=0. \tag{146,10}$$

Diese Grenzbedingung wird erfüllt für

$$u(0,t)=a\cos\delta'\cos(2\pi\nu t+\delta),$$

was nur (bei Ausschluß des trivialen Falls $a=0$) dann sein kann, wenn $\delta'=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, d. h.

$$u(x,t)=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cos(2\pi\nu t+\delta). \tag{146,11}$$

Hat die Saite die endliche Länge l und ist an beiden Enden fest eingespannt, so muß die Lösung (146,9) den beiden Grenzbedingungen

$$u(0,t)=0 \text{ und } u(l,t)=0$$

genügen.

Die Anwendung der ersten Bedingung erbrachte schon die bekannte Lösung (146,11); die zweite Randbedingung fordert, ausführlich hingeschrieben:

$$a\sin\frac{2\pi}{\lambda}l\cos(2\pi\nu t+\delta)=0$$

für beliebige Werte von t. Diese Forderung wird erfüllt, wenn

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}l=n\pi \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{146,12}$$

woraus

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}=n\frac{\pi}{l} \quad\text{und}\quad 2\pi\nu_n=\frac{2\pi}{\lambda_n}c'=n\frac{\pi c'}{l} \tag{146,13}$$

folgt.

Die Lösungen der Differentialgleichung (146,1) und der Grenzbedingungen (146,12) stellen sich als eine unendliche Menge von Eigenfunktionen

$$\sin n\frac{\pi x}{l}\cos(2\pi\nu_n t+\delta_n)\equiv\sin n\frac{\pi x}{l}\cos\left(n\frac{\pi c'}{l}t+\delta_n\right) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{146,14}$$

dar.

Diese Funktionen beschreiben verschiedene *stehende Wellen* oder *Eigenschwingungen*, die die an beiden Enden befestigte Saite ausführen kann. Setzen wir in (146,14) $n=1$, dann erhalten wir die Lösung

$$u_1=\sin\pi\frac{x}{l}\cos\left(\frac{\pi c'}{l}t+\delta\right). \tag{146,15}$$

Diese Lösung stellt eine stehende Welle dar, die bei $x=0$ und bei $x=l$ zwei

Knoten besitzt, da nur bei diesen Werten von x die Funktion (146,15) für beliebige Werte von t null wird. Bei $n = 2$ erhalten wir die stehende Welle

$$u_2 = \sin 2 \frac{\pi x}{l} \cos\left(2 \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right),$$

welche drei Knoten bei $x = 0, l/2, l$ besitzt. Allgemein beschreibt die m-te Funktion

$$u_m = \sin m \frac{\pi x}{l} \cos\left(m \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

eine stehende Welle, die $(m + 1)$ Knoten besitzt. Wir vermerken sofort, daß die ganze Zahl m hier dieselbe Rolle spielt, wie sie die Quantenzahlen in den Aufgaben der Atomphysik spielen.

Die Wellenlängen, die auf der an beiden Enden befestigten Saite auftreten können, finden wir aus der Formel (146,12):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \tag{146,16}$$

wobei sich nur diese Wellen auf der Saite ausbreiten können, da sonst die Grenzbedingungen nicht erfüllt sein werden. Die diesen Wellenlängen entsprechende ausgewählte Reihe von Frequenzen wird

$$\nu_n = n \frac{c'}{2l} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{146,17}$$

sein.

Diese Frequenzen nennt man die *Eigenfrequenzen* der schwingenden Saite. Wie wir sehen, bilden sie eine diskrete Reihe: die kleinste Eigenfrequenz ist gleich $\nu_1 = \frac{c'}{2l}$; die folgenden Frequenzen werden $2\nu_1, 3\nu_1, \ldots$ sein. Die kleinste Frequenz ν_1 nennt man in der Akustik den Grundton; ν_2 ist der erste Oberton oder die erste Harmonische usw.

Wir führen folgende Terminologie ein, die wir im weiteren immer benutzen wollen. Die Funktion

$$y_n = \sin n \frac{\pi x}{l} \tag{146,18}$$

befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0 \tag{146,19}$$

und die Randbedingung

$$y(0) = y(l)$$

nur dann, wenn die Wellenlänge λ, die in die Gleichung (146,19) als Parameter eingeht, die Werte

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

annimmt. Diese Werte werden wir die *Eigenwerte* des Parameters und die ihnen entsprechenden Funktionen die *Eigenfunktionen* der Differentialgleichung (146,19) nennen.

Die Eigenschwingungen, die die an beiden Enden befestigte Saite auszuführen vermag, entsprechen einer diskreten Reihe von Schwingungen. Hieraus folgt jedoch nicht, daß die Saite nun mit einer Frequenz schwingen muß, die nur einem Grundton oder nur einer von den Harmonischen entspricht. Um die Saite

zu so einfachen Schwingungen anzuregen, sind spezielle Bedingungen notwendig. Bei den gewöhnlichen Anregungsarten entstehen gleichzeitig alle Eigenschwingungen, die die Saite ausführen kann. Mathematisch entspricht dies der Tatsache, daß die Gleichung

$$\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{146,1}$$

linear und homogen ist und deshalb nicht nur von den Lösungen

$$\sin n \frac{\pi x}{l} \cos\left(n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n\right) \tag{146,14}$$

erfüllt wird, sondern auch von ihren beliebigen Kombinationen. Da die Anzahl der Lösungen (146,14) unendlich groß ist, wird die Gleichung (146,1) von der unendlichen Reihe

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\left(\frac{\pi c'}{l}t+\delta_1\right) + a_2 \sin 2\frac{\pi x}{l}\cos\left(2\frac{\pi c'}{l}t+\delta_2\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\frac{\pi x}{l}\cos\left(n\frac{\pi c'}{l}t+\delta_n\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\frac{\pi x}{l}\left(b_n \cos n\frac{\pi c'}{l}t + c_n \sin n\frac{\pi c'}{l}t\right) \end{aligned} \tag{146,20}$$

erfüllt.

Hierbei können natürlich die einen oder die anderen Koeffizienten gleich null sein, woraus folgt, daß die ihnen entsprechenden Obertöne nicht vorhanden sind.

Sind alle Koeffizienten der Reihe (146,20) bekannt, dann können wir die Saitenschwingungen für einen beliebigen künftigen Zeitpunkt darstellen. Zur Bestimmung der Koeffizienten müssen die Anfangsbedingungen bekannt sein, und da die Gleichung (146,1) zweiter Ordnung ist, müssen zwei Anfangsbedingungen gegeben sein: der Anfangszustand der Saite und die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit ihrer Punkte.

Der Anfangszustand der Saite wird durch die Funktion

$$u(x,0) = u_0(x) = y_0(x)$$

gegeben, die die Gestalt der Saite für die Zeit $t = 0$ charakterisiert, und die Anfangsgeschwindigkeit wird durch den Wert der Ableitung $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0$ bestimmt.

Differenzieren wir die Reihe (146,20) nach t, dann erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi c'}{l}\sum_n \sin n\frac{\pi x}{l}\left(-n b_n \sin n\frac{\pi c'}{l}t + n c_n \cos n\frac{\pi c'}{l}t\right). \tag{146,21}$$

Für $t = 0$ ergeben (146,20) und (146,21)

$$y_0 = \sum_n b_n \sin n\frac{\pi x}{l}, \tag{146,22}$$

$$v_0 = \frac{\pi c'}{l}\sum_n n c_n \sin n\frac{\pi x}{l}. \tag{146,23}$$

Die Reihen (146,22) und (146,23) stellen aber offensichtlich FOURIER-Reihen dar.

Ihre Koeffizienten finden wir nach der üblichen Regel

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l y_0(x)\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx, \\ c_n &= \frac{2}{n\pi c'}\int_0^l v_0(x)\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (146{,}24)$$

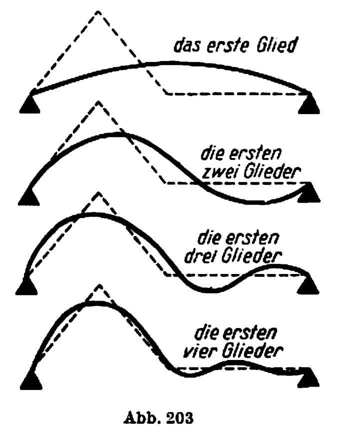


Abb. 203

Setzen wir die Koeffizienten b_n und c_n in die Reihe (146,20) ein, dann können wir die Schwingungen der Saite für einen beliebigen zukünftigen Zeitpunkt darstellen.

In der Abb. 203 ist ein Beispiel dargestellt, welches zeigt, wie die Anfangsform der schwingenden Saite mit Hilfe einer verschiedenen Anzahl von Gliedern der Fourier-Reihe wiedergegeben werden kann. Die gestrichelte Linie zeigt die Form der Saite im Augenblick $t = 0$, während die ausgezogenen Linien angeben, wie diese Form mit Hilfe von einem, zwei, drei und vier Gliedern der Fourier-Reihe wiedergegeben wird.

§ 147. Das Teilchen im Potentialkasten

Von der im vorigen Paragraphen betrachteten Aufgabe der klassischen Physik kehren wir wieder zur Schrödinger-Gleichung zurück und zeigen an einem einfachen Beispiel, auf welche Weise die Quantelung der Energie aus dieser Gleichung folgt.

Wir betrachten ein Mikroteilchen, das sich in einem Feld folgender Form befindet, von $x = 0$ bis $x = l$ sei die potentielle Energie U konstant und gleich null; an den Grenzen des Gebietes $(0, l)$ wachse U plötzlich bis ins Unendliche (Abb. 204). Unter diesen Bedingungen können wir behaupten, daß das Teilchen nicht über die Grenzen des Gebietes $(0, l)$ hinausgeht. Zur Veranschaulichung können wir uns ein Teilchen vorstellen, das in einen Kasten mit ideal reflektierenden Wänden eingeschlossen ist: im Innern des Kastens bewegt sich das Teilchen frei zwischen den Wänden, kann aber über die Grenzen des Kastens nicht hinausgehen.

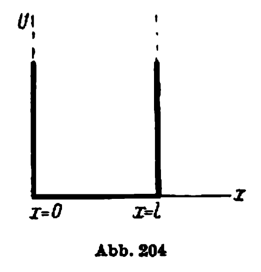


Abb. 204

Stellen wir zuerst die Grenzbedingungen dieser Aufgabe auf. Dazu schreiben wir die Schrödinger-Gleichung für eine eindimensionale, parallel zur x-Achse verlaufende Bewegung auf:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\,\psi = 0. \qquad (147{,}1)$$

Die potentielle Energie U muß in unserer Aufgabe den Forderungen

$$U = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq l, \\ \infty \text{ für } x = 0 \text{ und für } x = l \end{cases} \qquad (147{,}2)$$

genügen. Wir werden zeigen, daß die Funktion $\psi(x)$ zur Erfüllung dieser Forderungen an den Wänden null sein muß. Bezeichnen wir $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ mit ψ'', dann können wir (147,1) in der Form

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U) \tag{147,3}$$

schreiben. Für alle Werte von x zwischen 0 und l ist $U = 0$, und das Verhältnis ψ''/ψ hat einen endlichen Wert; für $x \to 0$ und $x \to l$ strebt die potentielle Energie gegen Unendlich. Nach den Bedingungen für die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion ψ und ihrer Ableitung ψ' ist dies nur dann möglich, wenn $\psi(x) \to 0$ geht. Somit führt die Aufgabe zur Integration der Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi = 0 \tag{147,4}$$

mit den Randbedingungen

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0. \tag{147,5}$$

Wie ersichtlich, ist diese Aufgabe vollständig mit den im vorigen Paragraphen betrachteten Schwingungen einer Saite identisch. Wir können also alle dort erhaltenen Resultate benutzen und geben ihnen nur die unserem Fall entsprechenden Deutungen. Insbesondere werden die Eigenfunktionen der Gleichung (147,4) (siehe § 146) lauten:

$$\psi_n = \sin n\frac{\pi x}{l}. \tag{147,6}$$

Um die Eigenwerte der Energie aufzufinden, beachten wir, daß der Koeffizient $8\pi^2 mE/h^2$ in der Gleichung (147,4) an Stelle des Koeffizienten $4\pi^2/\lambda^2$ in der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}y = 0 \tag{147,7}$$

steht. Da die Eigenwerte λ in (147,7) durch die Formel $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ bestimmt werden, ist $\frac{4\pi^2}{\lambda_n^2} = 4\pi^2\left(\frac{n}{2l}\right)^2$. Wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}E_n = 4\pi^2\left(\frac{n}{2l}\right)^2,$$

woraus dann

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8ml^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{147,8}$$

folgt.

Wir sehen somit, daß die Randbedingungen der Aufgabe nur von einer diskreten Reihe von Energiewerten (147,8) erfüllt werden. Dies bedeutet aber, daß ein Teilchen, welches in einem Potentialkasten „eingeschlossen" ist, nur gequantelte Energiewerte (147,8) annehmen kann.

Dieser Schluß erscheint zu Anfang als höchst unerwartet. Wir werden jedoch sofort zeigen, daß auch für sehr kleine Teilchen die Quantelung nur dann merklich wird, wenn der „Kasten" atomare Dimensionen besitzt. Berechnen wir hierzu den Abstand zwischen den Energieniveaus für ein Elektron mit der Masse $m = 9{,}8 \cdot 10^{-28}$ g, das sich in einem Kasten der Länge $l = 1$ cm befindet. Dabei ist

$$E_n = n^2\frac{(6{,}65 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-28}} = n^2 \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-27}\,\text{erg} = n^2 \cdot 3{,}37 \cdot 10^{-15}\,\text{eV}.$$

Der Abstand zwischen benachbarten Niveaus ($\Delta n = 1$) wird dann

$$\Delta E_n \approx 2n \cdot 3{,}37 \cdot 10^{-15}\,\text{eV} = 6{,}74 \cdot 10^{-15}\, n\,\text{eV}.$$

Diese Entfernung ist so klein, daß wir es praktisch mit einer kontinuierlichen Energiereihe zu tun haben. Im folgenden Paragraphen werden wir jedoch sehen, daß das Vorhandensein diskreter, wenn auch sehr eng beieinander liegender Niveaus im Fall eines Kastens von makroskopischen Abmessungen eine große Bedeutung besitzt.

Nehmen wir jetzt an, daß der Kasten Abmessungen atomarer Größenordnungen hat, beispielsweise $l = 10$ Å $= 10^{-7}$ cm. Dann ist

$$E_n = 5{,}4 \cdot 10^{-13}\, n^2\,\text{erg} = 0{,}34\, n^2\,\text{eV},$$

und der Abstand zwischen den Niveaus bei $\Delta n = 1$ ist

$$\Delta E_n = 0{,}68\, n\,\text{eV}.$$

Dies ist ein gut beobachtbarer Abstand.

Bis jetzt interessierten uns nur die Eigenwerte der Energie. Betrachten wir nun die Eigenschaften der Eigenfunktionen unserer Aufgabe. Wir zeigen vor allem, daß die Eigenfunktionen die Eigenschaft der *Orthogonalität* besitzen, die durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x)\psi_n^0(x)\,dx = 0 \quad \text{bei } m \neq n$$

ausgedrückt wird. Zum Beweis bedenken wir vor allem, daß auf Grund der Grenzbedingungen (147,5) die Funktion ψ für $x = 0$ und $x = l$ null wird. Die Integration zwischen den unendlichen Grenzen wird also auf eine Integration von 0 bis l zurückgeführt. Berücksichtigen wir den allgemeinen Ausdruck für die Eigenfunktionen (147,6), dann erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x)\psi_n^0(x)\,dx = \int_0^l \sin m\frac{\pi x}{l} \sin n\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\cos(m-n)\frac{\pi x}{l} - \cos(m+n)\frac{\pi x}{l}\right] dx = 0,$$

was wir auch beweisen wollten.

Für $m = n$ wird das Integral nicht gleich null, was uns erlaubt, die Funktion ψ_n auf 1 zu *normieren*. Tatsächlich können wir einen solchen Faktor N_n finden, daß das Produkt $N_n \cdot \psi_n$ normiert wird, d. h., daß die Bedingung

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1$$

erfüllt wird. Da (siehe weiter oben) die Integrale von $-\infty$ bis 0 und von l bis $+\infty$ gleich null sind, weil die Funktion ψ_n in diesen Gebieten gleich null ist, so erhalten wir

$$1 = N_n^2 \int_0^l \sin^2 n\frac{\pi x}{l}\,dx = N_n^2 \frac{l}{2},$$

woraus

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

folgt. Somit ist der normierende Faktor für alle Funktionen ψ_n gleich, und die normierten Eigenfunktionen lauten:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin 2 \frac{\pi x}{l}, \quad \ldots$$

Erinnern wir uns daran, daß bei einem Teilchen in Zuständen, die durch die Eigenfunktionen ψ_n beschreibbar sind, die Abhängigkeit von der Zeit durch den „monochromatischen" Faktor $e^{-i 2\pi \frac{E_n}{h} t}$ ausgedrückt wird. Die Funktion, die den Zustand eines Teilchens der Energie E_n beschreibt, lautet also für einen beliebigen Zeitpunkt:

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x)\, e^{-i 2\pi \frac{E_n}{h} t} = \sin n \frac{\pi x}{l}\, e^{-i 2\pi \frac{E_n}{h} t}.$$

Hierbei muß nach dem im § 143 Gesagten der Zeitfaktor komplex sein, es darf nicht nur sein Realteil genommen werden. Jedoch hat nicht die Funktion $\psi_n(x, t)$ selbst einen physikalischen Sinn, sondern nur das Quadrat ihres Moduls

$$|\psi_n(x,t)|^2 = \psi_n^*(x,t)\, \psi_n(x,t) = \psi_n^2(x) = \sin^2 n \frac{\pi x}{l}.$$

Offensichtlich hängen die durch die Funktionen $\psi_n(x, t)$ beschriebenen Zustände nicht von der Zeit ab, sondern sind *stationäre Zustände*.

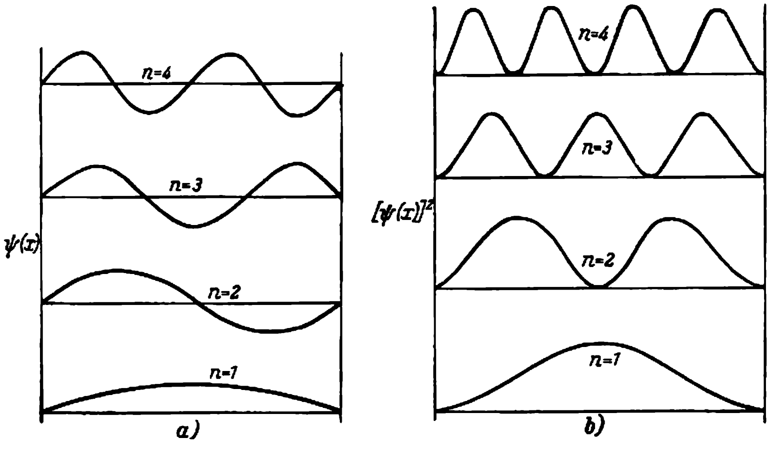


Abb. 205. Graphische Darstellung der Eigenfunktionen

In der Abb. 205 sind die graphischen Darstellungen einiger Eigenfunktionen (147,6) und die Quadrate ihrer Moduli aufgetragen. Die Kurven dieser Quadrate stellen die Verteilung der Wahrscheinlichkeit dar, das Mikroteilchen in der Längeneinheit an diesem oder jenem Ort innerhalb des Kastens bei verschiedenen Energiewerten zu finden. Wie aus den Kurven zu ersehen, ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der Mitte des Kastens im energetisch niedrigsten Zustand ($n = l$) zu finden, am größten, während die Wahrscheinlichkeit, es an der Wand zu finden,

gleich null ist. Dieses Resultat unterscheidet sich wesentlich von dem bei einem makroskopischen Teilchen zu erwartenden. Ein Makroteilchen können wir offensichtlich mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an jedem beliebigen Ort des Kastens auffinden, so daß die Kurve für die Wahrscheinlichkeitsdichte parallel zur Abszisse verlaufen müßte. Die Kurven zeigen ferner, daß bei einer Vergrößerung der Teilchenenergie (Anwachsen der Quantenzahl n) die Maxima der Kurve $|\psi_n|^2$ immer näher aneinanderrücken, so daß man für sehr große Werte der Quantenzahl ebenfalls eine Verteilung erhält, die einem Makroteilchen entspricht. Hier, wie überall, wird das Korrespondenzprinzip erfüllt.

§ 148. Das Elektron in der Potentialgrube

Als Anwendung der in den vorigen Paragraphen erhaltenen Resultate betrachten wir das Verhalten eines Elektrons in einem Feld, das durch die in Abb. 206 dargestellte Potentialkurve gegeben ist: die potentielle Energie des Elektrons außerhalb des Kastens oder der „Grube" $OABC$ ist gleich null, im Innern der Grube ist sie gleich $-U$. In einem solchen Feld befindet sich das Elektron beispielsweise im Innern von Metall. Tatsächlich sahen wir im § 134, daß das periodische, durch die positiven Metallionen gebildete Feld in erster Näherung durch einen Mittelwert ersetzt werden kann, dessen Potential V innerhalb des gesamten Metalls konstant ist. Die potentielle Energie des Elektrons ist negativ und beträgt $U = -eV$: das Elektron im Innern des Metalls ist in einer Potentialgrube von der Tiefe U eingeschlossen.

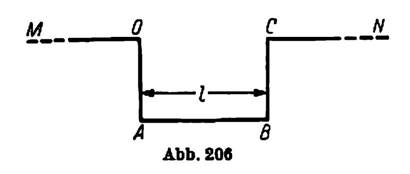


Abb. 206

Da die Wahl des Nullniveaus der potentiellen Energie willkürlich ist, wählen wir es so, daß die potentielle Energie des ruhenden Elektrons innerhalb des Metalls positiv und zum Beispiel gleich U'' ist (Abb. 207). Dann wird die potentielle Energie des ruhenden Elektrons außerhalb des Metalls ebenfalls positiv und gleich U' sein, und die Differenz $U' - U'' = U_0$ ist die Tiefe dieser Potentialgrube, in deren Innern sich das Elektron befindet.

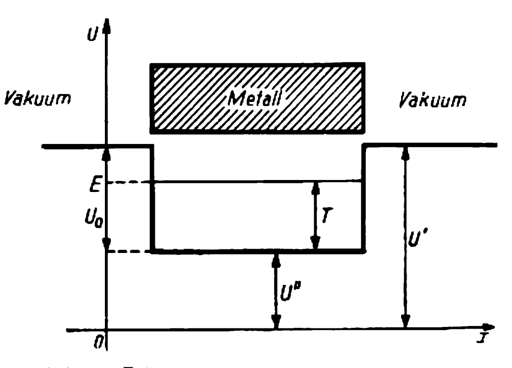


Abb. 207. Potentialmodell für ein Elektron im Metall

Bewegt sich das Elektron im Innern des Metalls, so wird seine Gesamtenergie größer als U'' und gleich E sein. Der Überschuß an Energie im Vergleich zu U'', die Größe $E - U'' = T$ also, wird offensichtlich die kinetische Energie sein.

Wir wissen, daß ein Elektron in einem Potentialkasten nur bestimmte Energiewerte besitzen kann, die eine diskrete Reihe bilden (§ 147). Der Unterschied

zwischen dem uns interessierenden Fall und dem im § 147 betrachteten besteht darin, daß die Wände des Potentialkastens hier eine endliche Höhe haben. Eine solche Aufgabe wird im Anhang V betrachtet. Ihre Lösung zeigt, daß der auftretende Unterschied unwesentlich ist, besonders bei einem Kasten mit makroskopischen Abmessungen. Es ist richtig, daß bei endlicher Größe des Metallstückes die Abstände zwischen den Energieniveaus verschwindend klein sind. Ihre Existenz folgt einem wichtigen Naturgesetz, dem sogenannten PAULI-Prinzip, mit dem wir uns noch später ausführlich bekannt machen werden. Nach diesem Prinzip können sich auf jedem Energieniveau im Metall nur zwei Elektronen befinden. Stellen wir uns zu Anfang ein Gitter aus positiven Ionen vor, in das sich die Elektronen nacheinander am absoluten Nullpunkt einlagern. Die ersten zwei Elektronen sind auf dem niedrigsten Energieniveau angeordnet; das dritte Elektron bereits kann nicht mehr auf diesem Niveau liegen, es muß sich auf dem folgenden höheren Niveau einordnen, d. h., es wird nicht nur eine potentielle Energie, sondern auch eine unbedeutende kinetische Energie besitzen. Da die Zahl der freien Elektronen im Metall sehr groß ist (beispielsweise hat ein Gramm-Atom einwertigen Metalls, z. B. Natrium, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ freie Elektronen), so wird die entsprechende, zweimal kleinere Anzahl von Energieniveaus besetzt sein. Am absoluten Nullpunkt bildet das höchste der besetzten Energieniveaus eine scharfe Grenze zwischen den besetzten und den freien Niveaus. Dieses oberste Niveau ζ heißt das *kritische Niveau* oder die FERMI-Grenze. Für die Freisetzung eines Elektrons aus dem Metall muß diesem eine Energie mitgeteilt werden, die wenigstens gleich dem Unterschied zwischen dem tiefen Potential der Grube und der kinetischen Energie des kritischen Niveaus ist (Abb. 208). Dieser Unterschied

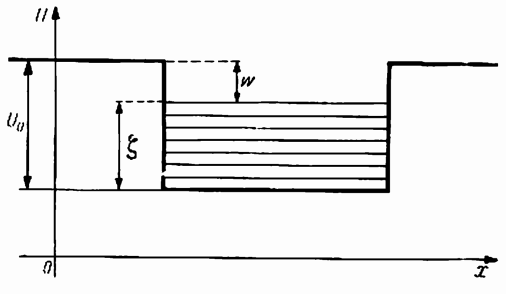


Abb. 208. Austrittsarbeit und inneres Potential

$$w = U_0 - \zeta$$

ist die Austrittsarbeit aus dem Metall, wie sie beim Photoeffekt erscheint (der Summand P in der EINSTEINschen Gleichung).

Das Elektron kann aus dem Metall nicht nur durch Lichteinwirkung befreit werden, sondern auch durch Erhitzung (Thermoemission). Bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunktes ist ein Teil der Elektronen auf höhere freie Niveaus verteilt, auf Niveaus also, die oberhalb der FERMI-Grenze liegen. Wenn nun infolge Erhitzung des Metalls die Energie des Elektrons so groß wird, daß es das Bremsfeld überwinden und über die Grenzen des Metalls hinaus gehen kann, dann tritt der Thermoemissionseffekt auf.

Kaltemission.[1]) Es zeigt sich, daß die Elektronen unter der Wirkung eines kräftigen elektrischen Feldes bei bereits niedrigen Temperaturen beginnen, aus dem Metall auszutreten. Qualitativ läßt sich diese Erscheinung auch vom klassischen Gesichtspunkt erklären, aber die auf diesem Wege erhaltenen Werte der Stromstärke widersprechen stark den experimentellen Daten.

[1]) Anm. d. Redaktion: Häufig auch als Feldemission bezeichnet.

Die klassische Erklärung für diese Erscheinung der *Kaltemission* lautet folgendermaßen. Die Verteilung des Potentials im Innern des Metalls und nahe seiner Oberfläche stellt sich bei Abwesenheit eines Feldes annähernd durch den Linienzug *KLMN* in der Abb. 209 dar. Legen wir jetzt an das Metall ein elektrisches Feld mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$, dann wird die Gesamtkraft, die auf das sich außerhalb des Metalls befindende Elektron wirkt, aus der Kraft $e\mathfrak{E}$, mit

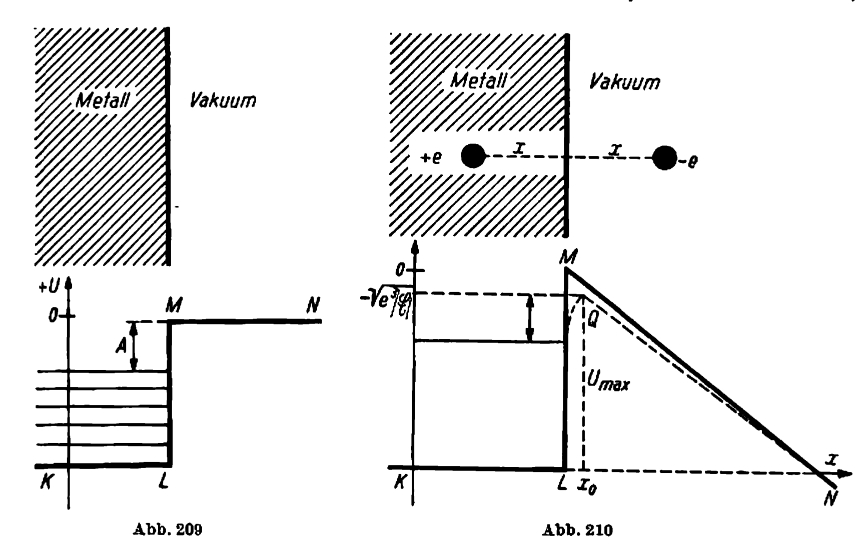


Abb. 209 Abb. 210

der das Feld einwirkt, und aus der sogenannten „Bildkraft" bestehen. Letztere entsteht dadurch, daß das Elektron selbst auf der Oberfläche des Metalls durch elektrostatische Induktion eine positive Ladung erzeugt, die nun das Elektron so anzieht wie eine im Innern des Metalls in der Entfernung x von der Oberfläche befindliche Ladung $+ e$ (Abb. 210). Somit ist die Gesamtkraft

$$F = e|\mathfrak{E}| - \frac{e^2}{4x^2},$$

und die potentielle Energie des Elektrons im Felde dieser Kraft wird dann

$$U = U_0 - e|\mathfrak{E}|x - \frac{e^2}{4x} \qquad (148,1)$$

sein.

In Abb. 210 ist diese potentielle Energie gestrichelt dargestellt. Wie wir sehen, hat diese Kurve ein Maximum in dem Abstand $x = x_0$ von der Oberfläche. Für die Bestimmung von x_0 haben wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -e|\mathfrak{E}| + \frac{e^2}{4x_0^2} = 0,$$

woraus $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{|\mathfrak{E}|}}$ folgt. Setzen wir x_0 in (148,1) ein, dann erhalten wir für die Tiefe der Potentialgrube

$$U_{\max} = U_0 - \sqrt{e^3|\mathfrak{E}|}.$$

Wir sehen, daß das Feld die Wandhöhe der Potentialgrube um die Größe

$$\sqrt{e^3|\mathfrak{E}|}$$

herabsetzt. Vom Standpunkt der klassischen Mechanik können die Elektronen im Innern des Metalls, die eine Energie kleiner als $U_{\max}$ besitzen, nicht über die Grenzen seiner Oberfläche hinausgehen, da der Potentialwall LQN dies verhindert; die Elektronen dagegen, die eine Energie größer als $U_{\max}$ haben, können sich befreien. Auf diese Weise wird durch ein Feld die Austrittsarbeit des Elektrons verkleinert und gleich

$$w' = U_{\max} - \zeta = U_0 - \sqrt{e^3|\mathfrak{E}|} - \zeta = w - \sqrt{e^3|\mathfrak{E}|},$$

worin w die Austrittsarbeit ohne Feld ist.

Offensichtlich wäre der maximale Strom dann zu erhalten, wenn die Arbeit w' gleich null würde. In diesem Falle wird die Feldstärke des angelegten Feldes gleich

$$|\mathfrak{E}| = \frac{w^2}{e^3} = 7 \cdot 10^6 w^2 \text{ V/cm}$$

sein. Für Wolfram ist $w = 4{,}9$ V; somit $|\mathfrak{E}| = 2 \cdot 10^8$ V/cm. Indessen erhielt MILLIKAN bereits für $|\mathfrak{E}| = 4 \cdot 10^6$ V/cm starke Ströme bei einer kalten Entladung.

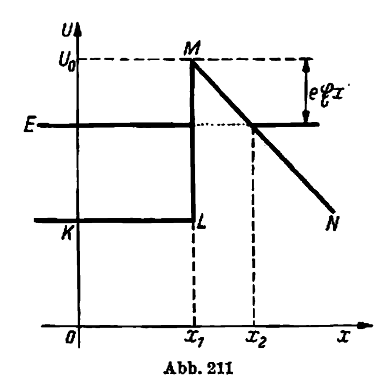


Abb. 211

Den Schlüssel zu diesem scharfen Widerspruch gibt uns die Fähigkeit der Elektronen, den Tunneleffekt auszuführen, was die klassische Mechanik nicht berücksichtigen konnte. Betrachten wir von neuem das Potential nahe der Metalloberfläche bei Anwesenheit eines Feldes. Wenn wir die induktive Bildkraft nicht berücksichtigen (die Berücksichtigung dieser Kraft gäbe ein genaueres Resultat, würde aber die Rechnung sehr komplizieren), dann wird der Potentialverlauf durch den Linienzug $KLMN$ in Abb. 211 dargestellt. Ein Elektron, das die Energie E besitzt, die dem absoluten Wert nach kleiner als die Höhe des Potentialwalles U_0 ist, kann nach den Gesetzen der Quantenmechanik unmittelbar auf Grund des Tunneleffektes aus dem Metall austreten. Die Wahrscheinlichkeit dieses Austrittes ergibt sich aus der Durchlässigkeit des Walles, die nach der Formel (145,14) gleich

$$D = C e^{-\frac{4\pi}{h}\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m}\sqrt{U-E}\,dx}$$

ist, worin U die potentielle Energie in irgendeinem Punkt der Potentialschwelle und E die Energie des Teilchens ist, vom gleichen Niveau wie die Höhe des Walles gerechnet.

Offensichtlich ist (Abb. 211)

$$U = U_0 - e|\mathfrak{E}|x.$$

Setzen wir $x_1 = 0$, dann können wir schreiben

$$\int\limits_0^{x_2} \sqrt{U-E}\,dx = \int\limits_0^{x_2} \sqrt{U_0 - e|\mathfrak{E}|x - E}\,dx = -\frac{2}{3e|\mathfrak{E}|}(U_0 - e|\mathfrak{E}|x_2 - E)^{3/2} + \frac{2}{3e|\mathfrak{E}|}(U_0 - E)^{3/2}.$$

Aus der Zeichnung ist unmittelbar ersichtlich, daß $U_0 - e|\mathfrak{E}|x_2 = E$ und damit das erste Glied gleich null ist, und wir erhalten für die Durchlässigkeit des Walles

$$D = Ce^{-\frac{8\pi(U_0-E)^{3/2}\cdot\sqrt{2m}}{3eh}\cdot\frac{1}{|\mathfrak{E}|}},$$

oder wenn wir $\frac{8\pi(U_0 - E)^{3/2}\sqrt{2m}}{3eh} = \alpha$ setzen, dann ergibt sich $D = Ce^{-\alpha/|\mathfrak{E}|}$. Eben diese Abhängigkeit des „kalten Stromes“ von der Feldstärke wurde experimentell gefunden.

Es ist noch interessant, die Daten für die Durchlässigkeit des Walles und die Stärke des kalten Stromes bei verschiedenen Spannungen zu betrachten (Tabelle XXI). Hier ist der ungewöhnlich schnelle Anstieg der Durchlässigkeit mit der Vergrößerung des Feldes interessant und auch die Tatsache, daß bei sehr kleinen Werten von D relativ große Ströme auftreten. Diese Erscheinung wird dadurch erklärt, daß die Zahl der Elektronen, die in der Sekunde die Wände des Walles bombardieren, so groß ist, daß auch bei verschwindender Austrittswahrscheinlichkeit große Ströme entstehen.

Tabelle XXI

$|\mathfrak{E}|$ (V/cm)	$E = -2$ eV		$E = -5$ eV	
	D	J (A/cm²)	D	J (A/cm²)
10^6	10^{-30}	10^{-74}	10^{-328}	10^{-322}
$5\cdot10^6$	$8\cdot10^{-15}$	$1,5\cdot10^{-7}$	$8\cdot10^{-65}$	$6\cdot10^{-58}$
10^7	$1,3\cdot10^{-6}$	100	10^{-31}	$3\cdot10^{-24}$
$2\cdot10^7$	0,013	$4\cdot10^6$	$2\cdot10^{-15}$	$3\cdot10^{-7}$
$3\cdot10^7$	1	$7\cdot10^8$	$6\cdot10^{-10}$	0,18

Kontaktpotential. Bringen wir zwei verschiedene Metalle (zum Beispiel Kupfer und Zink) miteinander in Berührung, so tritt zwischen ihnen eine Potentialdifferenz, das Kontaktpotential, auf. Diese Erscheinung, die von Volta entdeckt wurde, wird verständlich, wenn wir die Bedingungen betrachten, unter denen sich die Elektronen in beiden Metallen befinden.

Stellen wir uns zwei Metalle mit verschiedenen inneren Potentialen und verschiedenen Austrittsarbeiten w_1 und w_2 vor, wobei $w_1 < w_2$ sein möge. Wir nähern sie einander so weit, daß der Abstand ihrer parallelen Oberflächen von der Größenordnung der Atomdurchmesser wird ($\approx 10^{-8}$ cm). In beiden Metallen sind alle Energieniveaus, die niedriger als die Fermi-Grenze liegen, mit Elektronen besetzt, während die höheren Niveaus leer sind. Nun ist die Fermi-Grenze im Metall *I*, bezogen auf das Nullniveau *OX*, höher als die Fermi-Grenze im Metall *II* (Abb. 212). Die Elektronen können also von den höheren Niveaus des Metalls *I* quer durch den die beiden Metalle trennenden Potentialwall mittels des Tunneleffektes auf die freien niedrigeren Niveaus des Metalls *II* übergehen. Die Elektronen des Metalls *II* jedoch können nicht in das Metall *I* übergehen, da alle Niveaus des letzteren, die im Metall *I* in einer Höhe ζ_2 oder niedriger liegen, von Elektronenpaaren besetzt sind. Daher wird das Metall *II* negativ und das Metall *I* positiv geladen sein. Dieser Prozeß wird so lange stattfinden, wie die kritischen

Niveaus nicht gleich sind. Es wird sich zwischen den beiden Metallen eine äußere Potentialdifferenz ausbilden, die gleich dem Unterschied ihrer Austrittsarbeiten ist.

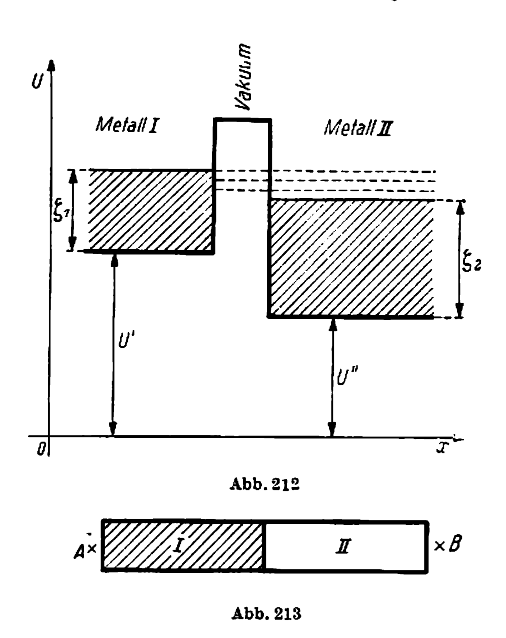


Abb. 212

Abb. 213

Hiervon können wir uns durch die folgenden Überlegungen überzeugen. Wir nehmen wieder zwei sich berührende Metalle *I* und *II* mit den Austrittsarbeiten w_1 und w_2, wobei $w_1 < w_2$ ist. Betrachten wir den Punkt *A*, der sich im Vakuum nahe der Oberfläche des Metalls *I* befindet, und den Punkt *B*, der nahe der Oberfläche des Metalles *II* liegt (Abb. 213). Bei dem Übergang des Elektrons vom Punkt *A* in das Innere des Metalls *I* auf das Niveau seiner FERMI-Grenze wird die Arbeit w_1 frei; bei dem Übergang vom Punkt *B* in das Metall *II* auf das Niveau seiner FERMI-Grenze wird entsprechend die Austrittsarbeit w_2 frei. Die FERMI-Grenzen beider sich berührender Metalle stellen sich auf eine Höhe ein. Die Austrittsarbeit, die für jedes Metall charakteristisch ist, hängt nicht davon ab, daß es sich mit einem anderen Metall in Berührung befindet. Wenn deshalb $w_2 > w_1$ ist, so kann das bei gleicher Höhe der FERMI-Grenze nur dann möglich sein, wenn das Potential im Punkt *B* gerade um die Größe der Differenz $w_2 - w_1$ höher als das Potential im Punkt *A* ist.

§ 149. Der lineare harmonische Oszillator

Als eines der wichtigsten in der Atomphysik benutzten Modelle erscheint der lineare harmonische Oszillator. Früher haben wir schon wiederholt dieses Modell benutzt. Wir wissen, daß die potentielle Energie eines harmonischen Oszillators gleich

$$U = \frac{kx^2}{2} = 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2 \tag{149,1}$$

ist, worin $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ die nach der klassischen Mechanik berechnete Frequenz der Oszillatorschwingungen bedeutet. Die entsprechende Potentialkurve ist eine Parabel, wie sie in Abb. 214 dargestellt ist. Es ist leicht zu sehen, daß diese Potentialkurve so etwas wie einen Kasten mit reflektierenden Wänden bildet, ähnlich dem in § 147 dargestellten. Ein makroskopischer Oszillator, der die Energie *E* besitzt, schwingt zwischen den „Wänden" hin und her, wobei er stets in den Grenzen des Abschnittes (x_1, x_2) bleibt, d. h. nicht weiter nach rechts als bis x_2 und nicht weiter nach links als bis x_1 schwingen wird. Zur Lösung der Aufgabe über den Mikrooszillator müssen wir die stehenden Wellen betrachten, die im Innern eines

solchen Potentialkastens entstehen. Im Prinzip ist der Lösungsvorgang vollständig dem Aufsuchen der Eigenschwingungen einer Saite analog. Jedoch haben wir hier eine Besonderheit, die die mathematische Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Innerhalb der Grenzen des Kastens hat die potentielle Energie nirgends einen konstanten Wert, sondern ändert sich nach dem parabolischen Gesetz. Deshalb bleibt die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$ in den verschiedenen Orten des Kastens nicht gleich, sondern vergrößert sich an seinen Rändern und verkleinert sich in der Mitte.

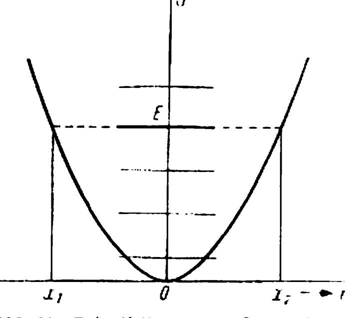


Abb. 214. Potentialkurve eines harmonischen Oszillators

Die SCHRÖDINGER-Gleichung hat bei der Oszillatoraufgabe die Form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - 2\pi^2 \nu_0^2 m x^2)\psi = 0\,, \qquad (149,2)$$

wobei die Funktion ψ die Forderung $\psi(x) = 0$ für $x \to \pm\infty$ und alle übrigen Standardbedingungen erfüllen muß (§ 143).

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}E = \lambda\,, \quad \frac{4\pi^2 m\nu_0}{h} = \alpha \qquad (149,3)$$

ein. Hierdurch kann die SCHRÖDINGER-Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi = 0 \qquad (149,4)$$

geschrieben werden.

Für die Integration von (149,4) betrachten wir zuerst die Grenzbedingung, daß x sehr groß ist und $\alpha x \gg \lambda$ wird. Dann können wir in (149,4) λ als eine Größe, die im Vergleich zu $\alpha^2 x^2$ klein ist, vernachlässigen und erhalten

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0\,. \qquad (149,5)$$

Bei $x \gg 1$ wird diese Gleichung mit genügender Genauigkeit von der Lösung

$$\psi = e^{\pm \alpha x^2/2} \qquad (149,6)$$

erfüllt. Tatsächlich haben wir

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \alpha x e^{\pm \alpha x^2/2}\,,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 x^2 e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}\,.$$

Für $x \gg 1$ ist das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung im Vergleich zu dem ersten vernachlässigbar, und folglich wird die Gleichung (149,5) asymptotisch durch die Lösung (149,6) erfüllt. Von den beiden möglichen Vorzeichen ist in diesem Falle das Minuszeichen zu nehmen,

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2}\,,$$

da die Lösung mit dem Pluszeichen für $x \to \infty$ unendlich wird, was der natürlichen, der Funktion ψ auferlegten Bedingung widerspricht (§ 143).

Für den betrachteten Grenzfall wird eine Lösung der Form

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x) \tag{149,7}$$

zu suchen sein, wo $f(x)$ irgendeine zunächst noch unbekannte Funktion ist, welche so gewählt werden muß, daß (149,7) die Gleichung (149,4) erfüllt. Wir bilden die Ableitungen der Lösung (149,7)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \left(-\alpha x f + \frac{df}{dx}\right) e^{-\alpha x^2/2}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \left(-\alpha f - 2\alpha x \frac{df}{dx} + \alpha^2 x^2 f + \frac{d^2 f}{dx^2}\right) e^{-\alpha x^2/2}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese in (149,4) ein, dann erhalten wir nach einfacher Umformung und Division durch $e^{-\alpha x^2/2}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha) f = 0. \tag{149,8}$$

Diese Gleichung formen wir noch weiter um, indem wir für x die neue, unabhängige Veränderliche ξ

$$\xi = \sqrt{\alpha} \cdot x \tag{149,9}$$

einführen. ξ ist eine dimensionslose Zahl, da α die Maßeinheit cm^{-2} hat [wovon man sich leicht unmittelbar aus dem Ausdruck für α (149,3) überzeugen kann]. Wir haben jetzt

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Die Gleichung (149,8) nimmt also jetzt die Form

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right) H = 0 \tag{149,10}$$

an, wo $H(\xi)$ eine Funktion ist, welche man nach dem Vertauschen der unabhängigen Veränderlichen x durch ξ in $f(x)$ erhält. Wir werden $H(\xi)$ in Form einer Reihe

$$H(\xi) = a_\nu \xi^\nu + a_{\nu+1} \xi^{\nu+1} + a_{\nu+2} \xi^{\nu+2} + \cdots \equiv \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \xi^k \tag{149,11}$$

darstellen. Um die Endlichkeit der Lösung zu garantieren, beginnen wir die Reihe bei irgendeinem Grad ν und bestimmen nur beim letzten dieses ν derart, daß die Funktion $H(\xi)$ nirgends unendlich wird. Berechnen wir die Ableitungen von $H(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\xi} &= \nu a_\nu \xi^{\nu-1} + (\nu+1) a_{\nu+1} \xi^\nu + (\nu+2) a_{\nu+2} \xi^{\nu+1} + \cdots, \\ \frac{d^2 H}{d\xi^2} &= \nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1) \nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} + (\nu+2)(\nu+1) a_{\nu+2} \xi^\nu + \cdots. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (149,10) ein, dann erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} \nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1) \nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} + (\nu+2)(\nu+1) a_{\nu+2} \xi^\nu + \cdots \\ = \left[2\nu - \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)\right] a_\nu \xi^\nu + \cdots. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung identisch erfüllt sein muß, müssen die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von ξ links und rechts einander gleich sein. Das niedrigste Glied

links ist $\nu(\nu-1)a_\nu\xi^{\nu-2}$; sein Koeffizient muß gleich null sein, da es rechts kein Glied gleichen Grades von ξ gibt. Dies ergibt $\nu(\nu-1)=0$, woraus $\nu=0$ oder $\nu=1$ folgt. Machen wir den Koeffizienten bei dem folgenden Glied gleich null, dann erhalten wir $\nu=0$ oder $\nu=-1$. Die erste Lösung ergibt nichts Neues, die zweite ist ungeeignet, da die Reihe, die mit ξ^{-1} beginnt, bei $\xi=0$ gegen unendlich geht.

Vergleichen wir die Koeffizienten irgendeines Gliedes, das ξ^i enthält, dann finden wir

$$(i+1)(i+2)a_{i+2}=\left[2i-\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)\right]a_i,$$

woraus

$$a_{i+2}=\frac{2i+1-\frac{\lambda}{\alpha}}{(i+1)(i+2)}a_i \tag{149,12}$$

folgt. Diese Formel gestattet, nacheinander alle Glieder der Reihe aus einem bekannten auszurechnen. Da die Reihe entweder bei $\nu=0$ oder $\nu=1$ beginnen kann, so ergibt die Rekursionsformel (149,12) zwei Reihen, von denen die eine aus geraden Gliedern besteht:

$$a_0+a_2\xi^2+a_4\xi^4+\cdots, \tag{149,13}$$

und die andere aus ungeraden:

$$a_1\xi+a_3\xi^3+a_5\xi^5+\cdots. \tag{149,14}$$

Diese Reihen stellen partielle Lösungen der Gleichung (149,10) dar.

Untersuchen wir nun das Verhalten der Reihen bei großen Werten von ξ. Wir nehmen eine beliebige von ihnen und zeigen, daß sie sich bei genügend großen ξ wie e^{ξ^2} benimmt. Zu diesem Zwecke vergleichen wir die Reihe (149,13) mit der Reihe für e^{ξ^2}. Bekanntlich ist

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

und folglich

$$e^{\xi^2}=1+\frac{\xi^2}{1!}+\frac{\xi^4}{2!}+\frac{\xi^6}{3!}+\cdots+\frac{\xi^\tau}{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}+\frac{\xi^{\tau+2}}{\left(\frac{\tau}{2}+1\right)!}+\cdots.$$

Bei genügend großem ξ haben die ersten Glieder dieser Summe keine wesentliche Bedeutung im Vergleich zu den höheren. Wir bezeichnen die Koeffizienten von ξ^τ und $\xi^{\tau+2}$ mit b_τ und $b_{\tau+2}$; ihr Verhältnis ist

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}{\left(\frac{\tau}{2}+1\right)!}=\frac{1}{\frac{\tau}{2}+1}. \tag{149,15}$$

Bei genügend großem τ kann die 1 im Nenner von (149,15) vernachlässigt werden:

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{1}{\tau/2}=\frac{2}{\tau}. \tag{149,16}$$

Für das Verhältnis der entsprechenden Glieder der Reihe (149,13) ergibt die Rekursionsformel

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2\tau + 1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{(\tau+2)(\tau+1)}$$

und bei genügend großem τ

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2}{\tau}. \tag{149,17}$$

Bei dem Vergleich von (149,16) mit (149,17) sehen wir, daß

$$\frac{b_{\tau+2}}{a_{\tau+2}} = \frac{b_\tau}{a_\tau} = \cdots = \text{const}.$$

Das bedeutet, daß sich die höheren Glieder unserer Reihe von den höheren Gliedern der Reihe e^{ξ^2} nur um einen konstanten Faktor unterscheiden und daß somit $H(\xi)$ bei großen ξ wie e^{ξ^2} anwächst. Berücksichtigen wir (149,7) und (149,9), so ist

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x) = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \rightarrow e^{\xi^2/2},$$

d. h., bei $\xi \rightarrow \infty$ ist auch $\psi \rightarrow \infty$. Hieraus ist ersichtlich, daß die Lösungen, die durch die Reihen mit der Rekursionsformel (149,12) darstellbar sind, nicht die Randbedingungen erfüllen. Es ist aber leicht einzusehen, daß bei bestimmten Werten von λ/α die Reihen bei einem Glied abbrechen, sich also in ein Polynom verwandeln. So besteht beispielsweise bei $\frac{\lambda}{\alpha} = 5$ die Reihe (149,13) nur aus dem einen Glied a_0, da aus (149,12) ersichtlich ist, daß bei $\frac{\lambda}{\alpha} = 5$ der Koeffizient $a_2 = 0$ ist: dies bedeutet aber, daß auch alle folgenden Koeffizienten gleich null sein werden. Bei $\frac{\lambda}{\alpha} = 9, 13, \ldots$ wird dieselbe Reihe mit dem zweiten, dritten usw. Glied abbrechen.

Wenn aber $H(\xi)$ in ein Polynom übergeht, dann stellt die Anwesenheit des Exponentialfaktors die Abnahme der Funktion ψ auf null bei $\xi \rightarrow \infty$ sicher. Somit erhält man Lösungen, die die Standardbedingungen erfüllen, nur dann, wenn die Reihen (149,13) und (149,14) sich in Polynome umwandeln. Auf Grund der Rekursionsformel (149,12) erhalten wir ein Polynom, das mit der n-ten Stufe beginnt, wenn

$$\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1.$$

Setzen wir hier die Werte für λ und α aus (149,3) ein, dann erhalten wir

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_n = \frac{4\pi^2 m \nu_0}{h}(2n+1),$$

woraus

$$E_n = h\nu_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{149,18}$$

folgt.

Wir sehen auf diese Weise, daß von den Funktionen ψ, die der Wellengleichung des Oszillators genügen, nur jene Funktionen zusammen mit dieser auch die Randbedingungen erfüllen, die einer diskreten Reihe von Energiewerten (149,18)

des Oszillators entsprechen. Diese Formel unterscheidet sich etwas von der Formel der alten Quantentheorie

$$E_n = nh\nu_0 .$$

Nach der Formel (149,18) wird die Quantenzahl des linearen Oszillators immer durch die „halbzahlige" Größe $n + \frac{1}{2}$ ausgedrückt. Infolgedessen wird auf dem untersten Quantenzustand für $n = 0$ die Energie des Oszillators nicht gleich null, sondern

$$E_0 = \frac{h\nu_0}{2} . \qquad (149,19)$$

Diesen Wert nennen wir die „Nullpunktsenergie". Diese Bezeichnung ist damit verknüpft, daß die Energie $\frac{1}{2} h\nu_0$ auch am absoluten Nullpunkt nicht verschwindet. Ihren Sinn und ihre Bedeutung werden wir in den folgenden Paragraphen erklären.

Im § 147 sahen wir, daß die Quantelung der Teilchenenergie im Potentialkasten durch die Anwendung der Grenzbedingungen erhalten wird, die denen bei der Aufgabe mit der Saite analog sind. Bei dem linearen Oszillator erweist sich die Quantelung als eine Folge der Endlichkeit der Funktion im gesamten Raum. Die Möglichkeit, die Quantelung als einfache Folge ähnlicher natürlicher Bedingungen zu erhalten, erscheint als jene bemerkenswerte Besonderheit der SCHRÖDINGER-Gleichung, von der wir bereits im § 143 sprachen.

§ 150. Der normale und der angeregte Zustand eines linearen Oszillators

Jedem Eigenwert der Energie des linearen Oszillators

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

entspricht seine Eigenfunktion

$$\psi = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) ,$$

worin N_n ein konstanter Normierungsfaktor und $H_n(\xi)$ ein Polynom n-ten Grades ist, dessen Koeffizienten mit Hilfe der Rekursionsformel (149,12) mit $\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1$ berechnet werden. Wir stellen einige der ersten Polynomglieder von $H_n(\xi)$ auf. Der Koeffizient von ξ^n wird mit Hilfe von (149,12) folgendermaßen ausgedrückt:

$$a_n = \frac{[2(n-2)+1] - (2n+1)}{(n-1)n} a_{n-2} = -\frac{1 \cdot 2^2}{n(n-1)} a_{n-2} ,$$

woraus

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} a_n$$

folgt; weiter erhalten wir leicht

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} a_n \text{ usw.}$$

Das gesuchte Polynom lautet somit:

$$H_n(\xi) = a_n \left[\xi^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} \xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \xi^{n-4} - \cdots \right] . \qquad (150,1)$$

Setzen wir in (150,1) $a_n = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), dann erhalten wir die folgenden Polynome:

$$\left.\begin{aligned} &H_0(\xi) = 1, && H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi, \\ &H_1(\xi) = 2\xi, && H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ &H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, && H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad (150{,}2)$$

Dies sind die sogenannten HERMITEschen Polynome, die in der folgenden, leicht zu merkenden Form geschrieben werden können:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n}. \quad (150{,}2')$$

Beispielsweise haben wir für $n = 1$

$$H_1 = -e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi}(e^{-\xi^2}) = 2\xi,$$

für $n = 2$

$$H_2 = e^{\xi^2} \frac{d^2}{d\xi^2}(e^{-\xi^2}) = e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi}(-2\xi e^{-\xi^2}) = 4\xi^2 - 2$$

usw.

Für die Berechnung der verschiedenen Polynome ist es bequem, die Rekursionsformel zu benutzen, die es erlaubt, aus zwei Polynomen das dritte zu berechnen. Diese Formel wird auf die folgende Weise erhalten. Nach Definition haben wir

$$H_{n+1}(\xi) = (-1)^{n+1} e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2}) = -(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2}); \quad (150{,}3)$$

weiter ist

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2}) = \frac{d^n}{d\xi^n}\left(\frac{de^{-\xi^2}}{d\xi}\right) = \frac{d^n}{d\xi^n}(-2\xi e^{-\xi^2}) = -2\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi e^{-\xi^2}).$$

Benutzen wir jetzt die bekannte Formel für die n-te Ableitung eines Produktes uv zweier Funktionen

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u\frac{d^n v}{dx^n} + n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots,$$

dann erhalten wir

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi e^{-\xi^2}) = \xi\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}) + n\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2}),$$

infolgedessen auch

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}(e^{-\xi^2}) = -2\left[\xi\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}) + n\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2})\right],$$

und nach (150,3) ist

$$\left.\begin{aligned} H_{n+1}(\xi) &= 2\xi(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}) + 2n(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2}) \\ &= 2\xi(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}) - 2n(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\xi^2}) \end{aligned}\right\} \quad (150{,}4)$$

oder nach der allgemeinen Definition (150,2′)

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi). \tag{150,4}$$

Das ist die gesuchte Rekursionsformel, die H_{n+1}, H_n, H_{n-1} miteinander verknüpft. Es ist leicht zu prüfen, daß das Polynom (150,2) aus H_0 und H_1 nach dieser Formel gebildet wird. Sie kann zur Berechnung eines Polynoms beliebiger Ordnung aus zwei vorhergehenden benutzt werden.

Die Eigenfunktionen eines linearen Oszillators besitzen die folgenden wichtigen Eigenschaften: sie sind im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ orthogonal,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n\,.$$ [1]

Im Falle $m = n$ hat das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx$$

einen endlichen Wert, der zur Berechnung des Normierungsfaktors benutzt werden kann. Die Normierungsbedingung besteht darin, daß

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1\,.$$

Setzen wir hier den Ausdruck für die Funktion ψ_n ein und führen die Rechnung durch[2], dann finden wir

$$N_n^2 \frac{2^n n!\,\pi^{1/2}}{\alpha^{1/2}} = 1\,,$$

woraus

$$N_n = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2} n!\,2^n}}$$

folgt. Für den Grundzustand $n = 0$ haben wir

$$N_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}\,.$$

Somit lautet die Eigenfunktion des Grundzustandes

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-\xi^2/2} H_0(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}\, e^{-\alpha x^2/2}$$

und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi_0^2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}\,.$$

Die $\psi_0^2(x)$ darstellende Kurve ist vom Typ der Gaussschen Fehlerkurve (Abb. 215b). Diese Kurve zeigt, daß wir das Teilchen am häufigsten um die Gleichgewichtslage (bei $x = 0$) herum finden werden, wenn wir eine große Zahl von Lagebestimmungen des Teilchens im nullten Zustand des Oszillators durchführen. Außerdem haben wir eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen nicht nur innerhalb

[1]) Beweis im Anhang VI.
[2]) Siehe Anhang VI.

der Grenzen des Abschnittes zu finden, der gleich der doppelten Schwingungsamplitude des klassischen Oszillators ist, sondern auch in dem verbotenen Gebiet (links und rechts von den vertikalen, gestrichelten Geraden), wo die potentielle Energie des Teilchens größer als die Gesamtenergie ist.

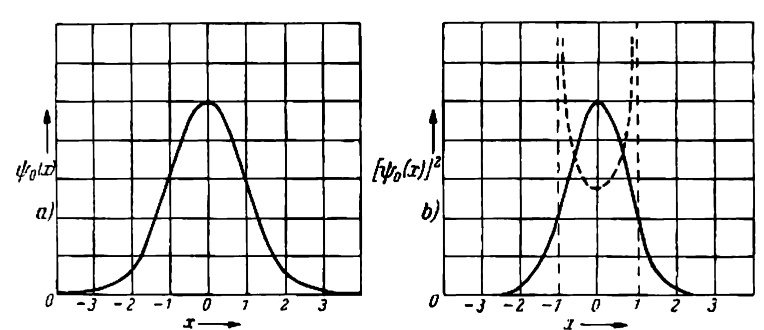


Abb. 215. Eigenfunktion und Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Grundzustand des linearen harmonischen Oszillators

Interessant ist der Vergleich dieser Kurve mit der entsprechenden Kurve für die Wahrscheinlichkeit, ein Makroteilchen zu finden, das eine harmonische Schwingung um die Strecke dx an irgendeinem Ort ausführt. Stellen wir uns beispielsweise vor, daß wir es mit einem Pendel zu tun haben, das kleine Schwingungen ausführt, und daß wir die Lage der Pendelkugel kinematographisch aufnehmen. Es kann keinerlei Zweifel darüber geben, daß wir in den meisten Fällen die Kugel irgendwo nahe einer der Randlagen finden werden, da an diesen Orten ihre Geschwindigkeit nahe null ist; am seltensten werden wir die Kugel in der Nähe der Gleichgewichtslage finden, weil an dieser Stelle ihre Geschwindigkeit am größten ist. Offensichtlich wird die Wahrscheinlichkeit, die Kugel an einem bestimmten Ort zu finden, umgekehrt proportional seiner Geschwindigkeit an diesem Ort sein, oder was dasselbe ist, proportional der reziproken Größe der Quadratwurzel aus der kinetischen Energie, d. h. $1/\sqrt{E - U}$, wobei E die Gesamtenergie und U die potentielle Energie ist. Die entsprechende Kurve ist in Abb. 215 b gestrichelt dargestellt; sie unterscheidet sich wesentlich von der Kurve für den Quantenoszillator.

Betrachten wir jetzt die verschiedenen Zustände des Quantenoszillators etwas ausführlicher und beginnen mit dem nullten Zustand. Die Besonderheit dieses Zustandes besteht darin, daß die Energie des Oszillators nicht gleich null, sondern gleich $\frac{1}{2} h\nu_0$ ist. Also befindet sich der Quantenoszillator am absoluten Nullpunkt nicht in Ruhe: wir können ihn mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit an einem beliebigen Ort eines Bereiches, der gleich der doppelten Schwingungsamplitude des klassischen Oszillators ist, und auch außerhalb der Grenzen dieses Bereiches suchen. Es ist nicht schwer zu sehen, daß diese Tatsache als eine unvermeidliche Folge der Ungenauigkeitsrelationen erscheint. In der Tat, würde ein quasielastisch gebundenes Teilchen am absoluten Nullpunkt ruhen, hätte also eine bestimmte Koordinate, so würde dies bedeuten, daß ein Zustand existiert, an dem sowohl die Koordinate des Teilchens als auch sein Impuls bestimmt

sind (der Impuls gleich null). Dies widerspricht aber der Ungenauigkeitsrelation. Wir werden sofort zeigen, daß gerade die Nullpunktsenergie $\frac{1}{2} h\nu_0$ jene Minimalenergie ist, die der Oszillator im Nullzustand besitzen muß, damit die Ungenauigkeitsrelationen erfüllt werden.

Als Ungenauigkeit der Lage des Teilchens nehmen wir das mittlere Fehlerquadrat, d. h. die positive Quadratwurzel aus dem Quadrat der mittleren Schwankungen:

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}.$$

Da $\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ ist und ohne Begrenzung des Fehlers $\bar{x} = 0$ angenommen werden kann (dies bedeutet nur, daß der Anfangspunkt an einen Ort zu legen ist, der mit der Gleichgewichtslage übereinstimmt), so ist

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Folglich ist

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\overline{a^2 \cos^2 \omega_0 t}} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}, \qquad (150,5)$$

wobei a die Schwingungsamplitude des klassischen Oszillators darstellt. Es ist leicht zu sehen, daß $\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = E_0$ ist (siehe § 44), ferner $a^2 = \frac{2E_0^2}{m\omega_0^2} = \frac{2E_0}{k}$, und deshalb

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{E_0}{k}}. \qquad (150,6)$$

Ferner haben wir analog

$$\overline{\Delta p} = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{\overline{m^2 a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}} = \sqrt{\frac{1}{2} m^2 a^2 \omega_0^2} = \sqrt{m E_0}. \qquad (150,7)$$

Somit wird

$$\overline{\Delta x}\, \Delta p = E_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{E_0}{\omega_0} = \frac{E_0}{2\pi\nu_0}. \qquad (150,8)$$

Nach den Ungenauigkeitsrelationen ist $\Delta x\, \Delta p \approx h$. Im folgenden Abschnitt (siehe Bd. II) werden wir sehen, daß der genaue Wert der unteren Grenze des Produktes der mittleren Fehlerquadrate gleich $h/4\pi$ ist, so daß

$$\Delta x\, \Delta p \geqq \frac{h}{4\pi}. \qquad (150,9)$$

Nehmen wir hier das Gleichheitszeichen, wählen wir also die unterste Grenze des Fehlerproduktes, und vergleichen (150,8) mit (150,9), dann finden wir

$$\frac{E_0}{2\pi\nu_0} = \frac{h}{4\pi}, \quad E_0 = \frac{h\nu_0}{2}.$$

Somit ist die Nullpunktsenergie des Oszillators wirklich die Minimalenergie, welche der Oszillator im Nullzustand zur Erfüllung der Ungenauigkeitsrelationen besitzen muß.

Es bleibt noch zu erklären, weshalb die Verteilungskurve der Wahrscheinlichkeit der Lage keine Nullwerte jenseits der Grenzen der klassischen Oszillatorbahn ergibt, in Gebieten also, in denen die Gesamtenergie geringer als seine potentielle ist. Soweit jedoch die Potentialkurve des Oszillators einen Potentialkasten darstellt (siehe Anfang § 149) und die Schwingungen des Teilchens als „Rückspiege-

lungen“ an den Wänden dieses Kastens betrachtet werden können, wird auch hier die Erklärung dieselbe wie im Falle der Rückspiegelung von einer rechtwinkligen Barriere sein (§ 144).

Wie ersichtlich, erinnern diese Kurven an Wellen. Fügen wir noch den periodischen Zeitfaktor $e^{i2\pi\nu t}$ hinzu, dann erhalten wir eine Art stehender Wellen. Bei $n = 0$ (Abb. 215) hätten wir zwei Knoten und ein Maximum („Bauch“) in der Mitte; es versteht sich, daß die Knoten nicht an den Wänden des Potentialkastens,

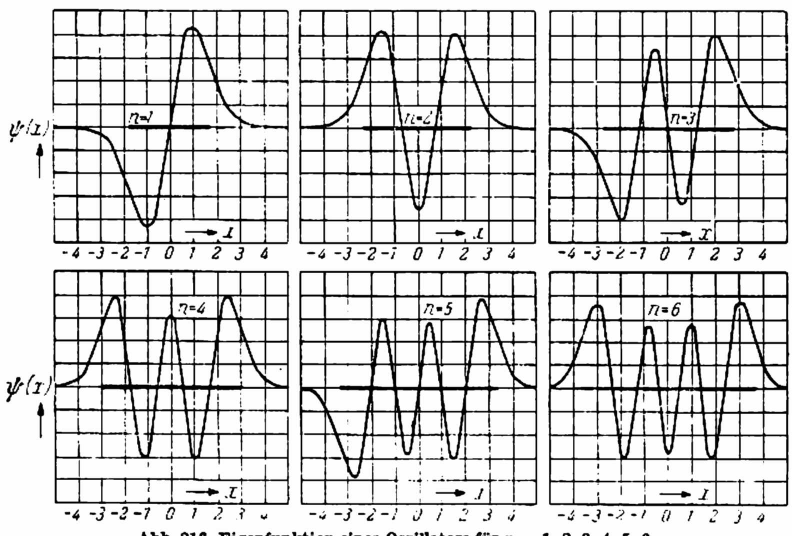


Abb. 216. Eigenfunktion eines Oszillators für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

sondern im Unendlichen liegen. Bei $n = 1$ (Abb. 216) haben wir zwei Knoten im Unendlichen und einen in der Mitte des Abschnittes, der dem Schwingungsgebiet des klassischen Oszillators entspricht. Bei $n = 2$ haben wir außer den beiden Knoten im Unendlichen noch zwei Knoten usw. Bei der Betrachtung der Abbildungen ist leicht zu bemerken, daß in der Mitte des stark gezeichneten Abschnittes, der die klassische Flugbahn darstellt, die Entfernung zwischen den Knoten geringer ist als an den Rändern. Dies entspricht der DE BROGLIEschen Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$, die in der Nähe der Gleichgewichtslage, wo U durch den Nullwert hindurchgeht, am geringsten ist.

In der Abb. 217 sind die Kurven der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ für verschiedene Zustände des Quantenoszillators (für $n = 0, 1, 2, 3, 4$) und gestrichelt die Kurve eines Makrooszillators (Kugelpendel) angegeben. Wir sehen, daß sich bei kleinen Quantenzahlen n der Quantenoszillator vollkommen anders als der klassische benimmt. Je größer dagegen n wird, um so mehr nähert sich die Quantenverteilung der Wahrscheinlichkeit der klassischen Verteilung. Dies ist besonders klar in der Abb. 218 zu erkennen, wo die Verteilung für $n = 10$ angegeben ist. Verbinden wir die Maxima der Quantenverteilung durch eine Kurve, so wird diese angenähert parallel zur klassischen Verteilungskurve liegen. Bei weiterer Vergrößerung von n nähern sich die Maxima immer mehr, und der Verlauf

der Wahrscheinlichkeitskurve wird sich immer mehr der klassischen nähern, wie es vom Korrespondenzprinzip gefordert wird.

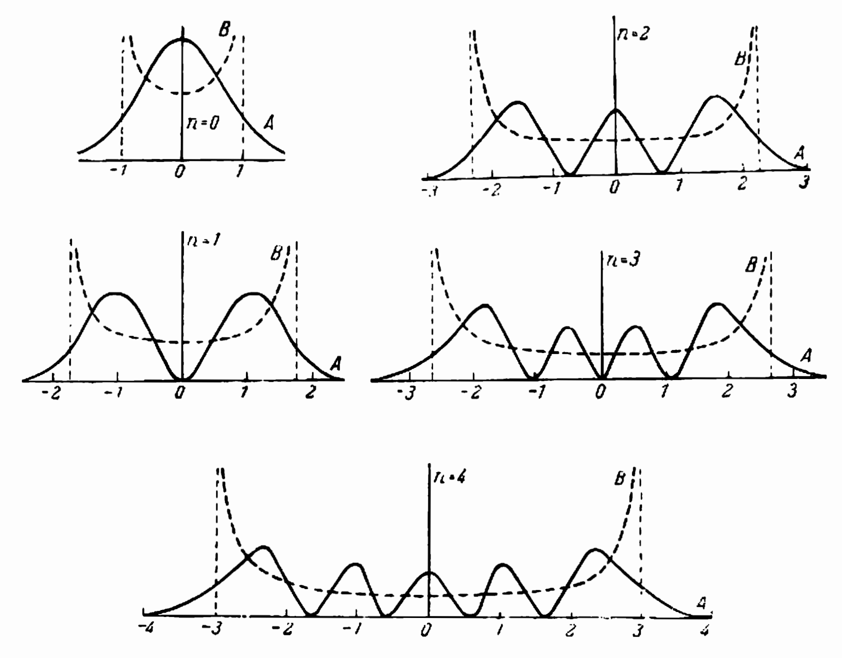


Abb. 217. Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte für $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Übungen: 1. Es ist die Nullpunktsenergie eines Oszillators auszurechnen, dessen klassische Schwingungsfrequenz gleich $10^{14}\ s^{-1}$ ist. Sie ist in Elektronenvolt auszudrücken. In welchem Teil des Spektrums liegt die dieser Frequenz entsprechende Wellenlänge?

2. Ein Oszillator besteht aus einem Teilchen mit der Masse 1 g, das mit der Gleichgewichtslage durch eine Feder von $f = 10^4$ dyn · cm^{-1} verbunden ist. Es ist die Nullpunktsenergie dieses Oszillators zu berechnen.

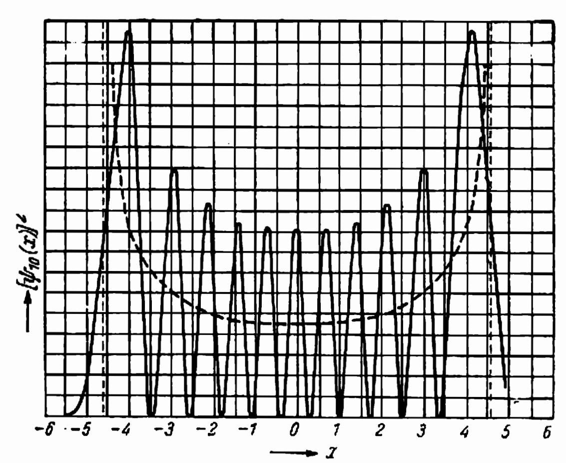


Abb. 218. Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte für $n = 10$

3. Es ist die Quantenzahl des Oszillators der vorigen Aufgabe zu berechnen, wenn seine Energie gleich kT ist, wobei $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg · grad^{-1} die Boltz-

MANN-Konstante und $T = 300^\circ$ K bedeuten. Es ist zu zeigen, daß sich hierbei die Quantenzahl der Oszillatorenergie praktisch stetig ändert (es ist die Änderung der Energie für $\Delta n = 1$ zu berechnen).

§ 151. Gekoppelte Oszillatoren. Die VAN DER WAALSschen Kräfte

Im § 149 sahen wir, daß die Lösung der Aufgabe über den linearen Oszillator in der Quantenmechanik zu dem Schluß führt, daß auch am absoluten Nullpunkt eine „Nullpunktsenergie" gleich $h\nu_0/2$ existieren muß. Wie sonderbar auch dieser Schluß sein mag, so zeigt doch der Versuch, daß die von uns erhaltene Foımel für die Energie des linearen Oszillatoıs

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$$

besser den Tatsachen entspricht als die frühere „halbklassische" Formel $E_n = nh\nu_0$, welche PLANCK benutzte. Hiervon zeugt die Untersuchung der Molekülspektren; es ist besonders interessant, daß die Existenz der Nullpunktsenergie bei der Erklärung einiger seit langem bekannter, aber noch ungeklärter Erscheinungen eine unerwartet wichtige Rolle spielt. Hier handelt es sich um die sogenannten molekularen Kopplungskräfte, die zur Erklärung der Oberflächenspannung, der Absorption und anderer molekularer Erscheinungen herangezogen werden. Da diese Kräfte bereits in der VAN DER WAALSschen Zustandsgleichung für reale Gase

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

erscheinen, so heißen sie VAN DER WAALSsche Kräfte.

Es wurden viele Versuche unternommen, diese Kräfte im Rahmen der klassischen Physik zu erklären, wobei ihnen in allen ein rein elektrischer Ursprung zugeschrieben wurde. Da diese VAN DER WAALSschen Kräfte bei der Wechselwirkung zwischen neutralen Atomen oder Molekülen auftreten, konnte ihre Existenz nur dann verstanden werden, wenn diese wechselwirkenden neutralen Systeme als elektrische Dipole oder im Falle hoher symmetrischer Systeme als Quadrupole erscheinen.[1]) Die Wechselwirkungskräfte zwischen Dipolen fallen umgekehrt proportional mit der vierten Potenz der Entfernung und die Wechselwirkungskräfte zwischen Quadrupolen umgekehrt proportional der sechsten Potenz der Entfernung ab. Das entspricht der seit langem bekannten Tatsache, daß die molekularen Wechselwirkungskräfte sehr schnell mit der Entfernung abfallen.

Jedoch begegneten den Versuchen einer genaueren und insbesondere quantitativen Erklärung der molekularen Wechselwirkungen im Rahmen der klassischen Physik unüberwindliche Hindernisse. Erstens erscheint die Existenz von molekularen Wechselwirkungen bei Edelgasen vollkommen rätselhaft. Die Atome dieser Gase besitzen eine hohe elektrische Symmetrie, derentwegen es unmöglich ist, ihnen im statischen Zustand ein konstantes Dipol- oder auch Quadrupolmoment zuzuschreiben. Trotzdem können sie zu Flüssigkeiten verdichtet werden und damit die Existenz von molekularen Kräften zeigen. Aber auch die

[1]) Entsprechend den Symmetrieeigenschaften der Ladungssysteme (Dipol, Quadrupol, Oktupol).

Versuche, eine quantitative Theorie für solche Materialien aufzubauen, die wie die Halogenwasserstoffverbindungen ein großes Dipolmoment besitzen, führten zu keinen befriedigenden Resultaten.

Die Schwierigkeiten verschwinden, wenn wir außer den gezeigten rein statischen Wechselwirkungen auch die Wechselwirkungen berücksichtigen, die durch die schnellen Bewegungen der Elektronen im Molekül bewirkt werden.

Wir mögen zwei Moleküle haben, bei denen im *Ruhezustand* die Ladungen kugelsymmetrisch verteilt sind, so daß die Moleküle unter sich nicht in Wechselwirkung treten können. Verschieben wir die Ladungen aus ihren Gleichgewichtslagen, dann erwirbt das Molekül ein Dipolmoment, und die Wechselwirkung wird möglich. Eine solche Verschiebung entsteht tatsächlich wegen der Nullpunktsschwingungen der Energie $\frac{1}{2}h\nu_0$. Das Auftreten eines Dipolmomentes in einem Molekül ruft nun in dem umgebenden Raum ein Feld hervor und induziert in einem anderen Molekül ein Dipolmoment. Diese sich schnell ändernden Dipolmomente befinden sich in bezug aufeinander in solcher Phase, daß eine Anziehung entsteht. Dies ist die qualitative Erklärung der Molekularkräfte. Wie ersichtlich, ist sie unvermeidlich mit der Existenz der Nullpunktsschwingungen verbunden, deren Notwendigkeit aus den Ungenauigkeitsrelationen folgt.

Wir zeigen jetzt, daß uns dieses einfache Bild erlaubt, auch die quantitative Rechnung durchzuführen und das Gesetz der molekularen Wechselwirkungen aufzustellen. Hierzu müssen wir jedoch zuerst sehen, wie in der klassischen Mechanik die Aufgabe der Schwingung zweier in Wechselwirkung stehender, d. h. gekoppelter Oszillatoren gelöst wird.

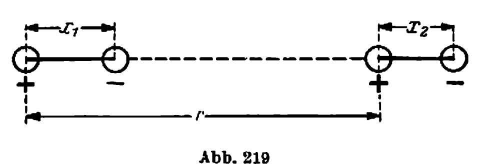


Abb. 219

Wir mögen zwei elektrische Dipole haben, die voneinander im Abstand r liegen und sich auf einer Geraden befinden (Abb. 219). Die Masse, die zu jeder dieser Ladungen gehört, sei gleich m. Die Entfernung der gegenüberliegenden Ladungen sei bei dem ersten Dipol gleich x_1 und bei dem zweiten gleich x_2. Die Wechselwirkungsenergie der Dipole beruht auf der Anziehung der entgegengesetzten Ladungen und auf der Abstoßung der gleichnamigen. Nach dem COULOMBschen Gesetz beträgt sie

$$U_{12} = -\frac{e^2}{r - x_1} - \frac{e^2}{r + x_2} + \frac{e^2}{r + x_2 - x_1} + \frac{e^2}{r}$$
$$= \frac{e^2}{r}\left(-\frac{1}{1 - \frac{x_1}{r}} - \frac{1}{1 + \frac{x_2}{r}} + \frac{1}{1 + \frac{x_2 - x_1}{r}} + 1\right).$$

Da r immer viel größer als x_2 und x_1 sein wird, so können wir die Brüche, die in der Klammer stehen, nach der allgemeinen Formel

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{r}} = \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-1} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \cdots$$

in Reihen entwickeln. Wenn wir uns in jeder dieser entwickelten Reihen auf die

ersten drei Glieder beschränken, dann erhalten wir nach einfacher Ausrechnung

$$U_{12} = -\frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2 . \qquad (151,1)$$

Das ist die potentielle Energie, die die Wechselwirkung der Dipole bedingt.

Wir erzeugen nun mittels der Dipole eine Schwingung; bei kleinen Verschiebungen werden diese Schwingungen harmonisch sein. Da die Massen der Ladungen und die Kräfte, die sie verbinden, in jedem Dipol gleich sind, so werden sie *ohne eine Verbindung zwischen den Dipolen* (beispielsweise bei sehr großer Entfernung zwischen ihnen) rein harmonische Schwingungen *mit ein und derselben Frequenz* ν_0

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}$$

ausführen, wobei f, die Direktionsgröße, bei beiden Dipolen gleich ist.

Berücksichtigen wir jetzt die Kopplung zwischen den Oszillatoren. Die Verschiebung der Ladung im ersten Oszillator ruft die quasielastische Kraft $-fx_1$ hervor, und die Verschiebung der Ladung im zweiten Oszillator ruft die Kraft $-fx_2$ hervor. Infolge der Bindung zwischen den Oszillatoren jedoch ruft die Änderung des Dipolmomentes des zweiten Oszillators eine zusätzliche Kraft im ersten hervor und umgekehrt. Diese zusätzlichen Kräfte F_{12} und F_{21} finden wir, wenn wir die Wechselwirkungsenergie U_{12} kennen; es ist dann

$$F_{12} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = \frac{2e^2}{r^3} x_2 , \qquad F_{21} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = \frac{2e^2}{r^3} x_1 .$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{2e^2}{r^3} = k \qquad (151,1')$$

ein, dann können wir die Bewegungsgleichungen beider Oszillatoren in der Form

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0 , \qquad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0 \qquad (151,2)$$

schreiben, wobei zum Beispiel $m\omega_0^2 x_1 = 4\pi^2\nu_0^2 m x_1 = f x_1$ die im ersten Oszillator wirkende quasielastische Kraft ist.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen beide gekoppelten Oszillatoren einfache harmonische Schwingungen ausführen werden. Soll die Schwingung beider Oszillatoren einfach sein, dann muß sie von einer *gemeinsamen Frequenz* herrühren. Deshalb werden wir als Antwort auf unsere Frage die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen (151,2) in der Form

$$x_1 = A e^{i\omega t}, \quad x_2 = B e^{i\omega t}$$

suchen. Setzen wir diese Lösungen in (151,2) ein, dann erhalten wir nach Division durch $e^{i\omega t}$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{k}{m} B = 0, \qquad -\frac{k}{m} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = 0. \qquad (151,3)$$

Betrachten wir dieses System algebraischer Gleichungen mit den Unbekannten

A und B, dann sehen wir, daß das System linear und homogen ist. Damit ein solches System von null verschiedene Lösungen besitzt, muß

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

sein (§ 74). Entwickeln wir diese Determinante, dann erhalten wir

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{k}{m}.$$

Hieraus finden wir zwei Werte für die Frequenz ω:

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k}{m}}. \tag{151,4}$$

Setzen wir diese Frequenzen in (151,3) ein, dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) für } \omega = \omega_+ \quad A = +B, \\ &\text{b) für } \omega = \omega_- \quad A = -B = Be^{i\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{151,4'}$$

Wir sehen also, daß ein System gekoppelter Oszillatoren zwei verschiedene Frequenzen besitzt: die eine ist etwas kleiner und die andere etwas größer als ω_0. Diese Frequenzen heißen die *normalen* oder die *Hauptfrequenzen;* mit diesen Frequenzen können die Oszillatoren reine harmonische Schwingungen ausführen. Damit die Oszillatoren mit der Frequenz ω_+ schwingen, müssen sie im Anfangsmoment die *gleiche* Verschiebung auch in derselben Phase erhalten ($A = B$, symmetrische Schwingung), und damit die Oszillatoren mit der Frequenz ω_- schwingen, müssen sie eine Verschiebung in gleicher Amplitude, aber *entgegengesetzter Phase* erhalten ($A = -B$, antisymmetrische Schwingung). Diese beiden Fälle werden in den Abb. 220 und 221 an einem Beispiel mit zwei gekoppelten Pendeln illustriert.

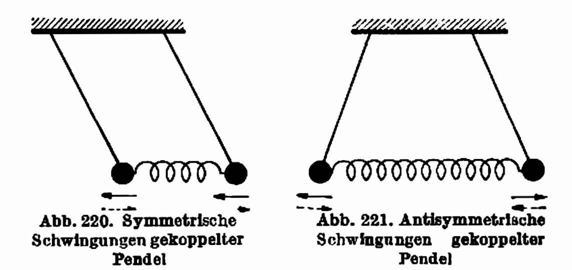


Abb. 220. Symmetrische Schwingungen gekoppelter Pendel

Abb. 221. Antisymmetrische Schwingungen gekoppelter Pendel

Sind die Anfangsbedingungen von (151,4') verschieden, dann werden die Schwingungen schon nicht mehr einfach sein. Im allgemeinen ist es möglich, sie als Superposition von Schwingungen mit den Frequenzen ω_+ und ω_- darzustellen. Wir schreiben die Partikularlösungen des Systems (151,2) in reeller Form. Setzen wir

$$A = ae^{i\delta_1} \quad \text{und} \quad B = be^{i\delta_2},$$

dann erhalten wir

$$x_1 = a\cos(\omega_+ t + \delta_1),$$
$$x_2 = b\cos(\omega_- t + \delta_2).$$

Die allgemeine Lösung ist die Superposition der Partikularlösungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos(\omega_+ t + \delta_1) + b\cos(\omega_- t + \delta_2), \\ x_2 &= a\cos(\omega_+ t + \delta_1) - b\cos(\omega_- t + \delta_2). \end{aligned}\right. \tag{151,4''}$$

Stellen wir uns die folgenden Anfangsbedingungen: im Zeitpunkt $t = 0$ hat der erste Oszillator die Verschiebung $x_1 = \alpha$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}_1 = 0$, und der zweite Oszillator ruht in der Gleichgewichtslage, d. h. $x_2 = 0$ und $\dot{x}_2 = 0$. Setzen wir diese Anfangsbedingungen in (151,4″) ein, dann finden wir

$$\alpha = a \cos \delta_1 + b \cos \delta_2, \quad 0 = a\omega_+ \sin \delta_1 + b\omega_- \sin \delta_2,$$
$$0 = a \cos \delta_1 - b \cos \delta_2, \quad 0 = a\omega_+ \sin \delta_1 - b\omega_- \sin \delta_2.$$

Die zweite und vierte Gleichung ergeben

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Setzen wir dies in die erste und dritte Gleichung ein, dann erhalten wir

$$a = b = \frac{1}{2}\alpha.$$

Somit stellen sich bei gegebenen Anfangsbedingungen die Schwingungen unserer Oszillatoren durch die Formeln

$$x_1 = \frac{A}{2}(\cos \omega_- t + \cos \omega_+ t) = A \cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \cos \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t,$$
$$x_2 = \frac{A}{2}(\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t) = A \sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \sin \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t$$

dar. In jedem dieser Ausdrücke haben wir einen sich langsam mit der Frequenz $(\omega_- - \omega_+)/2$ ändernden Faktor, der die modulierte Amplitude darstellt, und einen sich schnell mit der Frequenz $(\omega_- + \omega_+)/2$ ändernden Phasenfaktor. Außerdem sind die Schwingungen x_1 und x_2 untereinander um $\pi/2$ verschoben, so daß sich der zweite Oszillator in Ruhe befindet, wenn der erste mit maximaler

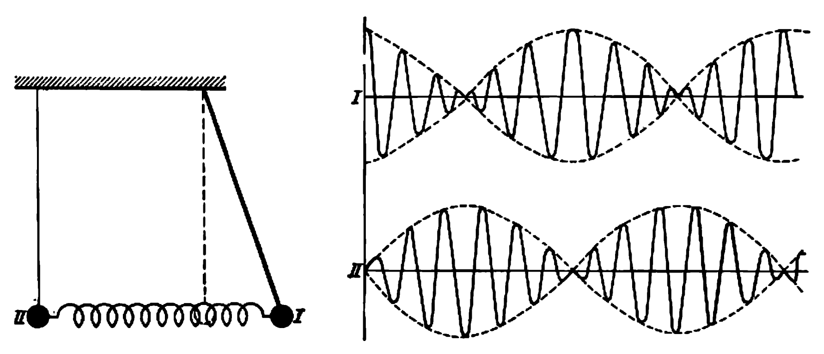


Abb. 222. Energieübertragung gekoppelter Pendel

Amplitude schwingt. Allmählich vermindert sich die Amplitude des ersten, und die des zweiten vergrößert sich, so daß sich während eines Viertels der Modulationsperiode die Rollen der Oszillatoren vertauscht haben, wonach der gesamte Prozeß in umgekehrter Richtung verläuft (Abb. 222).

Diese „Wanderung“ oder der Austausch der Energie wird am anschaulichsten in dem bekannten Demonstrationsversuch mit den beiden gekoppelten gleichen Pendeln beobachtet.

Berechnen wir die Gesamtenergie unserer beiden gekoppelten Oszillatoren. Die potentielle Energie eines einzelnen Oszillators ist gleich $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$, und die potentielle Energie eines Systems gekoppelter Oszillatoren enthält, wie wir bereits am Anfang dieses Paragraphen gesehen haben, außer der Summe der potentiellen Energien der beiden Oszillatoren noch das Glied $-\frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2$, das der Energie ihrer Wechselwirkung entspricht. Wir haben auf diese Weise

$$U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2,$$

und die kinetische Energie ist gleich

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 .$$

Folglich ist

$$T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2 .$$

Wenn wir die Wechselwirkung der Oszillatoren vernachlässigen könnten, indem wir das letzte Glied wegließen, dann wäre die Gesamtenergie des Systems einfach gleich der Summe der Energien beider Oszillatoren, die Schwingungen mit ihrer unveränderten Frequenz ω_0 ausführten. Aber eine solche Näherung ist nur dann zulässig, wenn sich die Oszillatoren in großer Entfernung voneinander befinden (großes r). Wir können uns jedoch die Gesamtenergie $T + U$ als Summe der Energien von Oszillatoren vorstellen, die mit *veränderten Frequenzen* schwingen.

Um uns hiervon zu überzeugen, führen wir für x_1 und x_2 die neuen Veränderlichen ξ und η ein, die mit den alten durch die Beziehungen

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2)$$

verknüpft sind. Hieraus folgt umgekehrt

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta)$$

und ferner

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2).$$

Unter Benutzung dieser Beziehung stellen wir den Ausdruck für die Gesamtenergie auf:

$$T + U = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\xi^2 + \eta^2) - \frac{e^2}{r^3} (\xi^2 - \eta^2)$$
$$= \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(1 - \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right) \xi^2 + \frac{1}{2} m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(1 + \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right) \eta^2$$

oder unter Berücksichtigung von (151,4) und (151,1'):

$$T + U = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} m\omega_+^2 \xi^2 + \frac{1}{2} m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m\omega_-^2 \eta^2 . \qquad (151{,}5)$$

Auf diese Weise sehen wir, daß in dieser Form $T + U$ nichts anderes als die Summe der Energien zweier unabhängiger Oszillatoren ist, die Schwingungen mit den früher gefundenen normalen Frequenzen ω_+ und ω_- ausführen!

Nach dem im § 149 erhaltenen Resultat hat die Energie dieser Oszillatoren die Quantenwerte:

$$E_{n_+} = h\nu_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right), \quad E_{n_-} = h\nu_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right),$$

und die Gesamtenergie ist folglich

$$E_{n_+} + E_{n_-} = h\nu_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) + h\nu_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right). \tag{151,6}$$

Berechnen wir jetzt die Frequenzen ν_+ und ν_- mit einer für unseren Zweck hinreichenden Näherung. Ersetzen wir in (151,4) die Kreisfrequenz durch die lineare ($\omega = 2\pi\nu$) und führen wir an Stelle von f den Ausdruck aus (151,1′) ein, dann erhalten wir

$$\nu_+ = \nu_0\left(1 - \frac{2e^2}{r^3 f}\right)^{1/2}, \quad \nu_- = \nu_0\left(1 + \frac{2e^2}{r^3 f}\right)^{1/2} \quad (f = 4\pi^2 m\nu_0^2).$$

Jetzt benutzen wir die Reihenentwicklung nach der bekannten Formel

$$(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \cdots, \quad |\varepsilon| < 1.$$

Wir erhalten

$$\nu_+ = \nu_0\left(1 - \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2}\right), \quad \nu_- = \nu_0\left(1 + \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2}\right).$$

Setzen wir dies in (151,6) ein, dann finden wir

$$E = E_{n_+} + E_{n_-} = h\nu_0\left\{(n_+ + n_- + 1) + \frac{e^2}{r^3 f}(n_- - n_+) - \frac{e^4}{2r^6 f^2}(n_- + n_+ + 1)\right\}. \tag{151,7}$$

In dem Fall, in dem sich die beiden Oszillatoren im Grundzustand befinden, ist $n_+ = n_- = 0$, und außerdem wird das zweite Glied der geschweiften Klammer null[1]); wir erhalten dann

$$E = h\nu_0\left(1 - \frac{e^4}{2r^6 f^2}\right). \tag{151,8}$$

Bedenken wir, daß die Summe der Nullpunktsenergien beider Oszillatoren gleich $\frac{1}{2}h\nu_0 + \frac{1}{2}h\nu_0 = h\nu_0$ ist, dann sehen wir, daß die Gesamtenergie des Systems um die Größe $\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$ *kleiner* als diese Summe ist. Die Größe $-\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$ ist die Bindungsenergie

$$W = -\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2} \cdot \frac{1}{r^6} = -\frac{C}{r^6}, \tag{151,9}$$

worin C irgendeine Konstante ist. Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß es sich bei der Bindung stets um eine Anziehung handelt. Die Konstante C kann für verschiedene Atome aus den optischen Daten und den Universalkonstanten e und h berechnet werden.

Auf diese Weise haben wir die Möglichkeit, im voraus die Energie molekularer Wechselwirkungen zu berechnen. Andererseits kann als Maß für diese Energie die Arbeit dienen, die aufzuwenden ist, um ein Atom oder Molekül aus seiner

---

[1]) Dieses Glied ist dann von größerem Interesse, wenn ein Oszillator in angeregtem Zustand ist, d. h., wenn n_+ oder $n_- \neq 0$ ist. Jedoch werden wir hier auf diesen Fall nicht eingehen.

Bindung in einem festen, kristallinen Gitter zu befreien, d. h. die Sublimationswärme. Wie gut die mit Hilfe der Formel (151,9) berechneten und die im Versuch gefundenen Größen für die Sublimationswärme übereinstimmen, zeigt die angegebene Tabelle.

Material	Sublimationswärme	
	berechnet	beobachtet
Ne	0,47	0,59
N_2	1,64	1,86
Ar	2,08	2,03
CH_4	2,42	2,70

Wenden wir uns dem am Anfang des Paragraphen Gesagten zu und zeigen wir, daß eine Erklärung der VAN DER WAALSschen Kopplungskräfte nur durch das Auftreten der auf den ersten Blick seltsamen Nullpunktsenergie $\frac{1}{2} h\nu_0$ in der Formel für die Oszillatorenergie bedingt ist. Wenn wir nämlich bei der Endrechnung die halbklassische PLANCKsche Formel $E_n = nh\nu_0$ benutzen würden, so fielen in der Formel (151,7) die beiden Einheiten (in den ersten und letzten runden Klammern) weg. Daher würden wir im Grundzustand (für $n_+ = n_- = 0$) für die Bindungsenergie null erhalten. Dies entspricht gerade der Tatsache, daß ruhende Oszillatoren nach der klassischen Theorie nicht in Wechselwirkung treten können, wenn sie nicht auf Grund der Ladungsverteilung ein merkliches elektrisches Moment besitzen (die Atome der Edelgase He, Ne, Ar). Somit ergibt sich, daß *das Auftreten von molekularen Wechselwirkungskräften im Normalzustand an die Existenz der Nullpunktsenergie gebunden ist.*

§ 152. Das Teilchen im dreidimensionalen Potentialkasten

In den Aufgaben, mit denen wir es bis jetzt zu tun hatten, hing die Funktion ψ von nur einer Koordinate ab. Zum Schluß dieses Abschnittes werden wir noch das einfachste Beispiel eines dreidimensionalen Problemes betrachten.

Wir nehmen einen dreidimensionalen Potentialkasten an, d. h. ein in allen Richtungen begrenztes Gebiet, in dessen Innern die potentielle Energie überall gleich null ist und an dessen Grenzen sie sofort bis ins Unendliche anwächst und auch in dem ganzen übrigen Raum unendlich bleibt. Nehmen wir an, daß das Gebiet, in dem die potentielle Energie gleich null ist, die Gestalt eines Parallelepipeds mit den Kanten l_1, l_2, l_3 hat. Wir können $U(x, y, z)$ als Summe dreier Glieder darstellen

$$U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z),$$

wobei

$$\begin{aligned} U_x &= 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq l_1, & U_x &= \infty \text{ für } x \leqq 0 \text{ und } x \geqq l_1, \\ U_y &= 0 \text{ für } 0 \leqq y \leqq l_2, & U_y &= \infty \text{ für } y \leqq 0 \text{ und } y \geqq l_2, \\ U_z &= 0 \text{ für } 0 \leqq z \leqq l_3, & U_z &= \infty \text{ für } z \leqq 0 \text{ und } z \geqq l_3. \end{aligned}$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung schreiben wir für diesen Fall in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U_x - U_y - U_z) = 0. \qquad (152,1)$$

Das ist eine Differentialgleichung mit partiellen Ableitungen. Die Lösungsmethode, die wir hier und im weiteren benutzen (siehe Bd. II, Abschnitt XIII), besteht

darin, die Gleichung mit den partiellen Ableitungen in drei gewöhnliche Gleichungen zu zerlegen. Die Möglichkeit dieser Zerlegung hängt von der passenden Wahl des Koordinatensystems ab, und diese Wahl wird gewöhnlich von der Symmetrie des Problems diktiert. In dem gegebenen Fall ist die Trennung sehr einfach durchzuführen.

Wir werden ψ in der Form eines Produktes dreier Funktionen darstellen, von denen eine jede von nur einer Koordinate abhängt.

$$\psi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z). \tag{152,2}$$

Setzen wir die Lösung (152,2) in die Gleichung (152,1) ein und separieren nach X, Y und Z, dann erhalten wir

$$\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_x\right) + \left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_y\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_z\right) = -\frac{8\pi^2m}{h^2}E. \tag{152,3}$$

Hier hängt die erste Klammer nur von x, die zweite nur von y und die dritte nur von z ab, jedoch ist ihre Summe gleich einer Konstanten. Dies kann nur dann möglich sein, wenn eine jede der Klammern der linken Seite selbst gleich einer Konstanten ist. Somit ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_x &= C_x, \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_y &= C_y, \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2}U_z &= C_z. \end{aligned}\right\} \tag{152,4}$$

Wir erhalten drei gewöhnliche Differentialgleichungen, die Trennung erwies sich also als möglich. Offensichtlich ist

$$C_x + C_y + C_z = -\frac{8\pi^2m}{h^2}E.$$

Es ist zweckmäßiger, an Stelle der Konstanten C_x, C_y, C_z die neuen Konstanten E_x, E_y, E_z einzuführen, indem wir zum Beispiel $C_x = -\frac{8\pi^2m}{h^2}E_x$ annehmen. Dann kann die Gleichung (152,4) in der Form

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E_x - U_x)X = 0 \quad \text{usw.} \tag{152,5}$$

geschrieben werden. Offensichtlich stimmt die Gleichung (152,5) mit der Gleichung (147,1) bei der Aufgabe im eindimensionalen Potentialkasten überein. Die Grenzbedingungen für beide Aufgaben sind gleich:

$$X(0) = X(l_1) = 0. \tag{152,6}$$

In Analogie zu den Lösungen des § 147 können wir sofort die die Gleichung (152,5) und die Randbedingungen (152,6) erfüllenden Lösungen anschreiben. In normierter Form lauten sie:

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\frac{n_x\pi x}{l_1} \qquad (n_x = 1, 2, 3, \ldots) \tag{152,7}$$

unter den Bedingungen

$$E_{n_x} = n_x^2\frac{h^2}{8ml_1^2}. \tag{152,8}$$

Die beiden anderen Gleichungen der Gruppe (152,4) haben die analogen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} Y_n &= \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2} \\ Z_n &= \sqrt{\frac{2}{l_3}} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3} \end{aligned}\right\} \qquad (n_y n_z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{152,9}$$

mit den Bedingungen

$$E_{n_y} = n_y^2 \frac{h^2}{8ml_2^2}, \qquad E_{n_z} = n_z^2 \frac{h^2}{8ml_3^2}. \tag{152,8'}$$

Jetzt kennen wir bereits die Lösungen der Ausgangsgleichung, welche die Grenzbedingungen erfüllen:

$$\psi_n(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{n_x \pi x}{l_1} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3}, \tag{152,10}$$

wobei die Energie nur die folgende Reihe von diskreten Werten annehmen kann:

$$E(n_x, n_y, n_z) = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2}\right) \tag{152,11}$$
$$(n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Eigenfunktionen (152,10) unserer Aufgabe werden auf folgende Weise charakterisiert (siehe § 147): sie stellen stehende Wellen dar, die $n_x + 1$ Knotenebenen parallel zur Koordinatenebene yz, $n_y + 1$ Knotenebenen parallel der xz-Ebene und $n_z + 1$ Knotenebenen parallel zur xy-Ebene besitzen.

Die nach der Formel (152,11) möglichen Energiewerte bilden eine diskrete Folge, wobei eine jede Einheit von drei ganzen Zahlen n_x, n_y, n_z einem bestimmten Energieniveau entspricht. Diese drei Zahlen n_x, n_y, n_z heißen die *Quantenzahlen*.

Für eine anschauliche Darstellung der möglichen Zustände und der Energiewerte des Teilchens im Kasten wird passend das folgende geometrische Bild benutzt. Wir stellen uns ein räumliches Gitter mit der Elementarzelle in Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kanten $1/l_1$, $1/l_2$, $1/l_3$ vor (Abb. 223). Der Raum einer solchen Zelle wird dann $1/l_1 l_2 l_3$ sein. Da jeder Zustand eines Teilchens durch die Gesamtheit der Werte n_x, n_y, n_z charakterisiert ist, so können wir einen beliebigen Zustand durch einen Gitterpunkt darstellen, welcher die Koordinaten n_x/l_1, n_y/l_2, n_z/l_3 besitzt. Die Energie, die diesem Zustand entspricht, finden wir mit Hilfe unseres geometrischen Bildes auf folgende Weise: Wir nehmen einen Vektor $\mathfrak{A}$, der den Koordinatenanfangspunkt mit dem Punkt verbindet, der den Zustand darstellt. Das Quadrat seiner Länge wird dann

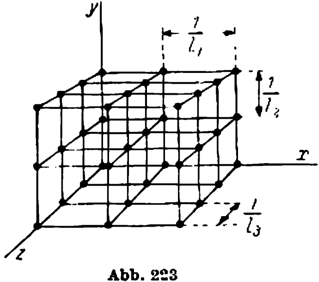


Abb. 223

$$A^2 = \frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2}.$$

Deshalb hat die Energie den Ausdruck

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8m} A^2.$$

Mit Hilfe des geometrischen Bildes können wir eine überaus wichtige Besonderheit in der Lösung der gegebenen Aufgabe feststellen. Sind die Kanten des Potentialkastens l_1, l_2, l_3 inkommensurable Zahlen, so entspricht *jedem Zustand* sein darstellender Punkt und sein Energiewert. Ist dies aber nicht der Fall, dann stehen die Kanten in einem rationalen Verhältnis. Zur Einfachheit mögen wir es mit einem kubischen Kasten zu tun haben, wo $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ist. Für diesen Fall wird

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \sqrt{\frac{8}{l^3}} \sin\frac{n_x \pi x}{l} \sin\frac{n_y \pi y}{l} \sin\frac{n_z \pi z}{l}\,, \\ E &= \frac{h^2}{8ml^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right). \end{aligned}\right\}$$

Offensichtlich werden wir für jede Gesamtheit ganzer Zahlen n_x, n_y, n_z deren Funktion ψ kennen, aber die Energiewerte für alle Zustände, für die die Summe $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ dieselbe Größe hat, werden miteinander übereinstimmen. Auf diese Weise werden den verschiedenen Punkten unseres angenommenen kubischen Gitters immer verschiedene Zustände entsprechen, jedoch wird die Energie in einigen von diesen Zuständen gleich sein.

Betrachten wir als Beispiele zwei besondere Fälle. Es sei $n_x = 1$, $n_y = 1$, $n_z = 1$; in diesem Fall ist

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 3\,.$$

Da wir nicht drei andere ganze Zahlen so zusammenstellen können, daß ihre Quadratsumme gleich 3 ist, so entspricht dem Zustand (1, 1, 1) nur ein Energiewert. Wenn wir aber annehmen, daß $n_x = 1$, $n_y = 2$, $n_z = 3$ ist, dann wird

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14$$

und der entsprechende Energiewert

$$E = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot 14\,.$$

Diesem Energiewert entsprechen sechs verschiedene Zustände, die in der Tabelle XXII angegeben sind.

Tabelle XXII

n_x	n_y	n_z	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	
2	3	1	
3	1	2	
2	1	3	
3	2	1	

Es ist leicht festzustellen, daß im Falle eines kubischen Kastens die Mehrzahl von Zuständen dadurch charakterisiert wird, daß verschiedenen Zuständen die gleiche Energie entsprechen kann. Solche Zustände heißen entartete Zustände, und die Anzahl übereinstimmender Energieniveaus heißt das Quantengewicht dieses Zustandes. Im ersten von den angeführten Beispielen ist das Quantengewicht gleich 1, im zweiten gleich 6.

Übungen: 1. Es sind die Schwingungen eines dreidimensionalen linearen anisotropen Oszillators darzustellen (§ 106). Die potentielle Energie eines solchen Oszillators wird durch die Summe

$$U = \frac{1}{2} f_x x^2 + \frac{1}{2} f_y y^2 + \frac{1}{2} f_z z^2$$

ausgedrückt, worin f_x, f_y, f_z Direktionsgrößen der quasielastischen Kraft in Richtung der drei kartesischen, rechtwinkligen Koordinatenachsen sind. Führen wir die entsprechenden klassischen Frequenzen $\nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_x}{m}}$ ein, dann können wir die potentielle Energie in der Form

$$U = 2\pi^2 m\,(\nu_x^2 x^2 + \nu_y^2 y^2 + \nu_z^2 z^2)$$

darstellen. Wir benutzen diesen Ausdruck für die potentielle Energie in der Schrödinger-Gleichung und zeigen, daß die Eigenwerte der Energie des Oszillators folgendermaßen lauten:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = h\left[\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\nu_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\nu_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\nu_z\right],$$

wobei die ganzen Zahlen n_x, n_y, n_z die Quantenzahlen sind und die Eigenfunktionen die Form

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2)} H_{n_x}(\sqrt{\alpha_x}\,x) \cdot H_{n_y}(\sqrt{\alpha_y}\,y) \cdot H_{n_z}(\sqrt{\alpha_z}\,z)$$

haben, wobei

$$\alpha_x = \frac{4\pi^2 m}{h}\,\nu_x \quad \text{usw.}$$

ist.

Hinweis: Die Zerlegung der Schrödinger-Gleichung ist nach dem in diesem Paragraphen angegebenen Schema durchzuführen, und die Resultate des § 149 für den eindimensionalen linearen Oszillator sind zu benutzen.

2. Es ist nachzuweisen, daß im Falle eines dreidimensionalen isotropen linearen Oszillators die Eigenwerte der Energie

$$E_n = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) h\nu_0 = \left(n + \frac{3}{2}\right) h\nu_0 \qquad (n = n_x + n_y + n_z)$$

lauten werden. Es ist zu zeigen, daß alle Niveaus, mit Ausnahme des nullten ($n_x = n_y = n_z = 0$), entartet sind und das Quantengewicht $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ haben.

ANHANG

I. Berechnung von Mittelwerten

Wir betrachten die folgende Aufgabe. Wir nehmen an einer verlustlosen Lotterie teil, in der es n_1 Gewinnlose zu a_1 Mark gibt und n_2 Lose zu a_2 Mark. Wie groß wird der mittlere Gewinn sein? Die Gesamtzahl der Lose ist gleich N:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k \equiv \sum_{i=1}^{k} n_i = N .$$

Der mittlere Gewinn $\bar{a}$ ergibt sich aus der „Mischregel":

$$\bar{a} = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots + a_k n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = a_1 \frac{n_1}{N} + a_2 \frac{n_2}{N} + \cdots + a_k \frac{n_k}{N} . \qquad \text{(I,1)}$$

Nach dem Verhältnis $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \ldots$ ist für den Teilnehmer die Wahrscheinlichkeit, diesen oder jenen Gewinn zu ziehen:

$$w_1 = \frac{n_1}{N}, \quad w_2 = \frac{n_2}{N}, \quad \ldots, w_k = \frac{n_k}{N} . \qquad \text{(I,2)}$$

Deshalb ist (I,1) auch in der Form

$$\bar{a} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_k w_k \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \qquad \text{(I,3)}$$

zu schreiben. Der Ausdruck auf der rechten Seite von (I,3), d. h. die Summe der Produkte von Werten, die die Größe a_i annehmen können, mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, heißt in der Wahrscheinlichkeitstheorie gewöhnlich die mathematische Erwartung. Im allgemeineren Fall der Größe x, die eine diskrete Reihe von Werten $x_1, x_2, \ldots x_k$ annehmen kann, unter welchen sich auch negative Werte befinden können und wobei die Wahrscheinlichkeit dieser Werte entsprechend gleich $w_1, w_2, \ldots w_x$ ist, wird die mathematische Erwartung als eine *algebraische Summe* bestimmt:

$$\bar{x} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_k w_k . \qquad \text{(I,4)}$$

Vermerken wir, daß die Wahrscheinlichkeit (I,2) so bestimmt wird, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Werte der Größe a in (I,3) oder x in (I,4) gleich 1 ist:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{N} = 1 . \qquad \text{(I,5)}$$

Der Sinn einer solchen Bestimmung liegt in folgendem: da $a_1, a_2 \ldots a_k$ alle möglichen Größen an Gewinnen ausschöpfen und die Lotterie verlustlos ist, so

ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten nach dem Additionstheorem der Wahrscheinlichkeiten gleich der Wahrscheinlichkeit, *irgendeinen* Gewinn zu erhalten, d. h. die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses. Üblicherweise wird die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses gleich 1 angenommen. Wenn die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Werte die Bedingung (I,5) erfüllen, so sagt man, daß die Wahrscheinlichkeit auf 1 normiert ist.

In der Physik hat man es in einigen Fällen mit Wahrscheinlichkeiten zu tun, die nicht auf 1 normiert sind. Es wäre beispielsweise möglich, die Wahrscheinlichkeit, diesen oder jenen Gewinn zu erhalten, durch eine Anzahl von Losen zu charakterisieren, die diesen Gewinn geben. Dann ist

$$w_1 = n_1\,, \quad w_2 = n_2\,, \;\ldots,\; w_k = n_k$$

und nach der Formel (I,1)

$$\bar{a} = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_k w_k}{w_1 + w_2 + \cdots + w_k} = \frac{\sum\limits_i a_i w_i}{\sum\limits_i w_i}$$

oder an Stelle von (I,4)

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_i x_i w_i}{\sum\limits_i w_i}\,. \tag{I,6}$$

Die angeführten Formeln beziehen sich auf diskret verteilte Größen (zum Beispiel werden die verschiedenen möglichen Gewinne $a_1, a_2, \ldots, a_k$ auf eine endliche Zahl von Markbeträgen verteilt). In der Physik hat man es oft mit sich stetig ändernden Größen zu tun. In diesem Fall hat die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Größe einen Wert, der in dem engen Intervall zwischen x und $x + dx$ liegt, der Größe dieses Intervalles proportional ist und in der Form $w(x)\,dx$ ausgedrückt wird. Hier hat die Funktion $w(x)$, die die Verteilungsfunktion oder die *Dichte der Wahrscheinlichkeit* genannt wird, folgenden Sinn: zeichnen wir die Kurve, die $w(x)$ darstellt (Abb. 224), dann können wir in dem kleinen Gebiet von x bis $x + dx$ die Funktion $w(x)$ als konstant annehmen, und das Produkt $w(x)\,dx$, das den Inhalt der schraffierten Fläche darstellt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die veränderliche Größe einen in dem angegebenen Intervall liegenden Wert annimmt. Kann sich die veränderliche Größe in dem endlichen Intervall von $x = a$ bis $x = b$ stetig ändern, dann ist das Integral $\int\limits_a^b w(x)\,dx$, das die Fläche zwischen den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ darstellt, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert x irgendwo in dem angegebenen endlichen Intervall (a, b) liegt. Wenn in dem Intervall alle möglichen Werte von x eingeschlossen sind, stellt das Integral $\int\limits_a^b w(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses dar.

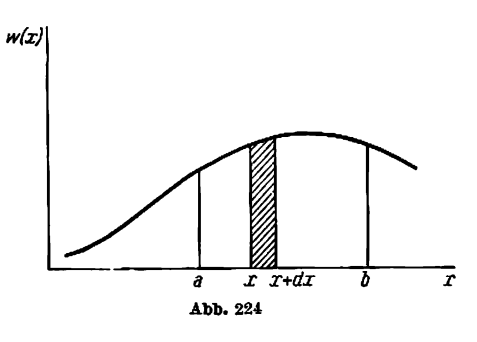


Abb. 224

Wird die Funktion $w(x)$ so ausgedrückt, daß

$$\int_a^b w(x)\,dx = 1\,, \tag{I,7}$$

so sagt man, daß die Dichte der Wahrscheinlichkeit auf 1 normiert ist. Insbesondere kann das Integral von 0 bis ∞ oder auch von $-\infty$ bis $+\infty$ das Gebiet der Änderung von x sein. Damit in diesem Fall die Bedingung (I,7) einen Sinn hat, muß die Funktion $w(x)$ beim Wachsen von x genügend schnell abnehmen (wenigstens wie x^{-p}, wobei $p > 1$ ist).

Um den Mittelwert von x aufzufinden, wird das Integral (a, b) in kleine Gebiete x_i, $x_i + dx$ aufgeteilt. In jedem von ihnen kann $w(x) = w(x_i)$ als konstant angenommen werden; $w(x_i) \cdot dx$ ist dann angenähert gleich der Wahrscheinlichkeit für die Größe x, einen Wert zwischen x_i und $x_i + dx$ aufzuweisen. Der Grenzwert der Summe $\sum\limits_i x_i w(x_i)\,dx$ oder das Integral $\int_a^b x w(x)\,dx$ wird in diesem Fall die mathematische Erwartung oder der Mittelwert der sich stetig ändernden Größe

$$\bar{x} = \int_a^b x w(x)\,dx \tag{I,8}$$

sein. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte auf 1 normiert ist, d. h., daß die Gleichung (I,7) gilt. Ist $w(x)$ nicht normiert, so muß zur Berechnung von $\bar{x}$ eine zu (I,6) analoge Formel benutzt werden:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}\,. \tag{I,9}$$

Der Mittelwert des Quadrates $\overline{x^2}$ wird im Fall, daß $w(x)$ normiert ist,

$$\overline{x^2} = \int_a^b x^2 w(x)\,dx \tag{I,10}$$

und der allgemeine Mittelwert einer beliebigen Funktion $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\,. \tag{I,11}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Es sei

$$w(x) = e^{-\lambda x}\,, \tag{I,12}$$

wobei x alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann. Prüfen wir die Normierung der Funktion $w(x) = e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\,,$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit ist nicht normiert. Zur Berechnung der Mittelwerte muß entweder die Formel (I,9) benutzt oder $w(x)$ normiert werden. Offensichtlich

ist in dem gegebenen Fall $\lambda \cdot e^{-\lambda x}$ die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte. Der Mittelwert von x wird

$$\bar{x} = \int_0^\infty x w(x)\, dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx$$

sein. Integrieren wir partiell

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty x\, d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

(das zweifache Einsetzen an der oberen Grenze ergibt die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$; die Entwicklung ergibt null). Somit ist

$$\bar{x} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Analog gilt

$$\overline{x^2} = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty x^2\, d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = 2\int_0^\infty e^{-\lambda x} x\, dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte vom Typ $e^{-\lambda x}$ finden wir wiederholt in diesem Buch.

II. Ableitung der Formel für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit

Wir benutzen die von R. Tolman[1]) angegebene einfache Ableitung der Formel

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dazu stellen wir vor allem die notwendigen Hilfsformeln zusammen.

a) *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*

Wir haben zwei Koordinatensysteme S und S'. Das System S' bewegt sich in bezug auf S in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit V. Bewegt sich ein Massenpunkt gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit, deren Komponenten im System S' (u'_x, u'_y, u'_z) sind, so sind die Komponenten im System S gleich

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{u_x' + V}{1 + \frac{u_x' V}{c^2}}, \\ u_y &= \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x' V}{c^2}}, \\ u_z &= \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x' V}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II,1)}$$

[1]) R. Tolman, Relativity, „Thermodynamics and Cosmology", Oxford 1934.

Die Formeln (II,1) drücken das Additionstheorem der Geschwindigkeiten in der Mechanik der speziellen Relativitätstheorie aus.

b) *Lorentz-Transformationsformel* $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

Wir leiten nun die Lorentz-Transformationsformel ab, der man bekanntlich oft in den Formeln der Relativitätstheorie begegnet. Wir schreiben

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}}\,. \qquad \text{(II,1')}$$

Setzen wir hierin u_x, u_y, u_z aus der Formel (II,1) ein, dann erhalten wir nach einigen algebraischen Umformungen

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{u'V}{c^2}}\,, \qquad \text{(II,2)}$$

wobei

$$u'^2=u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2\,.$$

Die Formel (II,2) ist die gesuchte Transformationsformel

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,.$$

c) *Ableitung der Formel für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit*

Die weitere Ableitung ist auf die Erhaltungsgesetze der Masse und des Impulses begründet

$$\sum m=\text{const}\,,\qquad \sum m\dot{x}=\text{const}\,,\qquad \sum m\dot{y}=\text{const}\,,\qquad \sum m\dot{z}=\text{const}\,,$$

die *für beliebige Koordinatensysteme* gelten.

Im ersten Fall bezieht sich die Summierung auf alle Massen des Systems; im zweiten auf alle Impulse.

Betrachten wir jetzt den elastischen Stoß zweier gleicher materieller Punkte. Die beiden Punkte mögen sich bis zum Stoß im System S' parallel zur x-Achse mit den Geschwindigkeiten $+u'$ und $-u'$ bewegen. Wenn außerdem angenommen wird, daß der Stoß vollkommen elastisch ist, dann bleiben beide Punkte im Moment des Zusammenstoßes stehen und vertauschen danach ihre Geschwindigkeiten: der erste bewegt sich mit der Geschwindigkeit $-u'$ und der zweite mit der Geschwindigkeit $+u'$. Wir führen jetzt noch ein Koordinatensystem S ein, das sich in bezug auf S' gleichmäßig mit der Geschwindigkeit $-V$ bewegt. Die Geschwindigkeiten unserer beiden Punkte in diesem System werden u_1 und u_2 sein; ihre Massen werden mit m_1 und m_2 bezeichnet (die Indizes sind zu dem Zwecke eingeführt, um sofort die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit zu berücksichtigen). M mag die Summe ihrer Massen im Augenblick des Zusammenstoßes sein, d. h. dann, wenn ihre gemeinsame Geschwindigkeit in bezug auf S gleich $+V$ ist. Die Erhaltungsgesetze der Masse und des Impulses gelten für beliebige Koordinatensysteme und ergeben

$$m_1+m_2=M\,, \qquad \text{(II,3)}$$

$$m_1u_1+m_2u_2=MV\,. \qquad \text{(II,4)}$$

Es ist leicht zu sehen, daß in der GALILEI-NEWTONschen Mechanik die gemeinsame Erfüllung dieser Beziehungen zur Unabhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit führt. Tatsächlich gibt das Additionstheorem der GALILEI-NEWTONschen Mechanik

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u' + V\,, \\ u_2 &= -u' + V\,. \end{aligned}\right\}$$

Setzen wir dies in (II,4) ein und benutzen (II,3), dann finden wir

$$m_1 u' + m_1 V - m_2 u' + m_2 V = m_1 V + m_2 V$$

und daraus

$$(m_1 - m_2)\, u' = 0$$

oder

$$m_1 = m_2\,.$$

Im Gegensatz hierzu wird in der Relativitätstheorie die Transformation der Geschwindigkeiten nach den Formeln (II,1) ausgeführt, aus denen wir

$$u_1 = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}\,, \qquad u_2 = \frac{-u' + V}{1 - \frac{u'V}{c^2}}$$

erhalten.

Setzen wir dies in (II,4) ein und benutzen auch den Erhaltungssatz für die Masse $M = m_1 + m_2$, dann erhalten wir

$$m_1 \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} + m_2 \frac{-u' + V}{1 - \frac{u'V}{c^2}} = m_1 V + m_2 V\,,$$

woraus wir nach einfachen algebraischen Umformungen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{u'V}{c^2}}{1 - \frac{u'V}{c^2}} \tag{II,5}$$

erhalten. Nach der Formel (II,2) ist aber

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_1' V}{c^2}}\,, \\ \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_2' V}{c^2}}\,, \end{aligned}\right\}$$

während (II,5) die Form

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} \tag{II,6}$$

annimmt. Dies zeigt, daß bei verschiedenen Geschwindigkeiten u_1 und u_2 die Massen m_1 und m_2 nicht gleich, sondern dem Faktor $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ umgekehrt proportional sind. Wenn also $u_2 = 0$ ist, so wird die Beziehung (II,6) ergeben:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

da nach Voraussetzung die Massen beider Teilchen im Ruhezustand gleich und beispielsweise gleich m_0 sind.

III. Zur klassischen Theorie des Zeeman-Effektes

Wir zeigen, daß sich bei langsamem Anwachsen des magnetischen Feldes nicht der Bahnradius des Elektrons ändert, sondern nur seine Winkelfrequenz. Nach der zweiten Maxwellschen Gleichung in Integralform (verallgemeinertes Gesetz der elektromagnetischen Induktion) entsteht bei Änderung des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ ein elektrisches Wirbelfeld $\mathfrak{E}$ mit einer zu $\mathfrak{H}$ parallelen Achse, wobei

$$\oint |\mathfrak{E}_s|\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi r^2 \frac{d|\mathfrak{H}|}{dt}. \tag{III,1}$$

Solange das Magnetfeld von 0 bis $\mathfrak{H}$ anwächst, kann das Elektron n Umläufe machen, also haben wir unter der Annahme, daß $\mathfrak{H}$ gleichmäßig wächst,

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{\mathfrak{H}}{nT}, \tag{III,2}$$

wobei T die Dauer eines Elektronenumlaufes ist. Die Arbeit, die von dem Feld im Verlaufe eines Umlaufs auf das Elektron übertragen wird, ist gleich

$$\frac{\Delta W}{n} = -e \oint |\mathfrak{E}_s|\, ds$$

oder, wenn wir (III,1) und (III,2) berücksichtigen,

$$\frac{\Delta W}{n} = \frac{e}{c}\frac{|\mathfrak{H}|}{nT}\pi r^2,$$

so daß

$$\Delta W = \frac{e}{c}\frac{|\mathfrak{H}|}{T}\pi r^2 = \frac{e}{c}|\mathfrak{H}|\,\nu\pi r^2 = \frac{e}{2c}|\mathfrak{H}|\,\omega r^2.$$

Diese Arbeit wird vor allem für die Vergrößerung der kinetischen Energie aufgewandt und, wenn sich der Bahnradius ändert, auch zur Vergrößerung der potentiellen Energie. Daher ist

$$\frac{e}{2c}|\mathfrak{H}|\,\omega r^2 = \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p}. \tag{III,3}$$

Es ist aber

$$\left.\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2, \\ \Delta E_\mathrm{k} &= m\,(r^2\omega\,\Delta\omega + \omega^2 r\,\Delta r), \\ E_\mathrm{p} &= -\frac{e^2}{r}, \qquad \Delta E_\mathrm{p} = \frac{e^2}{r^2}\Delta r \end{aligned}\right\} \tag{III,4}$$

oder, wenn wir die Gleichheit zwischen der Anziehungskraft $\frac{e^2}{r^2}$ und der Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ berücksichtigen,

$$\Delta E_p = m r \omega^2 \Delta r . \tag{III,5}$$

Setzen wir (III,4) und (III,5) in (III,3) ein, so finden wir

$$\frac{e}{2c} |\mathfrak{H}| \omega r^2 = m (r^2 \omega \Delta \omega + 2 \omega^2 r \Delta r) .$$

Dividieren wir beide Seiten durch $mr^2\omega^2$, dann erhalten wir

$$\frac{e}{2mc} \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta r}{r} . \tag{III,6}$$

Berücksichtigen wir ferner, daß bei einer unendlich langsamen (adiabatischen) Zustandsänderung in jedem Zeitpunkt eine Gleichheit zwischen den Kräften, die auf das Elektron wirken (d. h. der Coulombschen Anziehungskraft und der Lorentzschen Kraft), und der Zentrifugalkraft stattfindet, dann erhalten wir für den dargestellten Zustand

$$m (r + \Delta r) (\omega + \Delta \omega)^2 = \frac{e^2}{(r + \Delta r)^2} + \frac{e}{c} |\mathfrak{H}| r \omega$$

oder, nach Multiplikation mit $(r + \Delta r)^2$,

$$m (r + \Delta r)^3 (\omega + \Delta \omega)^2 = e^2 + \frac{e}{c} |\mathfrak{H}| r^3 \omega$$

(wobei die Glieder mit $r \cdot \Delta r$ und $(\Delta r)^2$ vernachlässigt wurden). Hieraus finden wir durch einfache Umformung

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{e}{2mc} \frac{|\mathfrak{H}|}{\omega} . \tag{III,7}$$

Setzen wir (III,6) und (III,7) gleich, dann erhalten wir vor allem

$$\Delta r = 0$$

und weiter

$$\Delta \omega = \frac{e}{2mc} |\mathfrak{H}| ,$$

was zu beweisen war.

IV. Die Formel für das mittlere Schwankungsquadrat

1. Die Formel des mittleren Schwankungsquadrates

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}$$

treffen wir in diesem Buch so oft an, daß es zweckmäßig ist, ihre Ableitung zu geben.

Wir betrachten die folgende Aufgabe der kinetischen Gastheorie: in einem Raum V befinden sich N Moleküle; welche Wahrscheinlichkeit gibt es dafür, daß in dem Teil v des Raumes n Moleküle vorhanden sind? Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül sich in dem Raum v befindet, ist $\frac{v}{V}$ (§ 109); die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n bestimmte Moleküle sich in dem Raum v ansammeln, ist $\left(\frac{v}{V}\right)^n$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $N - n$ Moleküle im Raum $V - v$

sind, ist gleich $\left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}$. Endlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Moleküle im Raum v und die übrigen $(N-n)$ im Raum $V-v$ sind, gleich

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \qquad \text{(IV,1)}$$

Wie schon oben betont wurde, gibt diese Formel die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich irgendwelche bestimmten Moleküle der Anzahl n im Raum v befinden; wir können uns vorstellen, daß alle N Moleküle numeriert sind und von ihnen n numerierte Moleküle sich im Raum v befinden. Für uns ist es jedoch nicht wesentlich, welche Moleküle sich gerade im Raum v befinden; wichtig ist nur, daß ihre Zahl n beträgt. Aber aus der gegebenen Verteilung der N Moleküle auf die Räume v und $V-v$ können noch

$$\frac{N!}{n!\,(N-n)!} \qquad \text{(IV,2)}$$

verschiedene Verteilungen erhalten werden, bei denen jedoch n Moleküle wie früher im Raum v und $N-n$ im Raum $V-v$ sein werden. Tatsächlich können für N Objekte $N!$ Permutationen bestehen, wobei nicht alle diese Permutationen verschiedene Verteilungen geben. $n!$ Permutationen der im Raum v befindlichen Moleküle und $(N-n)!$ Permutationen der im Raum $V-v$ befindlichen Moleküle geben ein und dieselbe Verteilung. Auf diese Weise müssen aus der gesamten Zahl von $N!$ Permutationen $n! \cdot (N-n)!$ Permutationen ausgeschlossen werden, die nicht die Verteilung der Moleküle ändern, und folglich wird die Anzahl der Permutationen, die *verschiedene* Verteilungen geben, durch die Formel (IV,2) ausgedrückt.

Somit existieren $\frac{N!}{n!\,(N-n)!}$ verschiedene Verteilungen, bei welchen sich n Moleküle im Raum v und $N-n$ Moleküle im Raum $V-v$ befinden. Die Wahrscheinlichkeit einer jeden dieser Verteilungen wird durch die Formel (IV,1) ausgedrückt, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n *beliebige* Moleküle im Raum v befinden, nach dem Additionstheorem der Wahrscheinlichkeiten

$$w_n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \qquad \text{(IV,3)}$$

Wird insbesondere gefordert, die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß sich *alle* N Moleküle im Teilraum v des Raumes V sammeln, so ist in diesem Falle $n = N$, und die Formel (IV,3) gibt

$$w_n = \frac{N!}{N!\,0!}\left(\frac{v}{V}\right)^N = \left(\frac{v}{V}\right)^N,$$

d. h., man erhält wieder die Formel, die bereits im Text auf Seite 280 angeführt wurde. Offensichtlich müssen bei einer gleichmäßigen Verteilung der N Moleküle in dem Raum V auf den Raum v gerade $N \cdot \frac{v}{V}$ Moleküle entfallen. Bei Benutzung der Formel (IV,3) können wir zeigen, daß eine solche Verteilung am wahrscheinlichsten ist. Die Formel (IV,3) gibt nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich im Raum v eine beliebige Zahl von Molekülen ($\leq N$) befindet, d. h. die Wahrscheinlichkeit von Zuständen, die von den wahrscheinlichsten abweichen. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten (IV,3) über alle n von 0 bis N ergibt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich im Raum v *irgendeine* Zahl von Molekülen zwischen 0 und N befinden wird. Ein solches Ereignis ist Gewißheit, und deshalb

muß $\sum_{n=0}^{N} w_n = 1$ sein, wenn die Wahrscheinlichkeit (IV,3) auf 1 normiert ist. Das ist tatsächlich der Fall. Die rechte Seite von (IV,3) ist das allgemeine Glied des Binoms $\left(\frac{V-v}{V}+\frac{v}{V}\right)^N$, und deshalb

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \left(\frac{V-v}{V}+\frac{v}{V}\right)^N = 1^N = 1\,.$$

Kennen wir die Wahrscheinlichkeit w_n, so können wir die mittlere Zahl der Moleküle im Raum v finden:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n w_n\,. \tag{IV,4}$$

Bezeichnen wir in (IV,3) $\frac{v}{V}$ mit p, und schreiben wir (IV,4) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\ &= Np \sum_{n=0}^{N} \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n}\,. \end{aligned}\right\}$$

Führen wir die Bezeichnungen $n-1=n'$ und $N-1=N'$ ein und bemerken wir, daß $N'-n' = [(N-1)-(n-1)] = N-n$ ist, dann erhalten wir

$$n = Np \sum_{n'=0}^{N'} \frac{N'!}{n'!\,(N'-n')!} p^{n'} (1-p)^{N'-n'}\,.$$

Nach der binomischen Formel ist diese Summe gleich $(p+1-p)^{N'}$, d. h. wieder gleich 1. Somit ist

$$\bar{n} = Np = N\frac{v}{V}\,. \tag{IV,5}$$

Dies bedeutet, daß die mittlere Zahl der Moleküle im Raum v gleich der Anzahl n ist, die auf diesen Raum bei gleichmäßiger Verteilung im gesamten Raum V entfallen, wie es zu erwarten war.

Berechnen wir jetzt den Mittelwert des Quadrates von n, d. h. $\overline{n^2}$:

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 w_n\,.$$

Wir ersetzen n^2 durch $n(n-1)+n$ und schreiben

$$\left.\begin{aligned} \overline{n^2} &= \sum_{n=0}^{N} [n(n-1)+n]\, w_n = \sum_{n=0}^{N} n w_n + \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\, w_n \\ &= n + \sum n(n-1) \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\ &= n + \sum \frac{N!}{(n-2)!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\ &= \bar{n} + N(N-1)\,p^2 \sum \frac{(N-2)!}{(n-2)!\,(N-n)!} p^{n-2} (1-p)^{N-n}\,. \end{aligned}\right\}$$

In der Summe setzen wir

$$N-2=N'', \quad n-2=n''$$

und bedenken, daß

$$N''-n''=[(N-2)-(n-2)]=N-n.$$

Führen wir die Substitution aus, dann sehen wir sofort, daß die Summe nach der binomischen Formel wieder gleich $(p+1-p)^{N''}$, also gleich eins ist, so daß

$$\begin{aligned}\overline{n^2}&=\bar{n}+N(N-1)p^2=\bar{n}+(Np)^2-Np^2\\&=\bar{n}+(\bar{n})^2-\bar{n}p=(\bar{n})^2+\bar{n}(1-p).\end{aligned} \tag{IV,6}$$

Nach Definition ist das Schwankungsquadrat

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{(n_k-\bar{n})^2}.$$

Rechnen wir das Quadrat aus und mitteln, dann erhalten wir

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{n_k^2}-2\overline{n_k}\,\bar{n}+(n)^2=\overline{n^2}-(\bar{n})^2. \tag{IV,7}$$

Setzen wir für $\overline{n^2}$ den Ausdruck aus (IV,6) ein, dann erhalten wir

$$\overline{n^2}-(\bar{n})^2=\bar{n}-\bar{n}p,$$

so daß

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}-\bar{n}p. \tag{IV,8}$$

Ist v ein kleiner Teil des Raumes V, so ist $p=\frac{v}{V}$ eine kleine Zahl. In diesem Fall kann das zweite Glied in (IV,8) vernachlässigt werden, und wir erhalten die gesuchte Formel

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}. \tag{IV,9}$$

Es versteht sich von selbst, daß diese Formel nicht nur auf die Schwankungen der Zahl von Gasmolekülen anzuwenden ist, sondern auf beliebige statistische Erscheinungen. Ihr Sinn tritt im Text auf S. 281 hervor.

2. Die Formel für das Schwankungsquadrat der Energie

$$\overline{\varepsilon^2}=kT^2\frac{d\bar{E}}{dT} \tag{109,5}$$

wird auf folgende Weise abgeleitet. Wir haben nach (IV,7)

$$\overline{\varepsilon^2}=\overline{E^2}-(\bar{E})^2. \tag{IV,10}$$

Zur Berechnung des Mittelwertes von $\bar{E}$ benutzen wir die GIBBSsche kanonische Verteilung

$$\bar{E}=\frac{\int E(p,q)\,e^{-\frac{E(p,q)}{kT}}\,d\tau}{\int e^{-\frac{E(p,q)}{kT}}\,d\tau}, \tag{IV,11}$$

worin $d\tau$ ein Raumelement des *Phasenraumes* ist. Differenzieren wir (IV,11) nach T, dann finden wir

$$\frac{dE}{dT} = \frac{\frac{1}{kT^2}\int E^2 e^{-\frac{E}{kT}} d\tau \int e^{-\frac{E}{kT}} d\tau - \frac{1}{kT^2}\left[\int E e^{-\frac{E}{kT}} d\tau\right]^2}{\left[\int e^{-\frac{E}{kT}} d\tau\right]^2}$$

$$= \frac{1}{kT^2}\frac{\int E^2 e^{-\frac{E}{kT}} d\tau}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\tau} - \frac{1}{kT^2}\left\{\frac{\int E e^{-\frac{E}{kT}} d\tau}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\tau}\right\}^2. \qquad \text{(IV,12)}$$

Bedenken wir, daß

$$\frac{\int E^2 e^{-\frac{E}{kT}} d\tau}{\int e^{-\frac{E}{kT}} d\tau} = \overline{E^2},$$

dann sehen wir, daß (IV,12) ergibt:

$$kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT} = \overline{E^2} - (\overline{E})^2,$$

und deshalb nach (IV,10)

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT},$$

was zu beweisen war.

V. Ein Teilchen in einem rechtwinkligen Potentialtopf

Im § 147 betrachteten wir ein Teilchen in einem rechtwinkligen Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden. Wir sahen, daß man durch die Anwendung der Randbedingungen sofort ein System von diskreten Energieniveaus

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ml^2}$$

erhält. Ein Teilchen möge sich in einem Feld befinden, wie es in Abb. 225 dargestellt ist. Ein solches Feld nennt man auch eine Potentialgrube oder einen Potentialtopf mit endlicher Höhe. Betrachten wir den Fall, bei dem die Gesamtenergie E des Teilchens kleiner als die Höhe U_0 des Kastens ist,

$$E < U_0. \qquad \text{(V,1)}$$

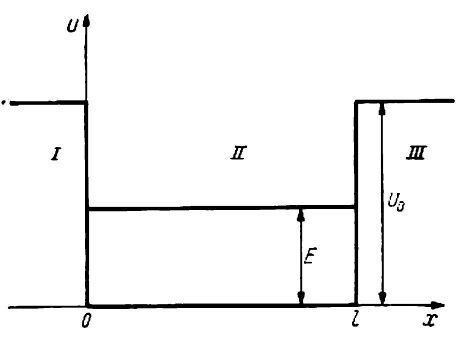


Abb. 225

Wie im § 145 zerlegen wir das Feld in drei Gebiete:

$$\begin{array}{lll} \text{Gebiet } I & x \leqq 0 & U = U_0 = \text{const} \\ \text{Gebiet } II & 0 \leqq x \leqq 1 & U = 0, \\ \text{Gebiet } III & x \geqq 1 & U = U_0 = \text{const.} \end{array}$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$k_1 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E - U_0)}\,, \tag{V,2}$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} \tag{V,3}$$

ein. Wegen der Bedingung (V,1) ist k_1 eine rein imaginäre Größe

$$k_1 = ik\,,$$

wobei

$$k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}\,. \tag{V,4}$$

Mit dieser Bezeichnung hat die SCHRÖDINGER-Gleichung die Form:

$$\text{für die Gebiete } I \text{ und } III \qquad \frac{d^2\psi_{I,III}}{dx^2} - k^2\psi_{I,III} = 0\,, \tag{V,5}$$

$$\text{für das Gebiet } II \qquad \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k_2^2\psi_{II} = 0\,. \tag{V,6}$$

Die Lösungen der Gleichung (V,5) sind $e^{\pm kx}$, im Gebiet I ist die Lösung e^{-kx} jedoch ungeeignet, da sie für $x \to -\infty$ unendlich wird; ebenso ist im Gebiet III die Lösung e^{kx} unpassend, da sie für $x \to +\infty$ unendlich wird. Somit haben wir

$$\left.\begin{array}{lll} \psi_I & = e^{kx} & (x < 0)\,, \\ \psi_{II} & = b_1 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x}\,, & \\ \psi_{III} & = c e^{-kx} & (x > 0)\,. \end{array}\right\} \tag{V,7}$$

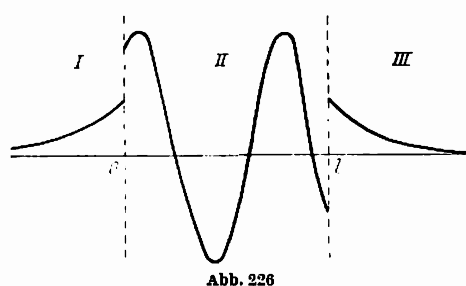


Abb. 226

Diese drei Werte ψ treffen an den Grenzen der Gebiete nicht zusammen (siehe beispielsweise die Abb. 226). Indessen muß der Zustand des Teilchens durch eine Funktion beschrieben werden, die sich *im gesamten Raum* als stetige und glatte Kurve darstellt (Stetigkeit von ψ und ihrer ersten Ableitung). Um diese Forderung zu erfüllen, müssen wir Bedingungen suchen, bei welchen sich alle drei Kurvenabschnitte an den Grenzen der Gebiete stetig und glatt treffen, d. h., es sind die Bedingungen

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}\,, \qquad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \tag{V,8}$$

$$(\psi_{II})_{x=l} = (\psi_{III})_{x=l}\,, \qquad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=l} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=l} \tag{V,9}$$

zu erfüllen (siehe § 145). Die Bedingung (V,8) ergibt

$$1 = b_1 + b_2\,, \quad k = ik_2b_1 - ik_2b_2\,,$$

woraus wir

$$b_2 = -\frac{k - ik_2}{k + ik_2} b_1 \tag{V,10}$$

finden. Offensichtlich muß diese Beziehung zwischen den Koeffizienten b_2 und b_1 auf der ganzen Kurve gelten, also auch an den Grenzen der Gebiete *II* und *III*. Für diese Grenze geben die Bedingungen (V,9):

$$b_1 e^{ik_2 l} + b_2 e^{-ik_2 l} = c e^{-kl},$$

$$ik_2 b_1 e^{ik_2 l} - ik_2 b_2 e^{-ik_2 l} = -kce^{-kl}.$$

Eliminieren wir c aus diesen Beziehungen, dann finden wir

$$b_2 = -\frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l} b_1 . \tag{V,11}$$

Damit die Bedingungen (V,10) und (V,11) übereinstimmen, ist offenbar notwendig, daß

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} e^{-ik_2 l} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{ik_2 l}. \tag{V,12}$$

Hieraus erhalten wir leicht

$$(k^2 - k_2^2) \sin k_2 l = -2kk_2 \cos k_2 l$$

oder

$$\operatorname{tg} k_2 l = -\frac{2kk_2}{k^2 - k_2^2} \tag{V,13}$$

oder endlich in ausgeschriebener Form

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\right) l = -\frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0 - 2E}. \tag{V,14}$$

In dieser Beziehung ist E der Einheitsparameter, über den verfügt werden kann. (V,14) ist die Gleichung, aus der die Werte von E bestimmt werden, bei denen ψ die Bedingungen der Stetigkeit und des glatten Verlaufs im gesamten Gebiet erfüllt. Diese Kurve ist transzendent. Ihre Lösung kann gefunden werden, wenn wir die Kurven graphisch auftragen, die die linke und die rechte Seite von (V,14) in Abhängigkeit von E darstellen. Die Schnittpunkte dieser Kurven geben die gesuchten Werte für E. Für uns ist nur wesentlich, daß diese Werte offensichtlich eine *diskrete Gesamtheit* bilden. Hieraus folgt quantitativ, daß auch in einem Kasten mit Wänden endlicher Höhe die Energie des Teilchens gequantelt ist.

Zu einer Vorstellung über den Charakter dieser Energieniveaus und ihrer Beziehung zu den Energieniveaus des Teilchens im Kasten mit unendlich hohen Wänden betrachten wir den Fall, wo $U_0 \gg E$ ist, d. h. beispielsweise die Lage der niederen Energieniveaus bei genügender Höhe der Wände. In diesem Fall muß die rechte Seite von (V,14) in der Form

$$\operatorname{tg} k_2 l = -2\sqrt{\frac{E}{U_0}} \tag{V,15}$$

geschrieben werden (links schreiben wir zur Abkürzung die Bezeichnung k_2). Wir sehen, daß $\operatorname{tg} k_2 l$ negativ ist und sich sehr wenig von null unterscheidet

($U_0 \gg E$). Das bedeutet, daß sich das Argument des tg $k_2 l$ nur wenig von $n \cdot \pi$ unterscheidet, aber kleiner als $n \cdot \pi$ ist. Setzen wir angenähert

$$k_2 l \approx n\pi$$

oder in ausführlicher Form

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE_n} l \approx n\pi ,$$

dann erhalten wir

$$E_n \approx n^2 \frac{h^2}{8ml^2} .$$

Das bedeutet, daß sich die Anordnung der niederen Energieniveaus nur wenig von derjenigen eines Teilchens in einem Kasten mit unendlich hohen Wänden unterscheidet.

VI. Orthogonalität und Normierung der Eigenfunktionen eines Oszillators

Die Eigenfunktionen der SCHRÖDINGER-Gleichung für den linearen Oszillator besitzen die Eigenschaft der Orthogonalität im Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = 0 , \qquad m \neq n$$

(da ψ_n eine reelle Funktion von x ist, gilt $\psi_n^* = \psi_n$).

Hiervon kann man sich am einfachsten auf folgende Weise überzeugen. Wir schreiben die SCHRÖDINGER-Gleichung für den Oszillator in der Form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\, \psi = 0 . \qquad (149{,}4)$$

Die Eigenwerte des Parameters λ, die den Eigenfunktionen ψ_n entsprechen, sind $\lambda_n = 2n + 1$. Wir haben somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n + 1 - \alpha^2 x^2)\, \psi_n = 0 , \\ \frac{d^2\psi_m}{dx^2} + (2m + 1 - \alpha^2 x^2)\, \psi_m = 0 . \end{aligned}\right\}$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit ψ_m, die zweite mit ψ_n und integrieren von $-\infty$ bis $+\infty$, dann erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_m \frac{d^2\psi_n}{dx^2} - \psi_n \frac{d^2\psi_m}{dx^2}\right) dx = 2\,(m - n) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m\, dx .$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx}\right) dx = \left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

geschrieben werden. Bedenken wir, daß die Eigenfunktionen für $x \to \infty$ gegen null streben, da

$$\psi_n = C_n e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha} x) ,$$

dann sehen wir, daß das Einsetzen sowohl an der oberen als an der unteren Grenze null ergibt. Auf diese Weise ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Für $m = n$ ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\, dx$$

gleich einer endlichen Zahl (wegen der quadratischen Integrierbarkeit der Funktion ψ_n), was für das Auffinden des Normierungsfaktors C_n benutzt werden kann. Es ist zu beachten, daß C_n allgemein eine komplexe Zahl ist,

$$C_n = |C_n|\, e^{-i\delta}.$$

Wenn uns das Quadrat des *Moduls* $|\psi_n|^2$ interessiert, genügt es, den Modul $|C_n|$ zu suchen; der Phasenfaktor bleibt unbestimmt. Bezeichnen wir zur Abkürzung $|C_n|$ mit N_n, dann haben wir

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\, dx &= \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi \\ &(\xi = \sqrt{\alpha} x)\,. \end{aligned}\right|$$

Wir ersetzen einen dieser beiden Faktoren in $H_n^2(\xi)$ durch seinen Ausdruck aus (150,2)

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{(d^n e^{-\xi^2})}{d\xi^n} \tag{150,2'}$$

und schreiben das Integral in der Form

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi)\, d\xi\,.$$

Führen wir die partielle Integration aus, indem wir setzen

$$dv = \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n}\, d\xi, \quad u = H_n(\xi),$$

so daß

$$v = \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}, \quad du = \frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\, d\xi;$$

dann erhalten wir

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi)\, d\xi$$

$$= (-1)^n \left[\frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} H_n(\xi)\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\, d\xi.$$

Berücksichtigen wir, daß $e^{-\xi^2}$ und alle seine Produkte bei $\xi = \pm\infty$ null werden, so sehen wir, daß das erste Glied als Produkt eines Polynoms mit $e^{-\xi^2}$ gleich null ist. Wiederholen wir die ausführliche Integration n-mal, setzen jedesmal

$$dv = \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k} d\xi \text{ und } u = \frac{d^i H_n(\xi)}{d\xi^i}$$

und bedenken, daß uv an den Grenzen null wird, dann erhalten wir als Resultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} d\xi.$$

Da $H_n(\xi)$ ein Polynom n-ten Grades ist, d. h.

$$H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \cdots,$$

so ist

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!.$$

Wir erhalten auf diese Weise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Aus der Normierungsbedingung erhalten wir

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

woraus sich

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

ergibt.

SACH- UND NAMENREGISTER